

## ENSEÑANZA POR INVESTIGACIÓN: ESTUDIO DEL CÁLCULO VECTORIAL EN LA UNIVERSIDAD

Viviana Angélica Costa

[vacosta@ing.unlp.edu.ar](mailto:vacosta@ing.unlp.edu.ar)

IMApEC, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional  
de La Plata, Buenos Aires, Argentina

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática

Modalidad: T

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Didáctica, Cálculo Vectorial, Enseñanza por Investigación

### Resumen

*En este trabajo con modalidad de taller, destinado a docentes e investigadores en Didáctica de la Matemática que se desempeñen en especial en el nivel universitario, se abordan los principales lineamientos de la denominada Enseñanza por Investigación (EI) propuesta por Chevallard con el propósito de enfrentar el Paradigma Monumentalista en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). En una primera etapa se trabaja con los participantes en torno a las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las problemáticas actuales en la enseñanza de la matemática en la universidad? ¿Por qué es necesario cambiar de una enseñanza Monumentalista a una por Investigación? ¿Cuáles características tiene una EI? ¿Cuáles herramientas proporciona la TAD para desarrollar una EI? Luego, a modo de ejemplo se presenta el diseño, implementación y análisis de una EI implementada en una Facultad de Ingeniería para el estudio del Cálculo Vectorial. Finalmente se propone a los participantes realizar una actividad en grupos con el fin de elaborar una propuesta que permita introducir en una institución la EI para el estudio de un tema a determinar, cerrando el taller con una reflexión sobre las posibilidades actuales de implementar este tipo de enseñanza o algunos gestos característicos de ella.*

### Introducción

El objetivo general del taller es acercar a los participantes en el conocimiento de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) desarrollada por Yves Chevallard y de la Enseñanza por Investigación (EI) que propone esta teoría, ofreciéndoles herramientas útiles que les permitan analizar y enfrentar varios de los problemas actuales en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática, causados en general por el denominado Paradigma Monumentalista.

Para esto, en una primera etapa, se presentan las herramientas básicas que proporciona la TAD y las características principales de la denominada EI y cuáles herramientas didácticas permitirían introducir este estilo de enseñanza en el aula (Otero, Fanaro, Llanos, 2013). Seguido a esto y a modo de ejemplo se muestra el diseño, implementación y análisis de una EI para el estudio del Cálculo Vectorial que fue implementada en una Facultad de Ingeniería de una Universidad Argentina a través de un dispositivo didáctico denominado Recorridos de Estudio e Investigación (REI). Finalmente se propondrá a los participantes realizar una actividad que tendrá por objetivo el esbozo de una propuesta que permita introducir la EI para el estudio de un contenido matemático que sea de interés para el grupo, cerrando con una reflexión sobre los temas tratados.

### **Marco teórico**

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) desarrollada por Yves Chevallard (1985, 1999, 2009, 2015) parte de concebir a la matemática y al hacer matemática como una actividad humana antropológica y ha definido con precisión los fenómenos denominados: *monumentalización del saber* y *pérdida de sentido* de las preguntas que se estudian en la escuela o en la universidad. Con *monumentalización* se refiere a la semejanza que tiene el estudio de los contenidos matemáticos en las instituciones educativas, con la visita de monumentos, en el sentido que son objetos ya creados, que se los venera y muchas veces sin sentido. Por *pérdida de sentido* se identifica al fenómeno que refiere al estudio de los contenidos curriculares sin saber muchas de las veces en respuesta a cuáles preguntas se estudian, están aislados y sin conexión con otros temas. Con el propósito de enfrentar estos fenómenos la TAD propone un cambio en los modos de enseñar pasando a la denominada Enseñanza por Investigación (EI). Este modo de enseñar pretende introducir en el aula ciertos gestos en los alumnos propios a los de un investigador. Para llevar al aula la EI la TAD propone hacerlo a partir del dispositivo didáctico que denomina Recorridos de Estudio y de Investigación (REI). Los REI se inician con una *pregunta generatriz* (Q) y el proceso de estudio se organiza en torno a ella con el objetivo de aportar una respuesta. La pregunta Q, seleccionada por el profesor deberá poseer la propiedad de generar la formulación de numerosas preguntas derivadas que den sentido y una razón de ser a los contenidos matemáticos a estudiar. Además para la viabilidad de los REI, es necesario que se den cambios en los roles de los alumnos, pasando de una actitud en general pasiva en las clases

a una actitud activa y colaborativa, donde el saber sea algo por descubrir, en vez de ser una mera información que el profesor les facilita sin debate ni discusión.

### **Desarrollo**

A continuación y a modo de ejemplo se presentan las etapas que dieron lugar a la implementación y posterior análisis de una EI experimentada en una Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (Argentina) para el estudio del Cálculo Vectorial.

- **Análisis previo**

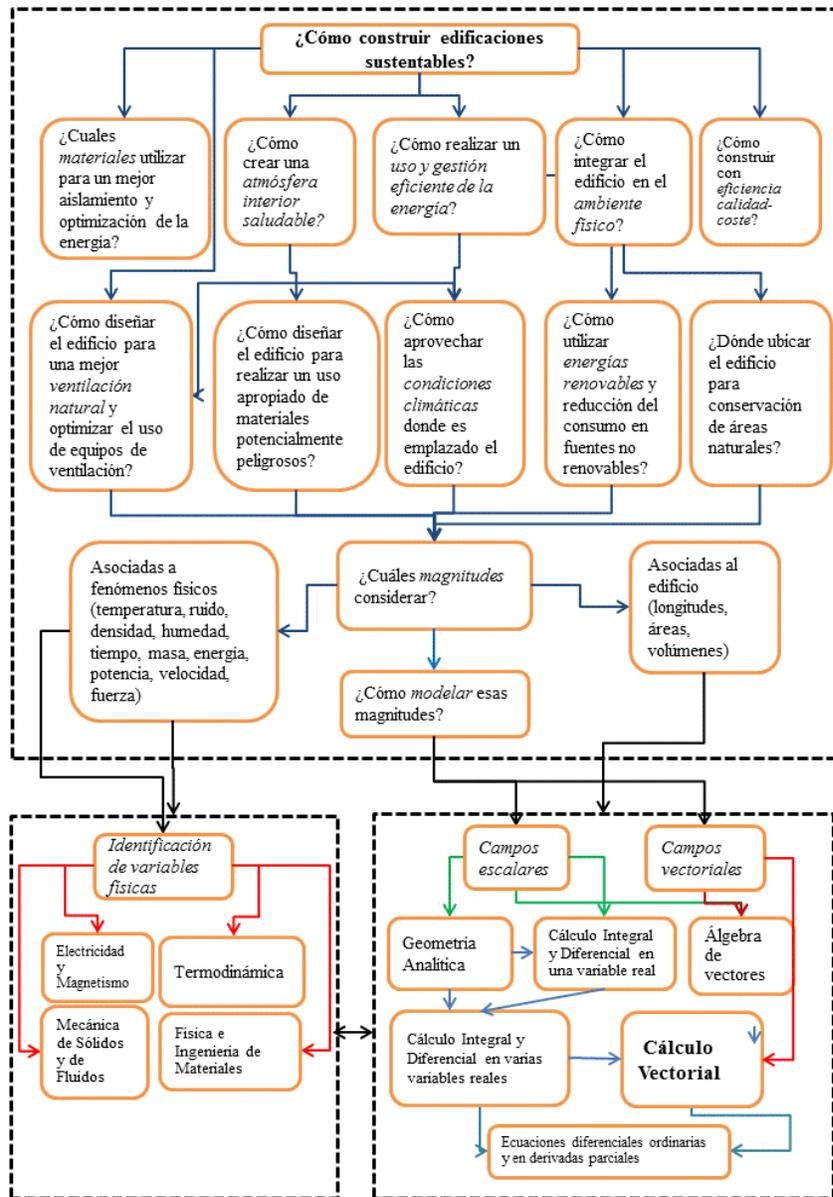
Antes de la experimentación de una EI mediante un REI es necesario llevar a cabo un análisis previo en el marco de la TAD que debe contemplar varios aspectos.

Uno de ellos es la selección por parte del profesor de la *pregunta generatriz* que iniciaría el REI con el objetivo de darle una razón de ser al estudio de los contenidos matemáticos a los que se pretende dar respuesta. En combinación con esto se analizan los posibles recorridos de estudio e investigación que generaría tal pregunta, construyéndose así una cadena de preguntas y respuestas, que se denomina Modelo Praxeológico de Referencia (MPR).

Para el ejemplo que aquí se presenta, los contenidos matemáticos que se esperaban estudiar eran los relativos al Cálculo Vectorial y considerando la estrecha vinculación de este sector de la matemática con la física en carreras de ingeniería se propuso un REI *codisciplinar* en física y matemática, que se inició con la *pregunta generatriz*: *¿Cómo construir edificaciones sustentables?*

A partir de seleccionar Q, se construye el MPR, conformado por una serie de pares de preguntas y de respuestas relativas a fenómenos físicos y naturales asociados a la optimización y uso racional de la energía y de los recursos naturales en la construcción de edificaciones sustentables (Cuadro 1). Dichos fenómenos serían descriptos por *campos escalares* tales son la temperatura y la densidad, entre otros; y por *campos vectoriales*, como son los campos de gradientes de temperaturas y campos de velocidades de un fluido. Así mismo, el estudio de las variaciones de dichos *campos escalares* y *vectoriales* daría lugar a los conceptos matemáticos de rotor, divergencia, laplaciano y gradiente, y al estudio de tares y técnicas, entre las de modelar, describir, identificar variables, calcular, calcular longitudes, calcular áreas superficiales, calcular flujo y circulación y argumentar, entre otras.

En esta primera etapa también el investigador debe analizar los condicionamientos que podrían obstaculizar el desarrollo del REI en una institución en particular, según los denominados Niveles de Codeterminación Didáctica establecidos en el marco de la TAD. En la investigación que aquí se presenta se encontró que los condicionamientos más fuertes se hallan en los *niveles* superiores de la escala (sociedad-escuela) donde se encuentran más arraigado el paradigma de la *enseñanza tradicional* y el rol del ingeniero, más técnico que científico. Esto se encuentra en detalle en Costa, Arlego, Otero (2014).



Cuadro 1: Modelo Praxeológico de Referencia.

- **Experimentación de una Enseñanza por Investigación**

Luego del análisis previo, se experimentó el REI que se inició a partir de la *pregunta generatriz*: *¿Cómo construir edificaciones sustentables?* en un curso habitual de matemática con estudiantes de primer año (18 a 20 años) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata en la República Argentina (FI UNLP) de la carrera Ingeniería Aeronáutica que tuvo una duración de 12 encuentros de cuatro horas cada uno.

Los estudiantes dieron inicio al REI a partir de seleccionar un hangar (edificio grande y abierto, de techo sólido, destinado a guardar o reparar aparatos de aviación) y preguntarse sobre su sustentabilidad. En particular se cuestionaron los siguientes aspectos: “*uso eficiente de los recursos naturales*”, “*relación costo-beneficio*”, “*uso de energías renovables*”, “*cuidado del medio ambiente*” y “*aprovechamiento de los fenómenos naturales*”, entre otros. Surgieron así, las primeras preguntas derivadas *¿Qué cantidad de paneles solares se podrían colocar en el techo del edificio y cuál sería la energía que proveerían?* Para dar respuesta, surgen preguntas vinculadas a la geometría del edificio: *¿Cuáles magnitudes asociadas a la geometría del edificio considerar? ¿Cómo calcular esas magnitudes? ¿Cómo calcular el área de una superficie?*

Luego surgieron preguntas asociadas a los cuestionamientos sobre la sustentabilidad del hangar: *¿Cuáles fenómenos naturales considerar? ¿Cómo modelar desde la matemática esos fenómenos? ¿Son magnitudes escalares o vectoriales? ¿Cómo describir matemáticamente un campo escalar y vectorial?* Se mencionaron los fenómenos: viento, sol, lluvia, humedad y temperatura, representándolos mediante *campos escalares* o *campos vectoriales*. Esto dio lugar al estudio del concepto central del Cálculo Vectorial como es el de *campo vectorial*.

En la última etapa del REI, a partir de preguntas del estilo: *¿Cómo “circula” o “fluye” el aire en el interior del edificio? ¿Cómo fluye el calor dentro del edificio?* surgieron las nociones de *circulación* y *flujo* y las preguntas derivadas relativas a su cálculo matemático. Además, la introducción de los temas: *fuentes y sumideros de fluidos, flujo de fluidos, conservación de la masa, incompresibilidad y flujos rotacionales e irrotacionales de fluidos*, permitieron el estudio de aspectos básicas de Mecánica de los Fluidos y de Termodinámica, y de Álgebra y Cálculo Vectorial: operaciones algebraicas entre magnitudes escalares y

vectoriales, operador nabla, comportamiento de un campo vectorial: flujo y circulación, variaciones de un campo vectorial: rotor y divergencia (Costa, Arlego, Otero, 2014).

- **Análisis**

En una etapa posterior a la implementación del REI se realiza un análisis cualitativo que incluyó varios aspectos utilizando las herramientas que ofrece la TAD. La información obtenida durante la implementación del REI mediante la observación participante y la recolección de los protocolos de los alumnos se analizó cualitativamente de modo de interpretar en términos teóricos el fenómeno estudiado. El objetivo es el de investigar la introducción de la EI en el aula a partir de la experimentación de un REI, obteniendo información de su viabilidad, de cuales gestos surgen, cuáles son sus ventajas y desventajas y cuales sus condicionamientos, ya que las experiencias de implementaciones de una EI en el aula de matemática en la universidad aún son pocas y aisladas.

Uno de los aspectos que a analizar es cuales contenidos se estudian a partir de las preguntas derivadas que surgen de la *pregunta generatriz*, es decir, cuál es el recorrido efectivamente realizado. Para el caso que se presenta, el REI permitió el estudio e investigación de elementos centrales del Cálculo Vectorial: campo vectorial, campo escalar, superficies, área de una superficie, curvas: representación paramétrica, operaciones algebraicas entre campos escalares y vectoriales, integrales de superficie, integrales de línea, estudio de las variaciones de un campo vectorial: rotor y divergencia, estudio de las variaciones de un campo escalar: Gradiente y Laplaciano, y los Teoremas de Stokes, Gauss y Green. Conjuntamente con esto, la *pregunta generatriz* permitió el estudio de nociones básicas de: Física de los Fluidos, Mecánica de los Fluidos y Termodinámica. Tal estudio conjunto, matemática y física, permitió generar en el aula un debate en relación al significado físico de las magnitudes escalares y vectoriales calculadas matemáticamente.

Además, la *pregunta generatriz* permitió el estudio de un *problema abierto*, para el cual los alumnos tuvieron que: seleccionar, describir, asignar magnitudes vectoriales o escalares, asignar medidas y unidades a las variables seleccionadas; y además para ello, buscar información, probar, proponer respuestas, defenderlas, modificarlas, discutir las, comunicarlas y dar conclusiones. Esto contribuiría en la formación de los estudiantes de ingeniería en el desarrollo de competencias necesarias para la identificación y solución de

*problemas abiertos*. Además, los tipos de *tareas* que predominaron durante el REI fueron las: de *modelar* situaciones de la “realidad”; *identificar y describir variables físicas de carácter escalar o vectorial* (temperatura, humedad, flujo de aire, radiación solar); *establecer* ecuaciones matemáticas que representen los modelos y la de *plantear y calcular* (volúmenes, áreas de superficies y longitudes de arco de curva).

El otro aspecto a analizar se vincula con la pregunta ¿Cómo funcionan la *topogénesis*, la *cronogénesis* y la *mesogénesis* durante la implementación de un REI en la universidad? Estas son *funciones didácticas* que intentan explicar ¿Quiénes? ¿Cuándo? y ¿Cómo? se llevan a cabo las interacciones didácticas en una clase. De la EI llevada al aula mediante el REI se observó que el proceso de estudio fue dinámico. Además la descripción *topogenética* de las clases permitió observar que en su gran mayoría los responsables en hacer las preguntas y en aportar respuesta a ellas estuvieron en su mayoría a cargo de los alumnos. El profesor tuvo un rol de observador y colaboró en el estudio de los temas que así lo requería el grupo de alumnos. Este hecho, implicó en la función *cronogenética* una dilatación del tiempo didáctico.

El último aspecto a considerar en el análisis a posteriori al introducir una EI se vincula a la pregunta ¿Cómo se desarrollan las diferentes *dialécticas* que son esenciales para la gestión de un REI codisciplinar? Las *dialécticas* son saberes o saber-hacer, considerados “gestos del estudio y de la investigación”, descritas en la TAD. En la investigación que se presenta se observó de la experimentación que en mayor o menor medida, todas las dialécticas funcionaron durante el REI. Esto se encuentra en detalle en (Costa, Arlego, Otero, 2015).

### **Conclusiones**

En este trabajo con modalidad de taller se presentaron sucintamente algunos aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y de cómo llevar al aula de clase la Enseñanza por Investigación mediante los dispositivos didácticos Recorridos de Estudio e Investigación. Además el caso expuesto, de un REI implementado en una Facultad de Ingeniería para el estudio del Cálculo Vectorial, serviría de ejemplo para acercar tal conocimiento a otros profesores interesados en proponer cambios en los modos de enseñar, adoptando para sus prácticas docentes, algunas o varias de las herramientas que proporciona tal teoría.

La implementación de los REI en el aula de matemática, tienen limitaciones y condicionamientos que requieren de un proceso de investigación, de realimentación, de

cambios a nivel institucional, de currículo y de cambios en el rol del profesor, que requiere una remodelación profunda de su relación con el saber matemático, que pasa de ser algo que se sabe por anticipado, a algo por descubrir e investigar.

Finalmente se espera durante el taller reflexionar sobre algunas de las siguientes cuestiones: ¿Cómo podrían los REI ser integrados a los programas de estudio? ¿Se incorporarían como una actividad a realizar “fuera” o “dentro” de la clase? ¿Cuáles condiciones serían beneficiosas para su desarrollo? ¿Cómo adecuar los tiempos académicos al implementar dispositivos didácticos del tipo REI en las clases?

### Referencias bibliográficas

Costa, V. A., Arlego, M., & Otero, M. R. (2014). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. *Revista de formación e innovación educativa universitaria*, 7(1), 20-40.

Costa, V. A., Arlego, M., & Otero, M. R. (2015). Las dialécticas en un Recorrido de Estudio e Investigación para la enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*, 8(3), 146-161.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. París, Francia: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266. [http://servidor-opsu.tach.ula.ve/profeso/guerr\\_o/praticamatema/referencias/practica\\_marcosteoricos3/Chevallard\\_Teoria\\_Antropologica.pdf](http://servidor-opsu.tach.ula.ve/profeso/guerr_o/praticamatema/referencias/practica_marcosteoricos3/Chevallard_Teoria_Antropologica.pdf)

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER: problèmes et avancées*. IUFM Toulouse, Francia. Disponible en <http://yves.chevallard.free.fr/>

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, 173-187. Springer International Publishing. [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/RL\\_Chevallard.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/RL_Chevallard.pdf)

Otero, M. R., Fanaro, M. D. L. Á., & Llanos, V. C. (2013). La Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo y el Inquiry: un análisis desde la enseñanza de la Matemática y la Física. *Revista Electrónica de Investigación en educación en Ciencias*, 8(1), 77-89. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=273327598007>