T-720

# UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS USANDO O GEOGEBRA

Duelci Aparecido de Freitas Vaz –Teresa F. Blanco – Mateus Almeida de Freitas.
duelci.vaz@gmail.com – teref.blanco@usc.es – mafmateus@hotmail.com
Pontifícia Universidade Católica de Goiás/Instituto Federal de Goiás – Universidade de Santiago de Compostela–Instituto Federal de Goiás.

Núcleo temático: Ensino e aprendizagem da Matemática nas diferentes modalidades e níveis educativos.
Modalidade: T
Nível educativo: 5
Palavras chave: Números Complexos, Geogebra, Articulação Álgebra-Geometria, Sequência Didática.

**Resumo**

*Apresentamos esse estudo justificando que os números complexos são abordados na educação brasileira desconsiderando seu desenvolvimento lógico, histórico e os aspectos algébrico-geométricos relacionados. Para contribuirmos com o debate acadêmico sobre este assunto, apresentamos uma sequência didática iniciada por um estudo de seu movimento lógico e histórico relatando: sua gênese, a origem de sua representação geométrica, os motivos de sua permanência e sua importância enquanto conhecimento científico. Em seguida, propomos uma mediação pedagógica com o software Geogebra, com a finalidade de articular, dinamicamente e simultaneamente, sua álgebra e sua geometria, para possibilitar um entendimento mais amplo deste assunto. Como resultado, notamos que um número complexo pode ser pensado como um vetor; a soma e a diferença de dois números complexos podem ser pensadas como as diagonais de um paralelogramo; o produto e a divisão de dois números complexos podem ser reduzidos à soma; a radiciação representa movimentos de rotação no plano, formando um polígono regular sobre uma circunferência; a potenciação pode ser reduzida a somas sucessivas, equivale dizer a combinações de várias diagonais de paralelogramos, indicando rotações. Além do mais, ilustramos algebricamente e geometricamente o entendimento das propriedades relacionadas a essas operações.*

## Introdução: uma história dos números complexos

Uma história fascinante da Matemática foi a que envolveu a busca pela resolução das equações polinomiais. No intervalo dos séculos XIV- XVII d.C. este assunto ganhou notoriedade ente os Matemáticos da Europa. François Viéte (1540 – 1603), Descartes, (1596 – 1650), Pierre de Fermat (1601 -1665), Rafael Bombelli (1526 – 1572), Girolamo Cardano (1501 – 1576), Nicolo Fontana (1499 – 1557) conhecido como Tartaglia, deram



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

contribuições importantes para a resolução das equações polinomiais de até grau quatro. A maioria dos debates sobre a resolução de equações polinomiais se deu inicialmente envolvendo as equações de terceiro grau e que evoluíram naturalmente para resolução das equações de quarto, quinto, etc, até que Evariste Galois demonstrar que para polinômios de grau superior a quatro não há uma fórmula geral que seja capaz de resolver todos os casos.

Sem qualquer sombra de dúvida, foi a possibilidade de resolver equações de grau superior a dois, que os matemáticos tiveram a percepção de que poderiam criar uma nova estrutura numérica que passaria a ser denominada de números complexos.

Segundo Eves (2011, p. 302):

> Por volta de 1515, Scipione del Ferro (1465-1526), professor de matemática da Universidade de Bolonha, resolveu algebricamente a equação cúbica $x^3 + mx = n$, baseando seu trabalho provavelmente em fontes árabes. Ele não publicou o resultado, mas revelou o segredo a seu discípulo Antônio Fior.

Outro matemático importante foi Tartaglia, para Eves (2011, pp. 302-303):

> Por volta de 1535, Nicolo Fontana de Brescia, mais conhecido como Tartaglia (o tartamudo), devido a lesões físicas sofridas quando criança que afetaram sua fala, anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 + px^2 = n$. Achando que se tratava de blefe, Fior desafiou Tartaglia para uma disputa pública envolvendo a resolução de equações cúbicas. Com muito empenho Tartaglia conseguiu resolver também, faltando poucos dias para a disputa, a equação cúbica desprovida do termo quadrático. Como no dia marcado sabia resolver dois tipos de cúbicas, ao passo que Fior só sabia resolver um, Tartaglia triunfou plenamente.

Eves (2011), conta-nos que Girolamo Cardano conseguiu obter informações de Tartaglia de como resolver a equação cúbica e publicou o resultado em 1545, em Nuremberg, na obra *Ars Magna*, um grande tratado em latim de álgebra:

> (...) os protestos de Tartaglia foram rebatidos por Ludovico Ferrari, o mais brilhante dos discípulos de Cardano, que argumentou ter seu mestre recebido informações de del Ferro, através de um terceiro personagem, ao mesmo tempo que acusava Tartaglia de ter plagiado a mesma fonte. Seguisse uma polêmica acerca da qual Tartaglia, com certeza, deu-se por feliz de sair vivo. (Eves, 2011, p.303)


ISBN 978-84-945722-3-4

Os matemáticos daquela época perceberam que toda cúbica completa poderia ser reduzida a uma cúbica sem o termo quadrático, ou seja, $y^3 + py = q$. A solução de Cardano[12] para $y^3 + py = q$ é dada por: $y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

Rafael Bombelli (1526-1572), aplicando está fórmula na resolução da equação $x^3$-$15x=4$, obteve a seguinte solução: x= $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ - $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. A aparente contradição notada por Bombelli, a extração da raiz negativa de – 121, é que esta equação possui soluções reais, a saber: x = 4, x = -1+$\sqrt{3}$ e x = -1-$\sqrt{3}$.

Bombelli fez $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a+b\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a-b\sqrt{-1}$ (usando a notação moderna), e obteve $a=2$, $b=1$ e daí $x=4$. Assim, percebeu que aceitar tal situação era possível e foi mais além, escrevendo o livro: "Álgebra Opera", onde aparece a teoria dos números complexos, pela primeira vez, razoavelmente bem estruturada.

Com os estudos de Bombelli, foi possível observar que algumas vezes as raízes quadradas de números negativos são necessárias para encontrar soluções reais. Ou seja, ele mostrou que a aparência destas expressões nem sempre é um sinal de que o problema não é solúvel. Com estas ideias, muitos matemáticos puderam notar que os números complexos eram ferramentas úteis para alguns estudos.

Entretanto, a Matemática teve que esperar alguns anos para que os números complexos se desenvolvessem de fato. O próximo passo foi a representação geométrica dos números complexos, conhecida hoje como plano Argand-Gauss. Segundo Eves (2011, p. 522):

> Caspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822) e Gauss foram os primeiros autores a notar a associação, agora familiar, entre números complexos e pontos reais do plano.Wessel e Argand não eram professores de matemática; Wessel era um agrimensor, nascido em Josrud, Noruega, e Argand um guarda-livros, nascido em Genebra, Suíça

Para Eves, "a prioridade da ideia cabe a Wessel, com um artigo apresentado a Academia Real Dinamarquesa de Ciências em 1797 e publicado nas *Atas* dessa Academia em 1799" (2011, p. 522). Eves afirma também que: "A contribuição de Argand figura num

[2] O raciocínio de Cardano está na parte I do apêndice.


ISBN 978-84-945722-3-4

artigo publicado em 1806 e mais tarde, em 1814, apresentado nos *Annales de Mathematiques* de Gergonne" (2011, p.522). Ainda Eves menciona que:

> O artigo de Wessel permaneceu excluído do mundo matemático em geral até que foi descoberto por um antiquário cerca de 98 anos depois de ter sido escrito. Foi então republicado na oportunidade do centenário de seu primeiro aparecimento. Esse atraso no reconhecimento geral da realização de Wessel explica por que o plano complexo veio a ser chamado *plano de Argand* em vez de *plano de Wessel* (Eves, 2011, p. 522).

A contribuição dada por Gauss desta importante ideia está implícita em sua tese de doutorado:

> A contribuição de Gauss se encontra numa memória apresentada a Sociedade Real de Gottingen em 1831, posteriormente reproduzida nas suas *Obras Reunidas.* Gauss assinalou que a ideia básica da representação pode ser encontrada em sua tese de doutorado de 1799. A afirmação parece procedente e explica por que o plano complexo e frequentemente conhecido como *plano de Gauss.* ( Eves, 2011, p.522).

O plano Argand-Gauss consiste de duas retas perpendiculares. Na horizontal apresenta-se a reta dos números reais, que representa a parte real do número complexo, e na perpendicular apresenta-se o eixo imaginário, representa a parte imaginária do número complexo, como mostra a figura abaixo.

A ideia de representar os números complexos geometricamente foi muito importante para o desenvolvimento da teoria:

> A simples ideia (sic) de considerar as partes real e imaginaria de um número complexo $a + bi$ como as coordenadas retangulares de um ponto do plano fez com que os matemáticos se sentissem muito mais a vontade com os números imaginários, pois esses números podiam agora ser efetivamente visualizados, no sentido de que a cada número complexo corresponde um único ponto do plano e vice-versa. Ver e crer, e ideias anteriores sobre a não existência e o caráter fictício dos números imaginários foram geralmente abandonadas. (Eves, 2011, p.524)

Essa representação em forma de eixos perpendiculares é consistente com as operações algébricas, uma vez que a operação de multiplicação de um número complexo pela unidade imaginária i consiste em rotacioná-lo de noventa graus no sentido anti-horário, como


ISBN 978-84-945722-3-4

será mostrado mais adiante. O eixo imaginário é colocado perpendicular ao eixo real, pois a unidade imaginária significa um movimento de rotação de $90^0$ no sentido anti-horário, como mostraremos em breve.

**A álgebra e a geometria dos números complexos.**

Com esta introdução histórica podemos agora trabalhar no sentido de mostrar a nossa proposta que consiste essencialmente de uma articulação entre a álgebra e a geometria dos números complexos.

#### Soma e subtração de números complexos[13]

Primeiro é preciso notar que a todo número complexo $z = a + bi$, existe um único ponto que o representa no plano Argand-Gauss. Sejam dados os números complexos: $z = a + bi, w = c + di, u = e + fi$, então a soma de números complexos é definida da seguinte maneira: $z + w = (a+c) + (b+d)i$. A operação de soma e subtração possuem propriedades geométricas importantes, podem ser caracterizadas como as mesmas operações realizadas com vetores.

#### Multiplicação de números complexos[14]

Na introdução deste trabalho mostramos que Bombelli passou a operar com números complexos aplicando os mesmos critérios aplicados aos números reais. Assim, dado $z = a + bi$ e $w = c + di$, então, definimos $zw = (a + bi).( c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Para compreender geometricamente a multiplicação de números complexos, vamos inicialmente descrever o significado geométrico da multiplicação de um número real por um complexo e da multiplicação da unidade imaginária por um complexo.

O produto de número complexo por um número real puro é um número que está sobre uma reta que passa pela origem e pelo ponto determinado pelo número complexo.

---

[13] Ver parte ii do apêndice.
[14] Ver parte iii do apêndice.


ISBN 978-84-945722-3-4

A multiplicação de um número complexo pela unidade imaginária i, algebricamente nos dá $i(a + bi) = -b + ai$ e geometricamente, equivale a uma rotação de $90^0$, no sentido anti-horário, preservando o módulo.

Podemos agora pensar o produto de dois números complexos da seguinte maneira, usando a propriedade distributiva: *(a + bi) (c + di) = a(c + di) + bi(c + di).* A parcela *a(c + di)* está numa reta que passa por *(c, d)* e pela origem. A parcela *bi(c + di)* está numa reta perpendicular a reta que passa por *(c, d)* e a origem. Depois, somamos as duas parcelas. Assim, reduzimos a multiplicação à soma, o resultado é a diagonal do paralelogramo. Algumas propriedades da multiplicação na forma algébrica e suas propriedades geométricas são apresentadas no apêndice. Observamos, a partir disso, que a potência de números complexos pode ser reduzida a somas sucessivas. Mas temos ainda a opção da forma trigonométrica.

A divisão fica reduzida a multiplicação através da multiplicação pelo conjugado do denominador no numerador e denominador. Assim, se reduz a soma e passa a ter a mesma interpretação do produto.

#### Forma polar ou trigonométrica dos números complexos [15]

Um número complexo fica bem determinado quando conhecemos seu módulo e seu argumento. Dado $z = a + bi$, $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$. A partir de agora podemos reinterpretar as operações de multiplicação e divisão de números complexos de uma forma diferente daquelas já apresentadas, incluindo suas propriedades, como está explícito no apêndice.

#### Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica[16]

Consideremos os números complexos z e w, dados na forma trigonométrica: $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$ e $w = |w|(cos\alpha + isen\alpha)$. O produto z*w é dado por: $zw = |z|((cos\theta + isen\theta)|w|(cos\alpha + isen\alpha) = |z||w|(cos\theta + isen\theta)(cos\alpha + isen\alpha) = |z||w|\big((cos\theta cos\alpha - sen\theta sen\alpha) + i(sen\theta cos\alpha + sen\alpha cos\theta)\big) = |z||w|(cos(\theta + \alpha) + isen(\theta + \alpha))$. Portanto: $zw = |z||w|(cos(\theta + \alpha) + isen(\theta + \alpha))$. Logo, para multiplicar dois números complexos na forma polar basta saber os seus módulos e seus argumentos. O

[15] Ver parte iv do apêndice.
[16] Ver parte v do apêndice.


ISBN 978-84-945722-3-4

produto é obtido multiplicando os módulos, somando os argumentos e calculando o seno e cosseno, conforme a fórmula dada.

**Divisão de números complexos na forma trigonométrica**

A divisão é dada como segue: $\frac{z}{w} = \frac{|z|(cos\theta+isen\theta)}{|w|(cos\alpha+isen\alpha)}=\frac{|z|(cos\theta+isen\theta)}{|w|(cos\alpha+isen\alpha)}.\frac{(cos\alpha-isen\alpha)}{(cos\alpha-isen\alpha)} =$ $\frac{|z|}{|w|}((cos\theta\ cos\alpha + sen\theta sen\alpha) + i(cos\theta\ sen\alpha + cos\alpha sen\theta))$=$\frac{|z|}{|w|}(\cos(\theta-\alpha) + \ \ sen(\theta - \alpha))$. Ou seja, para dividir dois números complexos, dividimos seus módulos e subtraímos seus argumentos e substituímos na fórmula.

**Potenciação de números complexos na forma trigonométrica**[17]

Agora generalizamos a fórmula para potenciação de números complexos para potências inteiras o que passaremos a chamar de Primeira fórmula de Moivre. A potência $z^n$, n $\epsilon\ N^*$, é dada por $z^n = z.z.\dots.z$. Aplicando o resultado anterior, obtemos: $z^n = z.z.\dots.z =$ $|z|.|z|.\dots.|z|.(cos(\theta+\theta+\cdots+\theta) +\ isen(\theta+\theta+\cdots+\theta)$, isto é, $z^n = |z|^n(cos(n\theta) +$ $isen(n\theta)$ (fórmula de Moivre).

**Radiciação: raízes enésimas de números complexos**[18]

Dado um número complexo z e um número natural n, n > 1, definimos em C, a raiz enésima de z como sendo um número complexo w, tal que, $w^n = z$. Consideremos o número complexo $z \neq 0$ tal que $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$. Encontrar as raízes enésimas de $z$ significa determinar todos os números complexos distintos do tipo: $w = |w|(cos\alpha + isen\alpha)$, de modo que, $w^n = z$, para n > 1, ou seja, procurar números $w$ tal que : $(|w|(cos\alpha + isen\alpha))^n =$ $|z|(cos\theta + isen\theta)$.

Aplicando a primeira fórmula De Moivre, temos: $|w|^n(cosn\alpha + isen\alpha) =$ $|z|(cos\theta + isen\theta)$. Da igualdade: $w^n = |w|^n(cosn\alpha + isen\alpha) = z = |z|(cos\theta + isen\theta)$. Vem $|w|^n = |z|$, $cosn\alpha = cos\theta\ e\ sen\alpha = sen\theta$. De $|w|^n = |z|$, temos $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (sempre

[17] Ver parte vi do apêndice.
[18] Ver parte vii do apêndice.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

real e positivo). De, $cosn\alpha = \ cos\theta$ e $sen\alpha = sen\theta$, temos: $n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta+2k\pi}{n}$ (com $k\epsilon z$). Mas, para que $0 \leq \alpha < 2\pi$, é necessário que $0 \leq k \leq n-1$.

Assim, concluímos que: $w_k = \sqrt[n]{|z|}\ (cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + isen\frac{\theta+2k\pi}{n})$ (segunda fórmula de De Moivre) para $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. Após $k = n-1$, os valores começam a se repetir. Então, de $zero\ a\ n-1$,temos n raízes distintas. Observemos que essa fórmula também pode ser escrita assim: $w_k = \sqrt[n]{|z|}\ (cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right))$. Assim, qualquer número complexo z, não nulo, admite n raízes enésimas distintas. Mostramos no apêndice que as raízes enésimas de um número complexo determinam um polígono regula, com centro na origem e ainda que soma das raízes é nula. Essa é uma propriedade válida para todas as raízes enésimas de um dado número complexo.

**Conclusão**

A história dos números complexos revela uma forte articulação entre álgebra e geometria. Assim, é salutar incluir todos esses aspectos em seu ensino-aprendizagem, pois justifica a importância de seu ensino, sua importância científica como, aplicações em outras áreas do conhecimento, o que esclarece os motivos de sua permanência no ensino atual.

A contribuição deste trabalho está na articulação entre álgebra e geometria, evidenciado pelo movimento lógico e histórico deste assunto com o intuito de que o aluno possa notar a essência do conteúdo, fato relevante, para que transite de forma adequada nos contextos da Matemática, permitindo-o alcançar o núcleo do objeto estudado, como está previsto na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov (1988).

O *software* Geogebra é fundamental para visualizar as propriedades de forma dinâmica explorando diversos casos, possibilitando, inclusive, formular conjecturas, através da experimentação que este permite. A articulação entre álgebra e geometria é concretizada e contemplada nas janelas gráfica e algébrica, na mesma tela, onde o aluno pode relacionar as operações. Ainda ressaltamos a possibilidade de por os objetos em movimento neste *software*, podendo observá-los em diferentes possibilidades, permitindo o amadurecimento matemático pela interatividade.

Finalizamos sugerindo que outros assuntos sejam tratados por essa via, pois acreditamos que pode potencializar o ensino-aprendizagem da Matemática, fato importante para o desenvolvimento científico e tecnológico de nosso país.

**Referências bibliográficas**


Dante, L. R. (2010). *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Ática.

Davídov, V.V. (1988). *La enseñanza escolar y eldesarrollo psíquico: investigación teórica y experimental*. Tradução: Marta Shuare. Moscú: Progreso.

Eves, H.(2011) *Introdução à história da matemática* (5a ed.); tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp.

Souza, J. R. (2013). *Novo olhar Matemática* (2a ed.). Edição-São Paulo: FTD.

Vaz, D. A. F. e Jesus, E. A. (2013). Investigação Matemática com o Geogebra: Um Exemplo com Matrizes e Determinantes. *Boletim GEPEM (Online), 62*, 165-170.


**Apêndices**

**Parte I. Os cálculos de Cardano.**

Os matemáticos daquela época perceberam inicialmente que toda cúbica completa poderia ser reduzida a uma cúbica sem o termo quadrático, substituindo a variável original por $y-\frac{a}{3}$, $x^3+ax^2+bx+c=0$, obtemos $y^3+\left(\frac{-a^2}{3}+b\right)y-\left(\frac{-2a^3}{27}+\frac{ab}{3}-c\right)=0$, chamando de $p$ e $q$ os termos entre paréntesis obtemos: $y^3+py-q=0$, ou seja, $y^3+py=q$. A solução de Cardano para $y^3+py=q$ é baseada no seguinte argumento. Primeiramente, vamos observar a identidade cúbica:

$$(A-B)^3=A^3-3A^2\mathrm{B}+3AB^2-B^3$$

$$(A-B)^3=-3\mathrm{AB}(\mathrm{A}-\mathrm{B})+(A^3-B^3)$$

$$(A-B)^3+3\mathrm{AB}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=(A^3-B^3)$$

$$A-B=y\rightarrow\begin{cases}y^3+3ABy=A^3-B^3\\ \quad y^3+py=q\end{cases}$$



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Comparando as duas equações temos: $\begin{cases} 3AB = p \Rightarrow B = \frac{p}{3A} \\ A^3 - B^3 = q \end{cases}$, e resolvendo em A e B,

obtemos: $y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

## Parte II. Representação geométrica. Soma e subtração de números complexos.

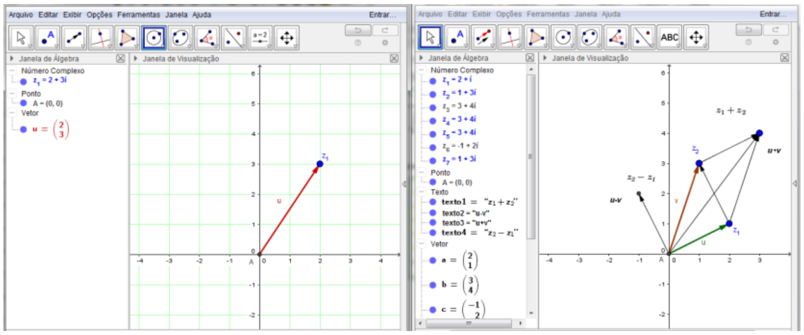

**Figura 1. Representação geométrica de um número complexo. Soma e subtração de números complexos, utilizando a mesma ideia de vetor. A soma é a diagonal principal e a diferença é a diagona secundária.**

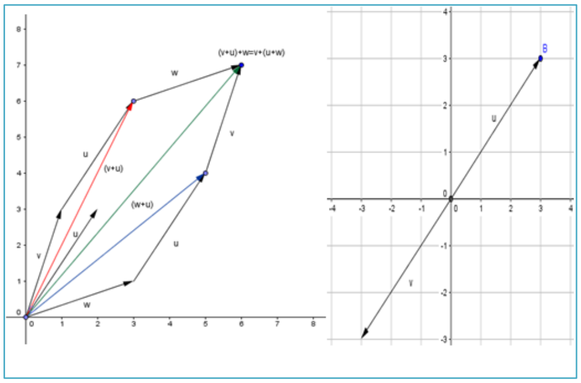


**Figura 2. Representação da propriedade associativa da adição e do elemento oposto de números complexos.**

## Parte III. Multiplicação de números complexos.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

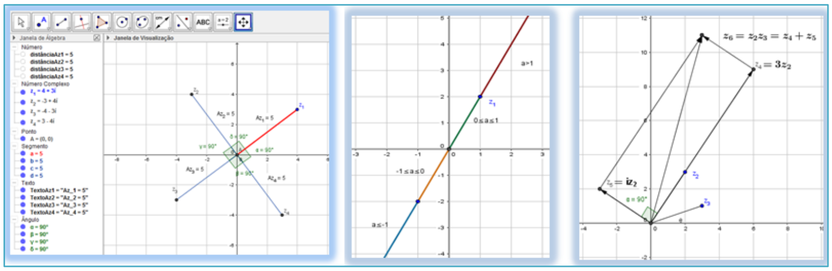


**Figura 3. Possíveis potências inteiras da unidade imaginária i. Multiplicação de um número complexo por um real puro. Produto de dois números complexos.**

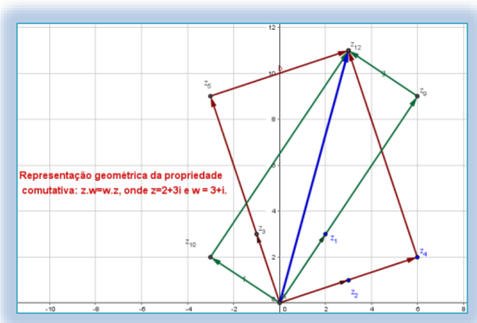


**Figura 4. Representação da propriedade comutativa. Redução a dois paralelogramos de mesma diagonal.**

## Parte IV. Forma polar ou trigonométrica dos números complexos.

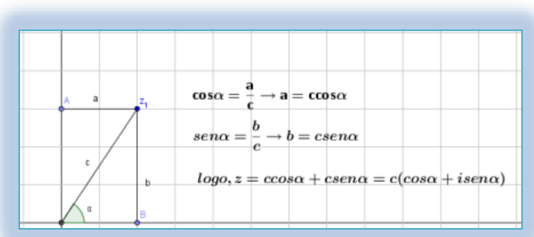


**Figura 5. Dedução da forma polar ou trigonométrica.**



ISBN 978-84-945722-3-4

## Parte V. Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica.

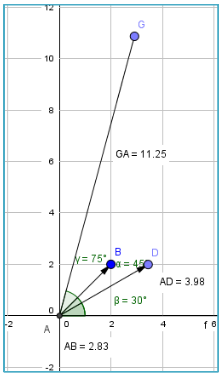


**Figura 6. Multiplicação na forma polar. Multiplicamos os módulos e somamos os argumentos.**

## Parte VI. Potenciação de números complexos na forma trigonométrica.

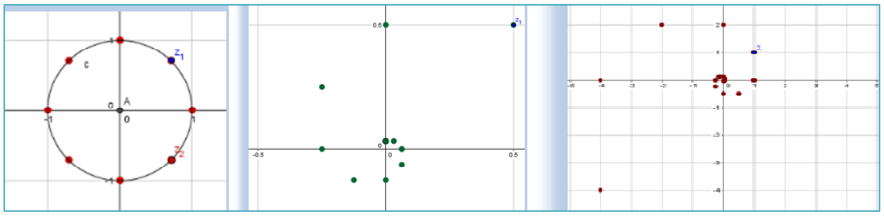

**Figura 7. Potência de um número complexo de módulo um. Potências de um número complexo de módulo menor que um. Potências de um número complexo de módulo maior que um.**

## Parte VII. Radiciação: raízes enésimas de números complexos.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

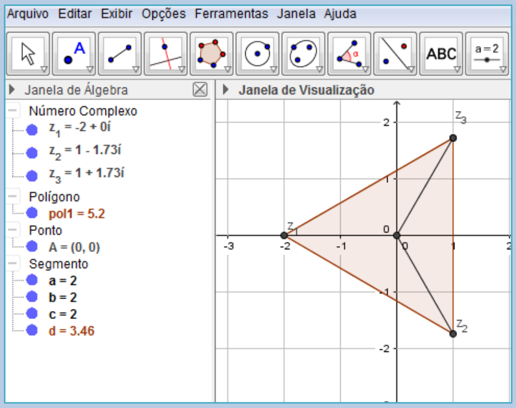


**Figura 8. As raízes de um número complexo são os vértices de um polígono regular.**



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4