EXPLORANDO AS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS CURVAS PLANAS PARAMETRIZADAS UTILIZANDO O GEOGEBRA

André Lúcio Grande
andreluciogrande@gmail.com
Faculdade de Tecnologia de Mauá (Fatec-Mauá) - Brasil

Núcleo Temático: V. Recursos para o ensino e aprendizagem das matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: Formação e atualização docente
Palavras chave: Curvas Planas Parametrizadas, GeoGebra, Propriedades Geométricas, Intuição e Rigor.

Resumo

Esta oficina objetiva realizar um estudo das curvas planas parametrizadas utilizando o software GeoGebra, com o intuito de explorar quais são suas propriedades locais e globais bem como seus invariantes geométricos. Para a investigação de tais propriedades, foram elaboradas algumas questões sobre as concepções, classificação e características das curvas planas, que serão discutidas pelos participantes e respondidas em protocolos fornecidos durante a oficina, além da construção de algumas curvas utilizando o software GeoGebra, que permite manipular de maneira dinâmica e interativa as diversas representações dos objetos matemáticos. Como fundamentação teórica, serão utilizados alguns princípios e ideias ligadas ao uso e a importância da intuição e do rigor na construção do conhecimento matemático segundo Henri Poincaré (1854 – 1912), que defendia a intuição como uma ideia ou interpretação antecipada daquilo que se está procurando, constituindo-se de um sentimento que possibilita gerar hipóteses na constituição do conhecimento científico. Destacamos que o uso do GeoGebra permite explorar tanto propriedades locais quanto globais das curvas planas parametrizadas, auxiliando em grande medida na elaboração de conjecturas a respeito das propriedades do objeto matemático em questão e que durante a oficina serão formalizadas pelos participantes.

1. Propriedades Geométricas das Curvas Planas

O estudo das curvas planas parametrizadas possibilita explorar uma variedade de conceitos matemáticos, tais como: equações cartesianas e paramétricas, diferenciabilidade e continuidade de uma função, propriedades geométricas e topológicas de uma curva, dentre outros. Além disso, num curso de Cálculo Diferencial e Integral os professores podem em grande medida articular e relacionar de maneira interdisciplinar diversos componentes curriculares como Geometria Analítica, Álgebra Linear e Física.

ISBN 978-84-945722-3-4

Esse estudo abarca ainda a discussão sobre as diversas concepções de uma curva plana, sua classificação, representações (geométrica, algébrica, numérica), propriedades locais e globais, invariantes geométricos e topológicos, além da questão do uso de equações paramétricas.

Carmo (2012) considera que as propriedades locais de uma curva ou superfície são aquelas que não pertencem à forma do objeto geométrico em questão como um todo, mas somente pertencem às vizinhanças de um ponto desse objeto. Temos, por exemplo, a curvatura de uma curva como propriedade local das curvas e superfícies. A curvatura mede, intuitivamente, o quanto a curva se "dobra" no plano e se constitui o único invariante geométrico das mesmas, a menos sua posição no plano, de acordo com o Teorema Fundamental das Curvas Planas. Outra propriedade local das curvas diz respeito à mesma ser regular, ou seja, se em cada ponto da curva existe um vetor tangente bem definido.

Já as propriedades globais consideram o objeto geométrico na sua totalidade como, por exemplo, a dimensão de uma curva ou o fato da mesma ser aberta ou fechada. No caso das curvas fechadas, elas podem ser simples (sem auto intersecção) ou não simples (com auto intersecção).

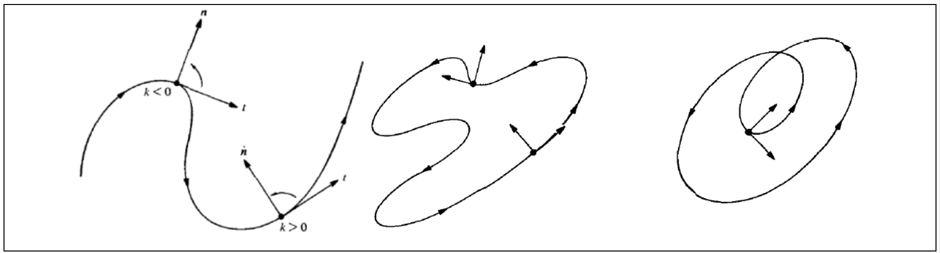

Figura 1 – Propriedades locais e globais das curvas
Fonte: Carmo, 2012 – pp. 25 e 36

Por seu turno, a exploração das propriedades geométricas das curvas planas, quer sejam locais ou globais, nos permitem evocar alguns aspectos ligados ao raciocínio intuitivo e visual, no sentido de se elaborar conjecturas, hipóteses, que serão posteriormente formalizadas ou refutadas, objetivando a construção do objeto matemático, o que se constitui uma prática extremamente pertinente e interessante no processo de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, esta oficina tem por objetivo realizar um estudo das curvas planas parametrizadas procurado investigar quais são suas propriedades geométricas explorando o

ISBN 978-84-945722-3-4

raciocínio intuitivo e visual. Utilizaremos o software GeoGebra como recurso computacional auxiliar de maneira dinâmica na construção e elaboração de conjecturas e hipóteses. Para o desenvolvimento dessa oficina, descreveremos a seguir o referencial teórico que será utilizado e a metodologia empregada.

2. Fundamentação Teórica

Com relação ao papel do raciocínio intuitivo, o matemático e filosofo Henri Poincaré (1854 – 1912) apresentou em suas principais obras como O Valor da Ciência (1995) alguns temas que discutem o papel da intuição, da lógica e da hipótese na construção do conhecimento científico.

No tocante às características do raciocínio intuitivo, Poincaré (1995) destaca a intuição sensível ou geométrica, com o apelo aos sentidos e à imaginação e o uso de representações geométricas. Essa intuição, segundo o autor, não pode nos dar a certeza, entretanto ela possui a propriedade de instrumento da invenção do conhecimento matemático.

Entretanto, para o autor a intuição não se baseia apenas na imagem geométrica, mas também física. A analogia física, segundo Poincaré (1995), permite obter a solução que um matemático não poderia estabelecer pelo raciocínio dedutivo. Essa intuição portanto não pressente a solução, mas nos sugere o raciocínio necessário para encontrar uma solução.

Para que as conjecturas acerca do objeto de estudo sejam elaboradas, pode-se dispor do uso de um recurso didático auxiliar, como o uso do software GeoGebra, que possibilita, "concretizar" os objetos matemáticos em seu estudo, além da interatividade que suscita a exploração do raciocínio intuitivo.

3. Metodologia e Procedimentos Metodológicos

A oficina está dividido em duas sessões. Na primeira sessão, serão discutidas duas questões sobre as concepções e propriedades geométricas das curvas planas parametrizadas. Na segunda sessão, será proposta uma atividade referente ao estudo dessas propriedades utilizando o GeoGebra.

Para a primeira sessão, as questões respondidas pelos participantes serão norteadoras da exploração das propriedades geométricas das curvas planas nesta presente oficina.

ISBN 978-84-945722-3-4

Inicialmente, os participantes receberão o Protocolo 1 contendo duas questões que serão respondidas no início da sessão. Após as questões serem respondidas, será proposta a construção de uma curva denominada astróide utilizando o software GeoGebra, procurando-se formalizar alguns conceitos que foram intuídos e conjecturados durante a atividade.

No Protocolo 1, entregue aos participantes, a Questão 1 consiste em procurar definir uma curva plana. Podemos considerar as múltiplas concepções sobre esse objeto matemático e suas diversas abordagens, tais como:

- Geométrica: conjunto de pontos do plano ou um subconjunto do $\mathbb{R}^2$;
- Algébrica: aplicação de um intervalo aberto *I* contido em $\mathbb{R}$;
- Física: movimento contínuo de um ponto;
- Topológica: deformação contínua de um intervalo aberto *I* em $\mathbb{R}$.

Nessas concepções percebemos alguns aspectos ligados ao raciocínio intuitivo como, por exemplo, a analogia física da interpretação de uma curva com um movimento contínuo de um ponto, ou a intuição geométrica, como a deformação de um intervalo da reta. Essas analogias com objetos físicos ou representações geométricas se constituem como sendo uma intuição sensível tal como defendia Poincaré (1995).

A seguir, os participantes serão indagados na Questão 2 sobre quais as vantagens ou desvantagens e a importância da utilização de um parâmetro no estudo das curvas planas.

Para discutirmos essa questão, devemos lembrar que ao utilizarmos a representação de uma curva pela equação cartesiana $y = f(x)$ há uma restrição de que a curva só pode ser interceptada por qualquer reta paralela ao eixo das ordenadas em apenas um ponto.

A forma implícita $f(x, y) = 0$ envolvendo uma função de duas variáveis para a representação algébrica pode ser utilizada, mas para encontrarmos um ponto pertencente a curva devemos, por exemplo, substituir o valor numérico de x e encontrar o valor de y resolvendo a equação.

Destacamos a representação algébrica das curvas planas com o uso de um parâmetro como uma variável auxiliar. Sendo assim, uma curva plana parametrizável pode ser representada por duas funções de um parâmetro *t*, como por exemplo as expressões $x(t)$ e $y(t)$. Essa representação apresenta uma vantagem de que as coordenadas de um ponto da curva são dadas em função apenas de uma variável, auxiliando na descrição de curvas mais complexas.

ISBN 978-84-945722-3-4

As equações paramétricas de uma curva nos fornecem uma ideia intuitiva de que os pontos *t* pertencentes a um intervalo $I \in \mathbb{R}$ são transformados em pontos numa curva, sendo que o parâmetro *t* serve para distinguir os diferentes pontos de da curva.

4. Abordagens ou tratamentos de um objeto matemático com o GeoGebra

O estudo das curvas planas de maneira interativa e dinâmica utilizando o GeoGebra se constitui um exemplo de uma proposta de ensino e aprendizagem em que um objeto matemático pode ser abordado sob diferentes enfoques ou tratamentos.

O tratamento físico dado às curvas planas possibilita "visualizar" de maneira dinâmica, por meio de analogias físicas, uma curva como sendo o movimento contínuo de um ponto no plano. Essa intuição física não permite de maneira formal descrever o equacionar a curva, mas suscita a elaboração de conjecturas e hipóteses acerca do objeto de estudo.

Uma abordagem geométrica das curvas planas apresenta como principal característica explorar e relacionar algumas propriedades geométricas das mesmas, tais como sua curvatura.

Após esse levantamento, o estudo pode apresentar um viés algébrico ou analítico, em que ao se utilizar um sistema de coordenadas cartesianas, suas propriedades geométricas são formalizadas de modo algébrico no sentido de se obter as equações paramétricas da curva plana.

Como exemplo das várias representações ou tratamentos, mostraremos as etapas da construção da curva plana parametrizada denominada astróide, que será abordada na segunda parte dessa oficina.

5. Explorando as propriedades geométricas das curvas planas

No Protocolo 1, entregue aos participantes, a Questão 3 apresenta o seguinte enunciado:

03. Seja λ a circunferência de centro *O* e raio 1. Para todo ponto *A* de λ, associamos suas projeções ortogonais *P* e *Q* sobre os eixos O_x e O_y, respectivamente, e vamos designar por *M* a projeção ortogonal de *A* sobre a reta *PQ*. Determine o lugar geométrico *L* de *M*.

Esta construção será realizada no software GeoGebra, que permite de maneira interativa e dinâmica manipular os objetos matemáticos utilizando-se de suas diversas representações,

ISBN 978-84-945722-3-4

tais como a geométrica, algébrica e numérica. Essa curva também pode ser obtida, de maneira dinâmica, por um dado ponto *P* de uma circunferência que rola, sem escorregar, interiormente sobre outra circunferência, de raio igual ao quádruplo do da interior. No caso da questão 3, de acordo com os dados fornecidos, teremos a seguinte representação geométrica:

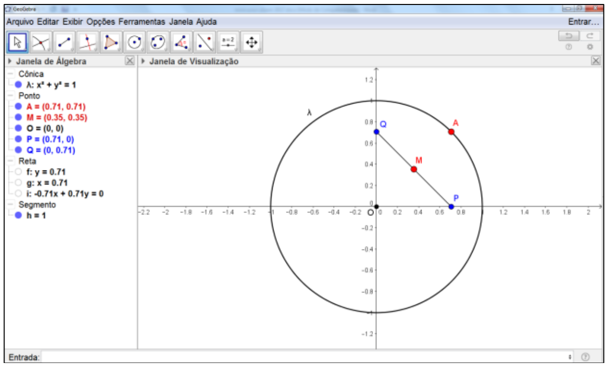

Figura 2 – Questão 3 – Representação Geométrica
Fonte: Autor, 2016

Movimentando-se o ponto A no GeoGebra ao longo da circunferência λ observamos a trajetória descrita por M, conforme a figura a seguir:

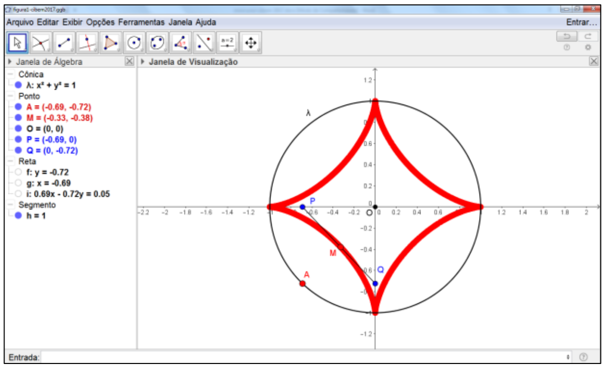

Figura 3 – Trajetória descrita pelo ponto M
Fonte: Autor, 2016

Essa curva, denominada astróide, possui algumas propriedades geométricas que podem ser conjecturadas, tais como: a reta que passa pelos pontos P e Q é tangente à curva no ponto M; os pontos em que a curva não é regular estão localizados nas coordenadas (1, 0), (0, 1), (-1,

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

0) e (0, -1). Sua curvatura é sempre negativa, adotando o sentido anti-horário de percurso do ponto A e podemos classificá-la como uma curva fechada, simples, periódica, apresentando simetria em relação ao eixos Ox e Oy. Para um tratamento algébrico da curva em questão, no sentido de formalizar as hipóteses e conjecturas, sendo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ uma curva parametrizada pelo parâmetro *t* e *x(t) e y(t)* suas equações paramétricas, teremos:

- Condição de alinhamento dos pontos P, Q e M (figura 3), com $P = (cost, 0)$, $Q = (0, sent)$ e $A = (cost, sent)$: $\det(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ}) = 0$ (I)

- Ortogonalidade dos vetores $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{PQ}$: $\overrightarrow{AM}.\ \overrightarrow{PQ} = 0$ (II)

Resolvendo I e II, podemos representar as equações paramétricas da astróide da seguinte maneira:

$$\alpha(t) = \begin{cases} x(t) = cos^3 t \\ y(t) = sen^3 t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

No GeoGebra, ao criarmos o parâmetro $t \in [0, 2\pi]$ e as equações paramétricas $x(t) = cos^3 t$ e $y(t) = sen^3 t$, podemos definir a curva parametrizada $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ e o ponto $M \in \alpha(t)$ conforme a figura a seguir:

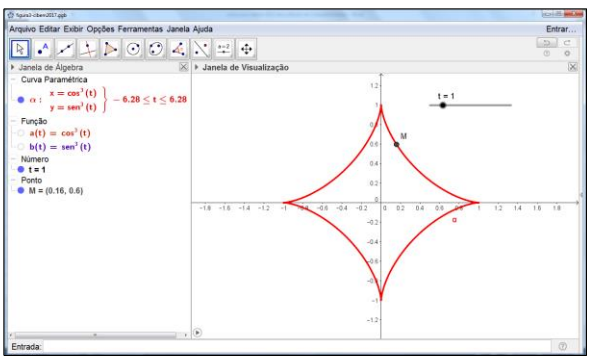

Figura 4 – Curva astróide
Fonte: Autor, 2016

A curvatura *k* da astróide pode ser estudada utilizando os recursos do GeoGebra de maneira dinâmica observando sua variação em relação ao parâmetro *t* pelo gráfico descrito pela ponto $C = (t, k)$:

ISBN 978-84-945722-3-4

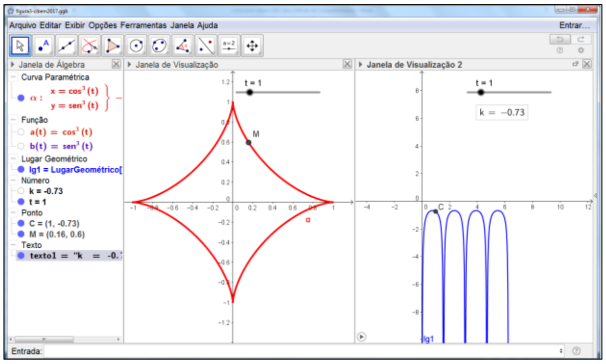

Figura 5 – Curvatura da astróide
Fonte: Autor, 2016

Destacamos que podemos obter as equações paramétricas da astróide utilizando outras técnicas algébricas e conceitos envolvidos, preferimos nessa oficina privilegiar o tratamento vetorial. Além disso, a por meio de suas equações paramétricas podemos obter sua equação implícita da forma: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Com isso, todas as propriedades geométricas da astróide conjecturadas no GeoGebra podem ser formalizadas por meio de suas equações paramétricas

6. Considerações Finais

Gostaríamos de destacar, de acordo com a nossa proposta, que o estudo das curvas planas parametrizadas com o auxílio do GeoGebra propiciou uma série de situações didáticas que podem ser exploradas pelos professores em sala de aula, permitindo aos estudantes de maneira dinâmica interagir com o objeto de estudo.

O GeoGebra permite ainda explorar tanto propriedades locais das curvas planas parametrizadas, como curvatura, se a mesma é regular, simetrias, utilização do parâmetro, auxiliando em grande medida na elaboração de conjecturas a respeito das propriedades do objeto matemático em questão e que durante a oficina serão formalizadas pelos participantes.

Além disso, podemos inferir que na construção do conhecimento matemático podemos envolver diversas abordagens ou tratamentos e suas inter-relações, como a algébrica, geométrica e analítica, além do uso da língua natural e analogias físicas.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referências

Carmo, M. P. do (2012). *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* 5. Ed. Rio de Janeiro: SBM.

Courant, R. John, F. (2001). *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*. Vol. I México: Limusa, 2001.

Grande, A. L. (2013). Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

Poincaré, H. (1995). *O valor da ciência*. Tradução de Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto.

Terracher, P-H. et all. (1992). *Math: Algèbre e Géométrie. Terminales C et E*. Paris: Hachette.

ISBN 978-84-945722-3-4