

REGLA Y COMPÁS

M^a Carmen Casares Antón – Elena Saudinós Hernández
ccasaresanton@educa.madrid.org - elena.saudinos@educa.madrid.org
IES Pedro Duque (Leganés), España – IES Valle Inclán (Torrejón de Ardoz), España

Núcleo temático: II. La resolución de problemas en Matemáticas

Modalidad: Taller (T)

Nivel educativo: Educación Secundaria

Palabras clave: Geometría métrica, regla, compás

Resumen

Μηδείς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω

Inscripción en el frontispicio de la Academia de Platón

El objetivo del taller es reproducir las construcciones con regla y compás tal y como se enseñaban en la Antigua Grecia en el convencimiento de que la geometría, separada de la aritmética, desarrolla capacidades diferentes como el reconocimiento de figuras o la visión espacial.

En un primer momento se dividirá a los participantes en grupos con uno de los siguientes instrumentos: regla no graduada (trozo de cartón con borde recto), regla no graduada de bordes paralelos (listón de madera) y un compás (cuerda) y se les propondrá el aprendizaje de las construcciones básicas permitidas con cada instrumento y la resolución de problemas o construcciones menos triviales. En un segundo tiempo se reagruparán los participantes de manera que en cada equipo haya al menos alguien ya versado en regla y en compás, y sus componentes se centrarán en las posibilidades geométricas que les concede aunar sus instrumentos. Se incidirá en las construcciones que establecen la equivalencia entre regla finita e infinita y entre compás colapsable y fijo. Por último, y según la disponibilidad del tiempo, se propondrán diferentes ejercicios y problemas de geometría métrica.

Introducción

Las construcciones de regla y compás son trazados de rectas, ángulos y otros objetos geométricos que se pueden realizar con esos dos instrumentos con uso restringido según establecieron los griegos en la antigüedad. En efecto, el compás y la regla de las construcciones clásicas son idealizaciones de sus equivalentes en el mundo real. Se diferencian en que el compás puede abrirse hasta alcanzar cualquier radio y la regla no está marcada. El compás dibuja una circunferencia si se conoce su centro y un punto sobre ella y la regla permite el trazado de la recta que pasa por dos puntos. Como se verá en el taller el

compás puede mantener el radio tras el trazado de la circunferencia o no y la regla puede ser finita o infinita.

El taller comienza con instrumentos reales que permiten adaptaciones de las normas clásicas. Pero posteriormente se incide en las construcciones con los instrumentos idealizados, según se hacían en la Antigua Grecia. El taller concluirá con algunas de las construcciones más sofisticadas. Como ampliación se ofrecerá un resumen de los teoremas fundamentan teóricamente el taller.

Con regla o compás reales

En la primera parte del taller los participantes se agrupan según tengan la posesión de un instrumento dado: un trozo de cartón con un borde recto o un listón de madera con bordes paralelos a modo de regla o un trozo de cuerda que hará las veces de compás. Con el instrumento y un lápiz o carboncillo deberán ser capaces de realizar sobre papel las operaciones básicas que su instrumento ofrece para combinarlas posteriormente en construcciones más sofisticadas.

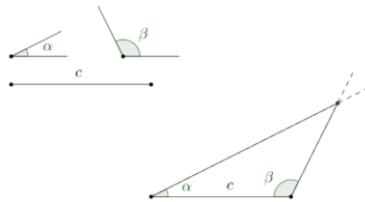
Para cada equipo se proponen diferentes ejercicios. Se incluyen la realización de los primeros como pauta de trabajo.

1. Equipo con regla no graduada dada por un cartón con borde rectilíneo
 - a. Operaciones elementales
 - i. Trazado de una recta por dos puntos: basta apoyar el borde rectilíneo sobre los dos puntos y deslizar el lápiz por el borde.



- ii. Intersección de dos rectas.
 - iii. Transporte de un segmento.
 - iv. Transporte de un ángulo.
 - v. Trazado de una paralela.
 - b. Problemas solubles

- i. Construcción de un triángulo dados un lado y dos ángulos: como la regla de cartón permite el traslado de ángulos, con ella se coloca sobre el lado conocido los ángulo adyacentes a ese lado.



- ii. Construcción de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.
- iii. Corolario: construcción de paralelogramos dados los dos lados (o diagonales) y el ángulo que forman.

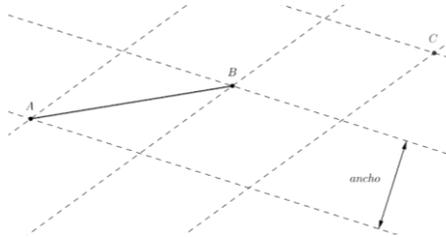
2. Equipo con regla no graduada dada por un listón de bordes paralelos

a. Operaciones elementales

- i. Trazado de una recta por dos puntos: de nuevo se realiza colocando uno de los bordes lisos sobre los dos puntos y deslizando el lápiz sobre el borde.
- ii. Trazado de rectas paralelas con distancia igual al ancho del listón que pasan por dos puntos dados.
- iii. Trazado de paralela a una distancia dada.

b. Problemas solubles

- i. Duplicación de un segmento mayor que el ancho de la regla: se coloca la regla transversalmente de modo que apoye cada lado en uno de los puntos diferentes y se dibujan los dos bordes. Se traza una tercera paralela igualmente separada. Se procede de igual manera pero intercambiando el borde en que se apoya cada punto. Se traza la tercera paralela que corta a la anterior en el punto buscado.

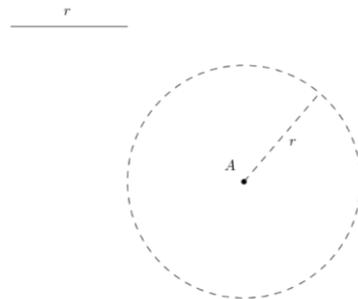


- ii. Bisectriz de un ángulo.
 - iii. Perpendicular a una recta.
 - iv. División de un segmento en partes iguales.
3. Equipo con compás dado por una cuerda

Con el compás como único instrumento no pueden trazarse segmentos, cuando sea necesario este objeto geométrico se sustituirá por par de puntos.

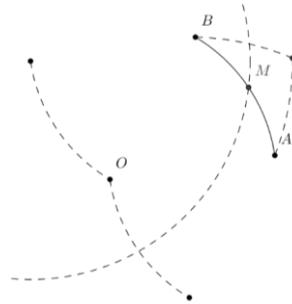
a. Operaciones elementales

- i. Trazado de una circunferencia de centro y radio dado: se forma una lazo con la cuerda de forma que los dos extremos se fijen al centro de la circunferencia a trazar de manera que tensada la cuerda coincida en longitud con el radio. Se deja deslizar el lápiz.



- ii. Intersección de dos circunferencias.
- b. Problemas solubles con compás
- i. Determinación del punto medio de un arco (equivalente al trazado de la bisectriz): se trazan dos circunferencias de centro en cada extremo y radio la distancia al centro, y se marca sobre ellos dos puntos que distan del centro lo que los extremos del arco. Desde ellos se trazan

dos nuevas circunferencias que pasen por los extremos del arco. Es sencillo probar que las circunferencias concéntricas a las anteriores con radio igual a la distancia de la última intersección con el rigen del arco original pasan por el punto medio.



- ii. Trazado de un punto alineado con otros dos (equivalente a la prolongación de la recta).
- iii. Cálculo del punto de intersección de las rectas que determinan dos pares de puntos, sin el trazado de las rectas (equivalente a la intersección de rectas).
- iv. Determinación de un punto alineado con otros dos en un circunferencia dada (equivalente a la intersección de recta y circunferencia).
- v. Obtención de un punto alineado con otros dos que diste de uno de ellos una cantidad dada (equivalente a la prolongación de la recta finita).

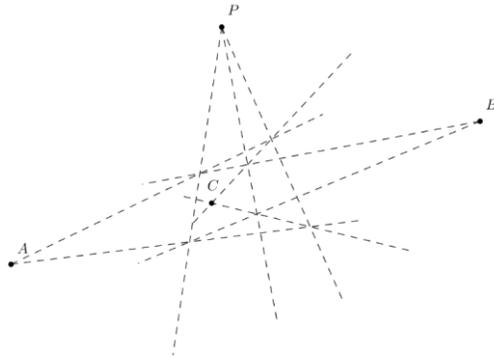
Cuando concluyan las tareas cada grupo dedicarán 5 minutos para exponer en el grupo grande las posibilidades que ofrece su instrumento.

Con regla y compás reales

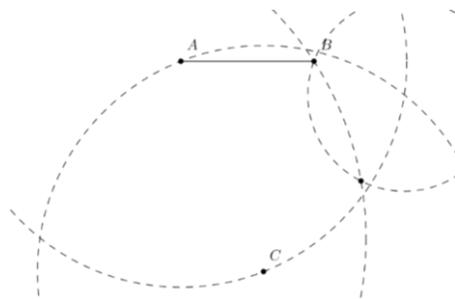
En un segundo momento se reagrupan los participantes en equipos, de al menos tres personas, que contengan un especialista en cada instrumento diferente. En cada equipo se argumenta y debate para descartar una de las dos reglas.

La primera tarea que realizarán los grupos es comprobar que la recta finita es igual a la recta infinita y que el compás colapsable es igual al compás fijo. En efecto, si se desea trazar el

segmento que une dos puntos separados una distancia mayor que el tamaño de la regla, la construcción:



muestra como encontrar un punto colineal a los dados y que dista de ambos menor distancia que los originales. Por otro lado, la construcción



lleva sobre un punto la distancia entre dos originales.

Además se entrenarán en las cuatro operaciones básicas (trazado de una recta por dos puntos, intersección de dos rectas, transporte de un segmento y transporte de un ángulo) que serán en adelante las únicas operaciones permitidas. A continuación se trabajarán en problemas solubles con regla y compás:

- Construcción de un triángulo conocidos tres lados: ahora se utiliza el compás, fijo, para trasladar segmentos.
- Construcción de un triángulo conocidos dos lados y ángulo opuesto.

Y se elaboran construcciones más complicadas:

- Trazado de la mediatriz, bisectriz.

- Construcción de un triángulo dados sus lados o alguno de ellos y una altura, mediana o bisectriz.
- Tangente de una circunferencia que pasa por un punto: en este caso se utiliza que radio y tangente forman un recto, y que todos los ángulo rectos que puede trazarse sobre dos puntos están sobre una circunferencia.
- Tangentes comunes a dos circunferencias (interiores y exteriores).

Otras construcciones geométricas

La parte práctica del taller concluye con la aplicación de los conceptos trabajados en problemas de geometría plana. En esta sección es conveniente que los participantes dispongan de regla (juego de escuadra y cartabón) y compás moderno, para realizar trazados más cómodos. La idea es abordar problemas de geometría métrica para los que se requiera conocimientos matemáticos básicos (geometría de triángulo y otros polígonos, movimientos en el plano, simetrías, homotecias...)

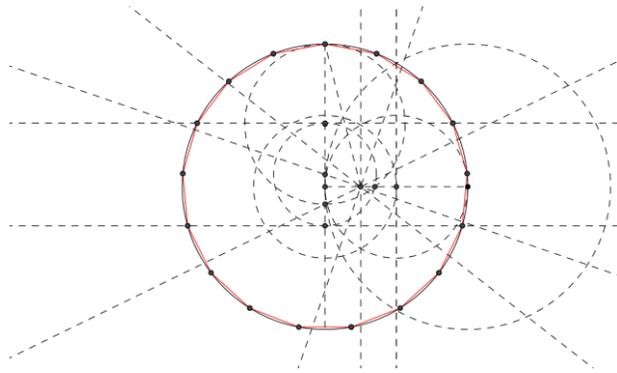
Entre los problemas propuestos estarían los siguientes:

1. Construcción de un rectángulo de base dada de igual área que un polígono dado: se utiliza la proposición 44 de los Elementos de Euclides.
2. Construcción de un cuadrado de igual área que un polígono dado.
3. Cálculo de una figura semejante a una dada doblando el área.
4. Trazado de una recta concurrente a otras dos o el trazado de su bisectriz.
5. Encontrar un segmento que pase por un punto en el interior de un ángulo agudo y que apoye sus extremos sobre ambos lados del ángulo de manera que el punto divida el segmento en dos partes en proporción 1:2.
6. Trazado de un triángulo isósceles dado su lado y su ángulo desigual.
7. Trazado de una circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a una recta o una circunferencia dada.
8. Determinación de una circunferencia tangente a dos rectas y que pase por un punto o sea tangente a otra circunferencia.
9. Construir un triángulo conocidas sus tres medianas.

10. Trazado de una recta que pase por el punto de intersección de dos circunferencias y corte a ambas circunferencias formando cuerdas iguales.

11. Construir un cuadrado que tenga un vértice en un punto dado y los dos vértices adyacente apoyados en dos rectas que no pasan por el punto.

También se abordará el trazado del heptadecágono en honor a Carl F. Gauss, como ejemplo de los polígonos cuyo trazado es realizable con regla y compás.



Ampliación

El taller como tal es eminentemente práctico y, por tanto, los participantes ocuparán casi todo su tiempo en la realización de construcciones geométrica. Sin embargo no puede desestimarse el fundamento teórico de las operaciones geométricas que se utilizan durante su desarrollo. Este argumento justifica que, concluido el taller, se ofrezca a los participantes una selección de textos originales y materiales elaborados por la profesoras sobre los principales resultados y teoremas que apuntalan las construcciones de la geometría clásica griega (teorema de Poncelet, Mohr-Mascheroni y Poncelet-Steiner, que prueban la mayor versatilidad del compás sobre la regla en las construcciones geométricas).

Sin embargo, tan interesante como mostrar lo que es posible dibujar con regla y compás es mostrar lo que no se puede construir con los mismos instrumentos: duplicación del cubo, la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo ente otros y la inscripción de polígonos en la circunferencia.

Se recordarán el teorema de Wantzell sobre números construibles, y se mencionarán los resultados Lambert y Lindemann sobre la irracionalidad y la trascendencia de π . Se incidirá

en el teorema de Gauss que caracteriza el número de lados que puede tener un polígono inscribible y que da paso a la teoría de grupo finitos que desarrolló Galois.

Se realizará un repaso y se ofrecerá, en su caso, enlaces a la documentación realizada por las profesoras.

Además, y para concluir, se ofrecerán argumentos para rebatir las trisección del ángulo con dobleces de papel o el trazado del heptágono regular con regla marcada dentro del marco clásico de regla y compás.

Referencias bibliográficas

Puig Adam, P. (1970). *Curso de Geometría Métrica. Tomos I y II*. Madrid: Biblioteca Matemáticas S.L.

Coxeter H.S.M. (1971). *Fundamentos de Geometría*. México: Ed. Limusa.

Euclides (2000). *Elementos*. Madrid: Ed. Gredos.