T-533

DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Eric Flores-Medrano – Dinazar Escudero-Avila – José A. Juárez
eflores@fcfm.buap.mx; eadinazar@hotmail.com; jajul@fcfm.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México

Núcleo temático: Formación del profesorado en matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: argumentación, demostración, ejemplificación, definición

Resumen
El conocimiento que requiere un profesor de matemáticas para realizar su labor tiene distintas componentes. Una de estas, que ha sido explorada desde diferentes perspectivas teóricas, es la relativa al conocimiento de las formas de proceder y producir en matemáticas. En este taller se trabajarán actividades que permitan determinar cuál es la utilidad de este conocimiento, en qué formas se manifiesta en nuestra labor como docentes y cómo los estudiantes pueden desarrollar competencias de razonamiento matemático a partir de tareas centradas en las prácticas generadoras de conocimiento matemático. De manera particular, nos enfocaremos en el análisis de las prácticas argumentativas en el salón de clases, de la demostración, ejemplificación y definición.

Cuando nos referimos al conocimiento que un profesor de matemáticas usa en su labor, generalmente pensamos en un conocimiento disciplinar y en un conocimiento didáctico-disciplinar. Considerar estos dos grandes bloques de conocimiento tiene sus bases en el trabajo de Shulman (1986). Algunos autores los han retomado y han establecido bloques internos con la finalidad de realizar investigaciones con mayor precisión analítica (e.g. Ball, Thames y Phelps, 2008). Particularmente la propuesta denominada *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* se ha constituido como un modelo potente debido al sistema concreto de subdominios y categorías al interior de cada dominio de conocimientos (Flores-Medrano, Escudero-Avila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014).

De entre las diferentes naturalezas de conocimiento que se le atribuyen al profesor, una destaca del resto por su aparente falta de relación con los contenidos matemáticos y por su carácter transversal en la matemática misma. Se trata del Conocimiento de la Práctica Matemática (otros autores lo nombran Conocimiento sobre Matemáticas- *Knowledge About*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Mathematics). Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013) lo definen como el conocimiento de las formas de proceder y producir en matemáticas. Flores-Medrano (2015) destaca que demostrar, ejemplificar, definir y usar heurísticos son las prácticas matemáticas más comunes entre los docentes de matemáticas y que es posible estudiar el conocimiento que estos tienen sobre dichas prácticas una vez que se identifiquen características concretas que permitan analizarlas puntualmente.

En este documento se desarrolla la propuesta de un taller que toma en consideración diferentes prácticas matemáticas, así como elementos que propician el desarrollo del conocimiento sobre estas en docentes de matemáticas.

Elementos teóricos

Hablar de desarrollo profesional del profesor de matemáticas sin un marco de referencia que nos indique cuál es un estado ideal puede ocasionar que los cambios reportados sean poco aprovechados o sistematizados. Contar con un marco sólido de conocimiento profesional es un punto de partida que permite ser referente, pero también ser sistematizador en dicho desarrollo profesional. El modelo denominado *Mathematics Teachers ́Specialised Knowledge* (MTSK) ha sido desarrollado considerando el conocimiento que es específico del profesor de matemáticas. Se trata de un conocimiento nuclear dentro del cuerpo de conocimiento profesional (Flores-Medrano et al. 2014). Dicho modelo considera que el conocimiento especializado del profesor de matemáticas tiene dos naturalezas principales: la naturaleza matemática y la naturaleza didáctico-matemática. Para fines analíticos, cada una de estas componentes, a las cuales se les ha denominado dominios de conocimiento, están conformadas por tres subdominios diferenciales entre sí. Al interior de los subdominios se ha conformado un sistema de categorías que permite tener mayor localización en los estudios. La Tabla 1 muestra los dominios, subdominios y categorías del MTSK.

Particularmente, el Conocimiento de la Práctica Matemática considera las categorías: Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, Formas de validación y demostración, Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas, Prácticas particulares del quehacer matemático, y Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

ISBN 978-84-945722-3-4

Subdominios		**Categorías asociadas al subdominio** *Conocimiento sobre:*	
Conocimiento matemático	**Conocimiento de los temas**	Procedimientos	*¿Cómo se hace?*
			¿Cuándo puede hacerse?
			¿Por qué se hace así?
			Características del resultado
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	
		Registros de representación	
		Fenomenología y aplicaciones	
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas	Conexiones de complejización	
		Conexiones de simplificación	
		Conexiones transversales	
		Conexiones auxiliares	
	Conocimiento de la práctica matemática	*Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos*	
		Formas de validación y demostración	
		Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal	
		Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas	
		Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)	
		Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	
Conocimiento Didáctico del Contenido	**Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas**	Teorías de aprendizaje	
		Fortalezas y dificultades	
		Formas de interacción con un contenido matemático	
		Intereses y expectativas	
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas	Teorías de enseñanza	
		Recursos materiales y virtuales	
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	

ISBN 978-84-945722-3-4

	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas	Expectativas de aprendizaje
		Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado
		Secuenciación con temas anteriores y posteriores

Tabla 1. Dominios, subdominios y categorías del MTSK

En este escrito desarrollaremos las bases teóricas que dan sustento al desarrollo del conocimiento de la práctica matemática por medio de algunas actividades concretas.

Método

Las actividades con las que se busca generar desarrollo profesional en el profesor de matemáticas deben de tener por lo menos dos aspectos claros: qué se va a desarrollar y cómo la actividad permite dicho desarrollo. A continuación describiremos una serie de actividades que serán usadas en el taller y se responderá a los dos aspectos antes mencionados. Las actividades están enfocadas en desarrollar aspectos relacionados con las prácticas argumentativas y usos de razonamientos en el aula de matemáticas, así como en la generación de definiciones, demostraciones y ejemplos.

Actividad 1. Tipos de razonamiento y estructuras argumentativas: un camino hacia la demostración

De acuerdo con Duval (1999), la demostración matemática es un estadio superior en el razonamiento matemático: requiere de justificaciones y argumentaciones coherentes y válidas. En Carrillo et al. (2016) se mencionan tres tipos básicos de razonamiento que son utilizados comúnmente en las aulas de matemáticas: el razonamiento abductivo, el inductivo y el deductivo.

El razonamiento abductivo es el que se pone en juego para generar conjeturas (Fernández, 2005). Salvo casos en los que la madurez cognitiva, lógica y conceptual permitan generar conjeturas plausibles, este tipo de razonamiento se caracteriza por las imprecisiones en los resultados matemáticos propuestos.

ISBN 978-84-945722-3-4

El razonamiento inductivo se caracteriza por ser aquel con el que las personas llegan a una conclusión a partir de la observación de algunos casos particulares (Cañadas, 2007). En este tipo de razonamiento suelen generalizarse propiedades identificadas en un grupo de objetos. El razonamiento deductivo es aquel que suele generar mayor precisión en los resultados, toda vez que se trata de una serie de concatenaciones de razonamientos previamente comprobados como verdaderos (Fernández, 2005).

En el taller se mostrarán ejemplos de razonamientos hipotéticos en un aula de matemáticas, los cuales podrán categorizarse en estos tres tipos de razonamiento y cuya veracidad de las conclusiones no necesariamente dependerá del tipo de razonamiento sino de la elección de premisas y de las conexiones lógicas establecidas entre estas.

Finalmente, la relación entre la argumentación y la demostración cobra sentido cuando esta segunda acepta una variedad de formas. En Carrillo et al (2016) se destacan las demostraciones experimentales, las inductivas de un caso, las inductivas de varios casos, las inductivas completas y las deductivas. Para cada uno de estos tipos se trabajará, mediante un ejemplo, la relación con los tres tipos de argumentos.

Actividad 2: La definición y su papel en la demostración

Independientemente de la elección metodológica del profesor con respecto de sus clases, las definiciones son ampliamente utilizadas en la enseñanza de las matemáticas. Según Flores-Medrano (2015) el problema de que las definiciones sean, habitualmente, construidas a partir de propiedades, tiene como consecuencia que los profesores y estudiantes asuman como tales a un listado de propiedades sin analizar qué tipo de características debe cumplir estas para convertirse en una definición.

Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros (2014) hacen una extensa revisión sobre lo que distintos autores consideran como caracterizaciones de la definición matemática. Las características encontradas con mayor consenso en las investigaciones consultadas fueron la precisión en la terminología (uso de términos básicos o previamente definidos); no circularidad (no hacer referencia al concepto en la propia definición); no ambigua (caracterización de manera unívoca de una clase de objetos); no contradictoria o estructuralmente inequívoca (las características empleadas deben ser consistentes); invariante bajo cambio de representación (un objeto pertenece a una clase de objetos, y es definible ahí, independientemente de su representación); equivalencia (se puede dar más de

ISBN 978-84-945722-3-4

una formulación de un mismo concepto); elegancia (de entre las definiciones equivalentes, la más elegante es aquella que usa conceptos generales más básicos); minimalidad (no redundancia de las características, ninguna de las características es deducible del resto), y degeneración (ejemplos del concepto que no se ajustan a la idea intuitiva del concepto). Estos atributos encierran, además de una caracterización de la definición matemática, algunos aspectos de su uso como práctica y de las implicaciones en sus posibles variedades.

Con base en estas características de la definición, en el taller se trabajarán ejemplos que contemplan nuevamente los tipos de demostración recogidos en Carrillo et al (2016) y se analizará el papel que tiene la definición en los procesos de demostración, así como los elementos predominantes de la definición dependiendo de cada tipo de demostración.

<u>Actividad 3: Ejemplos y contra ejemplos como prácticas en el proceso de demostrar</u>

Los ejemplos ayudan en la conformación de la imagen que se tiene de un concepto (Vinner, 1983). Los profesores utilizan los ejemplos en múltiples situaciones escolares y con objetivos muy distintos. Conocer usos didácticos de los ejemplos y conocer ejemplos concretos para situaciones matemáticas concretas son dos facetas de conocimiento que comúnmente podemos observar en los profesores. La primera se relaciona con el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y la segunda con el conocimiento del tema. Además existe una tercera faceta correspondiente a las características matemáticas del ejemplo de forma abstracta. Esta característica está íntimamente relacionada con el papel que tiene el ejemplo (y el contraejemplo) en los procesos de demostración y conceptualización de los contenidos matemáticos (Ayalon, Watson y Lerman, 2017). Esta actividad, que servirá como cierre, pretende destacar dos aspectos: el ejemplo no demuestra (aunque existen mecanismos muy interesantes que pueden llevar hacia la demostración como lo son los procesos inductivos de varios casos o la creación de ejemplos genéricos) y el contraejemplo sí refuta (veremos la lógica matemática detrás de este hecho).

Conclusiones

Este trabajo, que se presentará en formato de taller, aporta una serie de consideraciones teóricas que permiten hablar, por un lado, de un posible desarrollo profesional entre los profesores participantes (el desarrollo de conocimiento que propician las actividades) y, por otro lado, de elementos que conforman el conocimiento de la práctica matemática en

ISBN 978-84-945722-3-4

profesores de la disciplina. En ambos casos se plantean aspectos concretos desde una perspectiva teórica y un esbozo de actividades que serán utilizadas durante el taller. Dar conclusiones acerca de los efectos que tienen dichas actividades en el desarrollo profesional de los profesores requerirá de la puesta en marcha durante el congreso.

La práctica matemática que se coloca al centro del diseño del taller es la demostración, concordando con Duval (1999) en cuanto a la importancia que tiene la demostración en el desarrollo de la matemática misma. En términos de Godino y Recio (2001), utilizamos una noción escolar de la demostración que se nutre de otros campos institucionales, pero que mantiene su esencia escolar, cuidando en todo momento de escapar de la visión platónica que los mismos autores detectan que tiene en los cursos tradicionales en los que es utilizada.

La definición y la ejemplificación se tornan en procesos clave para la demostración, pero también se presentarán con características que las hacen prácticas independientes con respecto a la demostración. Una caracterización completa es mostrada en el cuerpo de este documento.

Finalmente, con respecto al desarrollo profesional hay que aclarar que en este taller se pretende incidir en una de sus facetas, la referente a los procesos cognitivos del profesor y a su aplicación en contextos de aula. Sin embargo, reconocemos que esta no es la única faceta y que los procesos reflexivos profundos y continuos juegan un papel fundamental en un desarrollo profesional integral. Nuestros estudios venideros abordarán estos aspectos y el diseño de este taller ha sido el punto de partida para la generación de nuevos materiales.

Referencias bibliográficas

Ayalon, M., Watson, A., & Lerman, S. (2017). Students' conceptualisations of function revealed through definitions and examples, *Research in Mathematics Education*, http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2016.1249397

Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Cañadas, M.C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

ISBN 978-84-945722-3-4

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M., Escudero, D., & Flores, E. (Eds.) (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de primaria*. Madrid, España: Paraninfo.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México, D. F.: Grupo Editorial Iberoamericana.

Escudero, I.M., Gavilán, J.M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(1), 7-32.

Fernández, A.N. (2005). Modelos de razonamiento abductivo. *Contrastes*, *10*, 155-180.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)*. Tesis doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M.A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Godino, J.D. y Recio, A.M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*(3), 405-414.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *American Educational Researcher Association*, *15*(2), 4-14.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*, 293–305.

ISBN 978-84-945722-3-4