T-171

ENGENDRANDO CONTEÚDOS NO ENSINO SECUNDÁRIO UMA PROPOSTA METODOLÓGICA

Daniella Assemany
daniella.cap@ufrj.br
Universidade do Porto / Portugal

Núcleo temático: 1 - Ensino e aprendizagem da matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais.
Modalidade: T – Taller
Nível educativo: Ensino Médio
Palavras chave: proposta metodológica, ensino secundário, geometria vetorial

Resumo

Diante da fragmentação conteudista curricular da matemática nas escolas brasileiras e portuguesas, em conjunto com as dificuldades proeminentes de alguns conceitos matemáticos na transição do ensino secundário para o ensino superior, apresenta-se o relato de uma prática docente referente à elaboração, aplicação e investigação de uma proposta metodológica para estudantes do ensino secundário. Serão compartilhadas e exploradas atividades nas quais o conceito de vetor foi tomado como ponto de partida para o desenvolvimento da proposta, tendo a geometria vetorial como estrutura, permeada pela ideia de conexão de conteúdos. A proposta metodológica, conceituada como 'fluida' neste estudo, deu-se a partir do engendramento de grande parte dos conteúdos abordados no ensino secundário, nomeadamente pela(o): utilização das transformações no plano para o ensino de trigonometria, visualização geométrica para a resolução de sistemas lineares, equação da reta para o estudo da função afim, conceito de vetor em lR^3 *para o ensino da geometria espacial, geometria plana e os vetores para o estudo de números complexos, etc. Aposta-se que esta metodologia de ensino possa contribuir para ressignificar os conceitos matemáticos na escola secundária, destacando-os com uma nova roupagem. Desafiaremos os participantes a refletir sobre algumas destas ligações entre conteúdos.*

1. Introdução

Os tópicos do currículo do ensino secundário (médio), tanto de Portugal (MEC, 2012) quanto do Brasil (BNCC, 2016), em conjunto com a aprendizagem ineficaz dos alunos da escola secundária, mostradas na transição para o ensino superior (Nasser, 2009; Rezende, 2003), foram elementos motivadores para uma investigação na qual se propusesse uma

ISBN 978-84-945722-3-4

associação dos conteúdos em que o conceito de vetor foi escolhido como base e a Geometria Vetorial como estrutura.

Diversos autores justificam utilização dos vetores nos programas curriculares. Bittar (2013) mostra, através do Registros das Representações Semióticas, que a Geometria Vetorial configura-se para o aluno como ganho de mais uma ferramenta na resolução de problemas já conhecidos quando é apresentada inicialmente como um ente geométrico para resolver problemas de geometria. Harel (1990) desenvolveu um programa de álgebra linear baseado na aritmética dos vetores para resolver problemas geométricos, construindo um processo de abstração gradual para alunos do ensino secundário.

Além disso, a história mostra que o conceito de vetor foi desenvolvido também para explicar geometricamente conceitos que muitos matemáticos não estavam totalmente convencidos de sua existência, os quais eram apresentados através da álgebra pura, sem visualização geométrica (Crowe, 1967, 2002; Dorier, 1995). Estes dados têm um peso significativo no ensino de matemática, uma vez que foi necessário utilizar e conceituar os vetores para desenvolver outras teorias que se apresentaram com algumas deficiências, mas que eram muito importantes na época. Isso destaca o potencial dos vetores na compreensão de outros conteúdos de matemática, uma vez que sua utilização propicia representações e visualizações.

No ano de 1843, Hamilton foi conduzido à descoberta e elaboração conceitual dos Quatérnios (Hamilton, 1837), motivado a estender ao espaço tridimensional a forma como os números imaginários atuam no espaço bidimensional, conectando cálculo com geometria. Sua investigação durou cerca de 20 anos e, pelo caminho, introduziu os princípios basilares do cálculo vetorial, os quais colaboraram posteriormente com o desenvolvimento da teoria dos espaços vetoriais.

Os fatos apresentados anteriormente foram elementos impulsionadores para a elaboração de uma proposta metodológica de engendramento de conteúdos para o ensino secundário, partindo do conceito de vetor, que vem sendo modificada com experimentações práticas e investigações de cunho acadêmico. O objetivo principal da proposta que será apresentada neste workshop foi permitir uma associação consistente entre os assuntos estudados na escola, reconfigurando os conteúdos de matemática das três séries do ensino

ISBN 978-84-945722-3-4

secundário, partindo do conceito de vetor, e promovendo uma forma de relação que denominou-se de ‘fluida’ neste trabalho, a qual será explicada posteriormente na seção 1.

2. Uma Proposta Metodológica

Entre os anos de 2006 e 2013, inclusive, o engendramento de conteúdos de matemática foi sendo cultivado, incentivado, aplicado e reformulado com as turmas de ensino secundário de um colégio público brasileiro, de forma experimental, observadora e analítica, constituindo-se em uma Proposta Metodológica P_o. Primeiramente, a aplicação deu-se no 10º ano e, posteriormente, estendeu-se 11º e 12º anos. Nesse período, as versões da proposta foram sendo testadas e modificaram-se conforme observação e reflexão das respostas dos alunos, postos em atividades sob uma ótica investigativa. Nasser, Souza e Torraca (2012) mostram que esta proposta é uma abordagem metodológica que colabora minimizando as dificuldades dos alunos ingressantes na disciplina de Cálculo I e a destacam como sendo *a possibilidade de um currículo em espiral, no qual os conteúdos são constantemente revisitados* (p. 16).

Para fundamentar a proposta, buscou-se valorizar a visão geométrica dos alunos, incentivando esse olhar aos assuntos abordados em todo o ensino secundário, inclusive àqueles nos quais a interpretação tradicionalmente explorada é exclusivamente algébrica. De maneira concisa, pode-se afirmar que a utilização do conceito de vetor no início do 10º ano do ensino secundário proporciona, dentre outros:

- A construção da representação gráfica de uma circunferência, através do conceito de módulo de vetor.
- A possibilidade de explorar a geometria euclidiana no plano cartesiano.
- A utilização das transformações no plano para o ensino de trigonometria, promovendo: a visualização e compreensão dos arcos no círculo a partir da rotação de um vetor em torno da sua origem; a utilização da geometria euclidiana como uma ferramenta para o estudo da trigonometria; a determinação da equação da reta a partir da translação de um ponto segundo um vetor; a simetria central e axial como ferramentas de localização cartesiana dos vértices de polígonos regulares centrados na origem.
- A determinação da função afim a partir do estudo da equação da reta.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- A constituição da expressão algébrica de uma determinada função ou de uma cônica, a partir de sua designação mais simples, através do conceito da translação.
- A translação de gráficos de funções ou de cônicas.
- O estudo da geometria espacial – tradicionalmente explorada apenas por suas medidas de comprimento, superfície e capacidade – a partir do conceito de vetor em lR^3 .
- A visualização geométrica e espacial dos planos – cuja representação algébrica constitui um sistema linear – através das relações entre os vetores normais, principalmente nos casos em que o sistema não é possível e determinado.
- A conceituação de matrizes como um conjunto de vetores linha (ou coluna), propiciando a construção de significados de algumas operações matriciais que se equivalem às operações vetoriais já conhecidas[3].
- O auxílio da geometria plana e dos vetores em lR^2 para o estudo de números complexos e suas representações geométrica e trigonométrica.

A partir de 2014, a proposta recebeu um olhar mais investigativo. Com base na Teoria da Aprendizagem Significativa – TAS (Ausubel, 1968), na qual ~~é proposto que~~ uma nova ideia se ~~se~~ relaciona aos conhecimentos prévios (subsunçores), a proposta P_o de engendramento de conteúdos fornecia o contexto ideal para associar os conteúdos de matemática a partir do conceito de vetor. Segundo a ~~teoria~~TAS, os processos de ensino e aprendizagem dão-se quando o aluno, motivado por uma situação apresentada pelo professor e que tenha sentido para ele, amplia, avalia, atualiza e reconfigura a informação anterior, transformando-a em nova. Assim, acredita-se que o conceito de vetor representa um poderoso subsunçor para interligar os conhecimentos posteriores, presentes nos conteúdos de matemática do ensino ~~médio~~secundário, ressignificando objetos e produzindo novos conhecimentos.

Con formato: Fuente: (Predeterminada) Times New Roman, 12 pto, Color de fuente: Automático, Portugués (Brasil)

Con formato: Fuente: Times New Roman, Sin Resaltar

Juntamente com as orientações curriculares brasileiras, estipuladas atualmente pela BNCC (2016), e as normas e os programas atuais portugueses para o ensino da matemática (MEC, 2012), está em desenvolvimento a Proposta Metodológica P_1.

[3] Apesar do conteúdo Matrizes não ser abordado no ensino médio de Portugal, ele está presente no currículo do Brasil e, por isso, pertence à proposta deste relato.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Na próxima seção, pretende-se apresentar brevemente um pouco do que será levado à discussão no workshop, sobre o engendramento que se procurou fazer em P_1.

3. Um ‘recorte’ da Proposta Metodológica P_1

Nesta seção, apresenta-se uma pequena parte da P_1, cujo objetivo é explicitar de forma didático-pedagógica o engendramento de conteúdos para explorar a Trigonometria no círculo, a partir do conceito de vetores.

Partindo do vetor como subsunçor (Ausubel, 1968), é possível produzir conhecimento para as Transformações no Plano, nomeadamente: translações, simetrias, rotações e homotetias. No âmbito das Rotações do Plano, conceitua-se como: uma transformação que produz ~~um~~ o giro de um objeto em torno de um centro fixo, segundo um ângulo determinado. Se esse objeto for um vetor $\vec{v}$ (~~figura~~ Figura 1), a ~~figura~~ Figura 2 representará a rotação de $\vec{v}$, em torno da origem, segundo um ângulo α. O resultado será um vetor $\vec{v}_\alpha$, de modo que a extremidade do vetor $\vec{v}$ descreva um arco de medida α.

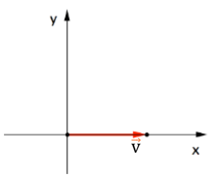

Figura 1

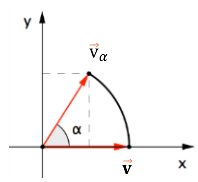

Figura 2

Ao considerar o ângulo α = 360º, a rotação do vetor $\vec{v}$, em torno da origem, segundo um ângulo de 360º, faz com que a extremidade do vetor descreva uma circunferência de raio de medida $|\vec{v}|$. Isto é, a extremidade do vetor percorreu uma distância que representa o comprimento da circunferência de centro em O e raio $|\vec{v}|$, ou seja, $2\pi|\vec{v}|$, conforme a F~~f~~igura 3.

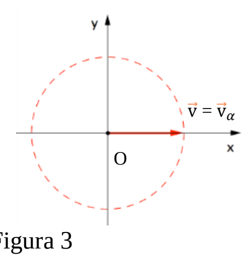

Figura 3

ISBN 978-84-945722-3-4

Partindo dessa ideia, o professor tem a possibilidade de explorar vários outros conceitos:

I) o comprimento do arco, utilizando-se de uma ~~simples~~ regra de três simples;
II) o círculo trigonométrico, quando o vetor é unitário;
III) os arcos múltiplos, através de rotações de mesmo ângulo (12 de 30º ou 8 de 45º ou 6 de 60º ou 4 de 90º ou 2 de 180º, etc.);
IV) as noções de seno e cosseno dos arcos sem precisar recorrer às fórmulas ou regras prontas, que só servem para os alunos memorizarem e depois esquecerem-se (Azevedo, 2013). Para isso, deve-se determinar as novas coordenadas do vetor resultante ao variar o ângulo de rotação.

Para exemplificar alguns desses conceitos, apresenta-se uma ~~atividade~~ tarefa indicada para a introdução da Trigonometria no Círculo, uma vez que os pontos divisores de uma circunferência são extremidades dos vetores canônicos e suas coordenadas são o seno e cosseno dos arcos formados com o eixo positivo.

~~Atividade~~ Tarefa sugerida: Considere uma circunferência determinada pela rotação do vetor (1,0) sobre a origem do plano cartesiano, segundo um ângulo de 360º. Esboce seu desenho no papel milimetrado e divida-a em 12 partes iguais, a partir da interseção com o eixo OX. Em seguida, faça o que se pede:

a) Indique a medida em graus (no sentido positivo) do arco determinado por cada ponto divisor e a origem da circunferência.

~~1.~~b) Localize os pontos divisores dos seguinte arcos: $\frac{\pi}{6}$ rad , $\frac{2\pi}{6}$ rad, $\frac{3\pi}{6}$ rad, $\frac{4\pi}{6}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad , $\frac{6\pi}{6}$ rad, $\frac{7\pi}{6}$ rad, $\frac{8\pi}{6}$ rad, $\frac{9\pi}{6}$ rad, $\frac{10\pi}{6}$ rad, $\frac{11\pi}{6}$ rad e $\frac{12\pi}{6}$ rad. O que você observa?

~~2.~~c) Observe os pontos divisores dos seguintes arcos: $\frac{\pi}{6}$ rad , $\frac{5\pi}{6}$ rad, $\frac{7\pi}{6}$ rad e $\frac{11\pi}{6}$ rad. Quais as relações geométricas que você identifica entre estes arcos?

~~3.~~d) Observe os pontos divisores dos seguintes arcos: $\frac{\pi}{3}$ rad , $\frac{2\pi}{3}$ rad, $\frac{4\pi}{3}$ rad e $\frac{5\pi}{3}$ rad. Quais as relações geométricas que você identifica entre estes arcos?

Con formato: Fuente: 12 pto, Português (Brasil)
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...
Con formato ...

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

~~4.~~e) Determine as coordenadas dos vetores cujas extremidades são os arcos $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad, $\frac{7\pi}{6}$ rad, $\frac{11\pi}{6}$ rad.

~~5.~~f) Determine o seno dos ângulos cujas medidas dos arcos são: $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad , $\frac{7\pi}{6}$ rad, $\frac{11\pi}{6}$ rad. (Utilize o triângulo retângulo que se forma pelo vetor e sua projeção ortogonal no eixo.)

~~6.~~g) Determine o cosseno dos ângulos cujas medidas dos arcos são: $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad , $\frac{7\pi}{6}$ rad, $\frac{11\pi}{6}$ rad. (Utilize o triângulo retângulo que se forma pelo vetor e sua projeção ortogonal no eixo.)

~~7.~~h) Observe suas respostas aos itens f) e g) e compare com as coordenadas indicadas no item e). O que você pode inferir?

~~8.~~i) Discuta com os colegas e o professor sobre suas reflexões.

Essa ~~atividade~~ tarefa tem o objetivo de conduzir o aluno às seguintes percepções:

- Identificação dos vetores simétricos em relação aos eixos e/ou origem.
- Reconhecimento de que cada uma das 12 partes de 30º representa uma fração de $\frac{\pi}{6}$ rad, o que auxilia na determinação da medida do ângulo em radianos, assim como as 8 partes de $\frac{\pi}{4}$ rad ou 6 partes de $\frac{\pi}{6}$ rad, etc.
- Estímulo à geometria analítica, especialmente ao plano cartesiano e aos recursos da geometria plana e trigonometria no triângulo retângulo, para o desenvolvimento de conceitos e habilidades em matemática e nos conteúdos posteriores.
- Correlação das coordenadas dos vetores aos valores do seno e cosseno dos arcos, sem recorrer a fórmulas e regras de sinais.

Acerca da Proposta P_1, este breve 'recorte' apresenta-se em forma de fluxograma 'fluido', indicando para um mapa conceitual (Novak, 1992), sob a forma da ~~figura~~ Figura 4:

Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)
Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

4. Conclusões

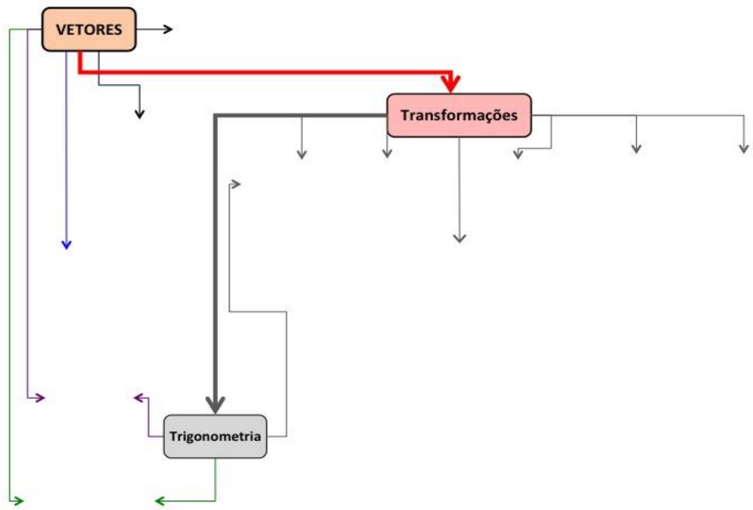

Figura 4

Na continuidade das investigações da Proposta Metodológica P_1 e contando com a discussão e reflexão que este workshop propiciará entre os participantes, pretende-se elaborar outras versões mais densas e aderentes às orientações curriculares e aos manuais escolares. Espera-se que no próximo encontro se tenha uma Proposta Metodológica P_n apropriada e condizente com o apoio dos professores de matemática da escola secundária brasileira, portuguesa e ibero-americana.

5. Referências bibliográficas

Azevedo, C.A.M. (2013). *A Contribuição dos Vetores na Reestruturação Curricular do Ensino Médio: Um Estudo de Caso.* (Monografia de graduação, não-publicada, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil).

Ausubel, D. (1968). *Educational Psychology: a cognitive view*. (1ª ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston.

Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2016). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular (Proposta Preliminar – 2a versão revista)*. Brasília: MEC/SEB. Recuperado em 14 de agosto, 2016 de <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>.

Bittar, M. (2013). O Ensino de Vetores e os Registros de Representação Semiótica. In S.D.A. Machado (org.), *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica* (pp. 71-94). 8ª ed (1ª reimpressão). São Paulo: Ed. Papirus.

ISBN 978-84-945722-3-4

Crowe, M.J. (1967). A History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of a Vectorial System. (1ª ed.). London: Notre Dame.

Crowe, M.J. (2002). *History of Vector Analysis*. Recuperado em 19 de novembro, 2014 de <https://www.math.ucdavis.edu/~temple/MAT21D/SUPPLEMENTARY-ARTICLES/Crowe_History-of-Vectors.pdf>.

Dion, S.M. Pacca, J.L.A. & Machado, N.J. (1995). Quaternions: Sucessos e Insucessos de um Projeto de Pesquisa. *Estudos Avançados, 9 (25*). Recuperado em 19 de novembro, 2014 de <http://dx.doi.org/10.1590/S0103-40141995000300019>.

Dorier, J.L. (1995). A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory. *Historia Mathematica*, *22*, 227-261.

Hamilton, W.R. (1837). Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time. *Transactions of the Royal Irish Academy,17*, 293-422.

Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high- school students basic notions in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *21 (3)*, 387-392). Recuperado em 11 jul, 2016, de <http://dx.doi.org/10.1080/0020739900210306>.

Ministério da Educação e Ciência (2012). *Programa de Matemática A – Ensino Secundário.* Lisboa: Direção Geral de Educação. Recuperado em 06 de setembro, 2015 de <http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos_Disciplinas_novo/Curso_Ciencias_Tecnologias/Matematica_A/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf>.

Nasser, L. (2009). Uma Pesquisa sobre o Desempenho de Alunos de Cálculo no Traçado de Gráficos. In M.C.R Frota & L. Nasser (org.), *Educação Matemática no Ensino Superior – Pesquisas e Debates*, *5*, 43-58.

Nasser, L., Souza, G.A & Torraca, M.A. (2012, outubro). *Transição do Ensino Médio Para o Superior: Como Minimizar as Dificuldades Em Cálculo?*. Atas do V Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática, Petrópolis, Brasil. Recuperado em 27 dezembro, 2015, de <http://www.lematec.no-ip.org/CDS/VSIPEM/PDFs/GT04/CC18595006768_A.pdf>

Novak, J.D. (1992). *A Theory of Education.* (1.ª ed). Ithaca, N.Y.: Cornell University Press.

Rezende, W. (2003). *O ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. (Tese de Doutoramento, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, Brasil). Recuperado em 8 setembro, 2016 de <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-27022014-121106/pt-br.php>.

ISBN 978-84-945722-3-4