http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1561
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Significados del signo de igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores

Meanings of the equal sign and aspects of its teaching. A study carried out with students of the first form of Secondary School and their teachers

Federico Burgell
Consejo de Formación en Educación
federico.burgell@gmail.com

Cristina Ochoviet
Consejo de Formación en Educación
cristinaochoviet@gmail.com

RESUMEN • En este artículo presentamos resultados de un estudio que indaga en los significados que le atribuyen al signo de igual estudiantes que están cursando el primer año de enseñanza secundaria en un liceo de Montevideo (12-13 años) y en aspectos de su enseñanza. Los resultados muestran que una parte importante de los alumnos interpreta el signo de igual como el indicador del resultado de una operación y no como el indicador de una relación de equivalencia, interpretación que resulta imprescindible para el abordaje del álgebra en el nivel secundario. Además, detectamos que los profesores no le brindan al tema una atención especial.

PALABRAS CLAVE: igualdad matemática; signo de igual; pre álgebra; álgebra; enseñanza secundaria.

ABSTRACT • In this paper we are presenting some results of a study that inquires about the meanings assigned to the equal sign by students of the first form of Secondary School in Montevideo (12-13 years old) and some aspects of its teaching. The results show that a significant number of the students interpret the equal sign as the indicator of the result of an operation and not as an indicator of an equivalence relation that is essential for addressing algebra at the secondary level. In addition, it was detected that mathematics teachers do not give special attention to this issue.

KEYWORDS: mathematical equality; equal sign; pre-algebra; algebra; secondary school.

Recepción: septiembre 2014 • Aceptación: enero 2015 • Publicación: julio 2015

Burgell, F., Ochoviet, C. (2015) Significados del signo de igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, xx, pp. xx-xx

INTRODUCCIÓN

Varios autores señalan que una adecuada comprensión del signo de igual y de la igualdad matemática constituye un requisito imprescindible para el aprendizaje del álgebra (Kieran, 1992; MacGregor y Stacey, 1997 y 1999; Knuth, Stephens, Mc-Neil y Alibali, 2006 y 2008). Destacan que para comprender adecuadamente el signo de igual se requiere poder interpretarlo de forma *relacional*, como el indicador de una relación de equivalencia, y no exclusivamente de forma *operacional*, como el indicador del resultado de una operación o como una señal de hacer algo.

Los resultados de investigación que presentamos refieren a los siguientes dos objetivos: explorar los diferentes significados del signo de igual en un contexto numérico, construidos por estudiantes que estaban terminando de cursar el primer año del Ciclo Básico de Enseñanza Secundaria en un liceo de Montevideo, e indagar cuáles fueron las oportunidades brindadas por los profesores para lograr la construcción de los diferentes significados. Resulta de interés investigar esta temática en este nivel de escolaridad ya que al año siguiente, tal como lo establece el currículo vigente, se comienza a trabajar con ecuaciones, con expresiones algebraicas y con funciones. Este estudio se ubica entonces en el período inmediatamente anterior a esta entrada al álgebra. Reportamos entonces los significados que los estudiantes de un liceo de Montevideo atribuyen al signo de igual y el enfoque de la enseñanza adoptado por sus docentes. Presentamos también una ampliación a una de las perspectivas teóricas utilizadas que surgió en el propio estudio y un uso del signo de igual por parte de un docente, no reportado en la literatura revisada. Finalmente realizamos recomendaciones para la enseñanza.

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Kieran (1992) y MacGregor y Stacey (1997 y 1999) destacan que la falta de comprensión del signo de igual como un símbolo de equivalencia es uno de los obstáculos que tienen los alumnos en su aprendizaje del álgebra. Estos trabajos recomiendan presentar a las igualdades en una variedad de formas, por ejemplo, con operaciones a ambos lados del signo de igual.

Knuth *et al.* (2006 y 2008) señalan que los alumnos que tienen una comprensión relacional del signo de igual tienen mejores resultados en la resolución de ecuaciones algebraicas que los que no la tienen. En particular, encuentran que aquellos alumnos que interpretan adecuadamente el signo de igual se desempeñan mejor en el trabajo con ecuaciones equivalentes. Sugieren a los docentes prestar atención explícita a la comprensión de la igualdad, y que esta se desarrolle no solo a lo largo de toda la escuela primaria sino que continúe en la secundaria.

Behr, Erlwanger y Nichols (1976) y Kieran (1981) encuentran que el signo de igual es mayoritariamente interpretado por los alumnos de la escuela primaria y secundaria como un operador y no como un símbolo que expresa una relación de equivalencia.

Essien y Setati (2006) destacan que el significado de la tecla «=» en las calculadoras y el uso del término en el lenguaje verbal refuerzan la visión del signo de igual como un operador, y con un sentido unidireccional de izquierda a derecha.

McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur y Krill (2006), Molina, Castro y Ambrose (2006) y Okusz (2007) destacan la importancia del contexto en el que es presentado el signo de igual para favorecer u obstaculizar la interpretación relacional de este. Reportan que mayoritariamente el signo aparece en un contexto «estándar» de «operaciones-igual-respuesta» (por ejemplo, 3+4=7), rara vez aparece en contextos «no estándar» con «operaciones a ambos lados» (por ejemplo, 3+4=5+2), y algunas veces aparece en otros contextos «no estándar» (por ejemplo, 7=7). Señalan además que las interpretaciones que hacen los alumnos del signo de igual dependen del contexto en el que este aparece.

Kouropatov y Tirosh (2011) destacan la necesidad de introducir la visión relacional del signo de igual conjuntamente con la operacional desde la etapa preescolar. Apoyan la utilización de secuencias de enseñanza que intenten presentar la igualdad y el signo de igual, desde las primeras etapas de la enseñanza, como el indicador de una relación y no solo como un operador.

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Hemos tomado las clasificaciones sobre los distintos significados del signo de igual de Molina (2006) y de Molina, Castro y Castro (2009), y la determinación de los distintos contextos en los que se utiliza el signo de igual de McNeil *et al.* (2006).

Molina (2006) y Molina *et al.* (2009) detallan once significados distintos del signo de igual, entre los que se puede distinguir aquellos que tienen un significado que es reconocido y utilizado por la comunidad matemática, los que son propios de la matemática escolar y los que surgen del uso y de las interpretaciones que le dan los alumnos, que pueden ser matemáticamente correctos o no. A continuación presentamos los significados con los ejemplos que proponen los autores:

1. *Propuesta de actividad*. Refiere al uso del signo en expresiones incompletas, con una cadena de números o símbolos vinculados por símbolos operacionales a la izquierda del signo de igual y un espacio vacío a la derecha de este.
   Ejemplos: $16 : 3 =$; $x(x+1)-3x(x+5)=$.
2. *Operador (u operacional)*. Refiere al uso del signo como un símbolo que separa una cadena o secuencia de operaciones, que se sitúan a la izquierda, y su resultado, que se dispone a la derecha.
   Ejemplos: $4\times 5 = 20$; $x(x-2)+3x^2 = 4x^2 - 2x$.

   Si bien Molina *et al.* proponen un ejemplo algebraico en donde a la derecha del signo de igual hay más de un término, en el contexto de la aritmética esto no ocurre, la «respuesta» es un único número escrito a la derecha del signo de igual.
3. *Expresión de una acción*. Este es un significado bidireccional del signo, que extiende el significado de *operador* recién reseñado. Aquí la cadena o secuencia de operaciones va indistintamente a la izquierda o a la derecha, y el resultado, en el otro miembro.
   Ejemplos: $2x = x(x-2)-x^2+4x$; $24 = 12+12$; $12+12 = 24$.
4. *Separador*. Este uso, matemáticamente incorrecto, se lo dan algunos alumnos al utilizarlo en contextos algebraicos como separador de los pasos realizados en la resolución de una actividad.
   Ejemplo: $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x} = x^2+1 = x = x^2-x+1 = 0$.
   En el ejemplo los signos de igual que cumplen este papel son el segundo y el cuarto de izquierda a derecha.
5. *Expresión de una equivalencia*. Refiere al uso del signo para relacionar dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático.
   - 5.*a)* *Equivalencia numérica*. Indica el mismo valor numérico en las expresiones aritméticas que se encuentran en ambos miembros.
     Ejemplos: $4+5 = 3+6$; $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$.
   - *5.b) Equivalencia simbólica. Indica el mismo valor numérico de dos expresiones algebraicas para todos los valores de las variables.*
     Ejemplos: $x^2+2x = x(x+2)$; $a+b = b+a$.

5.c) *Identidad estricta*. Aquí las expresiones a ambos lados representan el mismo objeto matemático con el mismo representante.
Ejemplos: $3 = 3$; $x = x$; $x + 5 = x + 5$.

5.*d*) *Equivalencia por definición o por notación*. Indica la equivalencia de dos expresiones numéricas o algebraicas por definición o por el significado de la notación utilizada.
Ejemplos: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}; 100cm = 1m$.

6) *Expresión de una equivalencia condicional (ecuación)*. Se encuentra en el contexto del álgebra cuando la equivalencia expresada por el signo de igual solo es cierta para algún o algunos valores de la o las variables, pudiendo inclusive no ser cierta para ningún valor. Ejemplo: $x^2 + 4x = 5x - 6$.

7) *Definición de un objeto matemático*. Se utiliza para definir o asignar un nombre a una función u otro objeto matemático.
Ejemplos: $a^0 = 1$; $f(x) = 2x + 3$.

8) *Expresión de una relación funcional o de dependencia*. Refiere al uso para indicar una relación o dependencia entre variables o parámetros.
Ejemplos: $y = 3x + 2$; $l = 2\pi r$.

9) *Indicador de cierta conexión o correspondencia*. Significado impreciso que se refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, como por ejemplo entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y no matemáticas.
Ejemplo: 🚲 🚲 🚲=3.

10) *Aproximación*. Este significado corresponde al uso del signo para relacionar una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico.
Ejemplo: $\frac{1}{3} = 0,33$.

11) *Asignación de un valor numérico*. El signo asigna un valor numérico a un símbolo.
Ejemplo: si $x = 4$, ¿cuál es el valor de $x^2 - 5$?

Por su parte McNeil *et al.* (2006) definen distintos contextos en los cuales se utiliza el signo de igual. En una primera clasificación dividen los contextos en dos: *a*) el contexto *estándar*, de *operaciones-igual-respuesta* (ejemplo: $3 + 4 = 7$; $2x + 5 = 7$), y *b*) el contexto *no estándar*, que incluye a todos los demás casos. El contexto *no estándar* es a su vez subdividido en cuatro: *i*) el contexto de *operaciones a ambos lados* (ejemplo: $5 + 2 = 3 + 4$; $3x + 6 = 2x$); *ii*) el contexto de *operaciones del lado derecho* (ejemplo: $7 = 3 + 4$; $y = 2x$); *iii*) el contexto *sin operaciones explícitas* (por ejemplo: $7 = 7; a = 5; 100\ cm = 1\ m$), y *iv*) otros contextos. Tenemos entonces cinco contextos distintos. Esta clasificación de McNeil et al. es complementaria de la anterior, ya que refieren a aspectos distintos acerca del uso y el significado que se le está dando al signo de igual. Podemos ver que un mismo significado del signo de igual puede presentarse en distintos contextos, y que distintos significados del signo de igual se pueden presentar en un mismo contexto.[1]

Hay por último varios autores (entre otros, Behr *et al.*, 1976; Kieran, 1981; Knuth *et al.*, 2006) que distinguen únicamente dos categorías: la visión *operacional* y *relacional* del signo de igual. La visión *operacional* implica considerar el signo de igual como un *operador* o como una *señal de hacer algo*, y se

1. Por ejemplo, el significado *expresión de una equivalencia condicional (ecuación)* puede presentarse en distintos contextos: *operaciones-igual-respuesta*, *operaciones a ambos lados*, *operaciones del lado derecho* o *sin operaciones explícitas*.

contrapone con la visión *relacional*, que implica ver el signo de igual como el indicador de una relación de equivalencia.

MÉTODO

Para alcanzar los objetivos planteados realizamos un estudio de casos con 36 alumnos pertenecientes a tres clases de primer año de un liceo de la enseñanza pública de Montevideo, cuyas edades variaron entre los 12 y los 16 años.[2] Realizamos el estudio en un liceo que contaba con seis primeros, cuatro en el turno de la mañana y dos en el turno de la tarde. Nosotros trabajamos con las dos clases de la tarde y una de las cuatro clases de la mañana. Estas clases estaban a cargo de las dos profesoras que aceptaron participar de este estudio: María (a cargo de Primero A y Primero B) y Marcela (a cargo de Primero C). A los alumnos de estas clases les propusimos un cuestionario con siete preguntas (Anexo), varias de ellas divididas en partes, procurando presentar una variedad de propuestas que nos permitiera abordar el problema desde distintos ángulos. Previo a la aplicación de este cuestionario en las clases participantes, propusimos un cuestionario piloto a una clase de alumnos del mismo nivel y similar contexto, para evaluar el diseño de este y corregir y mejorar aquellos aspectos que así lo requirieran. Algunas de las preguntas que utilizamos en el cuestionario fueron extraídas de otros trabajos de investigación (Essien y Setati, 2006; Falkner, Levi y Carpenter, 1999; Knuth *et al.*, 2008), con modificaciones o en su versión original, y el resto fueron creadas por nosotros.[3] Buscamos que en todas las preguntas la operatoria exigida para su realización fuera sencilla ya que nuestro interés no era observar el desempeño de los alumnos realizando cálculos aritméticos, sino indagar en sus interpretaciones del signo de igual; por esta razón también trabajamos exclusivamente con números naturales. La aplicación del cuestionario se realizó en horario de clase y contó en cada caso con la presencia de la profesora a cargo de la clase (María o Marcela), tuvo una duración de 45 minutos y la realizaron todos los alumnos que concurrieron a clase ese día. Tras analizar de forma preliminar las respuestas al cuestionario seleccionamos a 13 alumnos para realizarles entrevistas individuales que fueron audiograbadas; estos alumnos fueron escogidos atendiendo a que algunas de sus respuestas en el cuestionario nos resultaban, por diversos aspectos, tan interesantes como para profundizar en ellas. También analizamos el enfoque de enseñanza utilizado por las docentes y las actividades de aprendizaje que propusieron a los alumnos, para esto realizamos entrevistas individuales a las docentes, consultamos la *libreta del profesor* de cada clase, que es el documento oficial en el cual el profesor registra, entre otras cosas, el programa del curso y los temas tratados cada día, y analizamos el contenido de dos cuadernos de clase pertenecientes a dos alumnas. En Uruguay es habitual que el alumno registre en su cuaderno todo lo que el docente escribe en el pizarrón, y es también allí en donde se realizan las actividades de clase y las tareas domiciliarias.

LA VISIÓN OPERACIONAL Y LA RELACIONAL DEL SIGNO DE IGUAL

En un primer abordaje de las respuestas al cuestionario discriminamos las visiones operacional y relacional del signo de igual manifestadas por los alumnos.

Identificamos cuatro grupos de estudiantes: *i*) alumnos que evidencian una visión exclusivamente operacional (diez alumnos); *ii*) alumnos que transitan, en el cuestionario o en la entrevista, de una visión operacional a una relacional (ocho alumnos); *iii*) alumnos que combinan las visiones operacional

2. El grueso de los alumnos tenía edades entre los 12 y los 14 años, un alumno tenía 15 y una alumna 16.
3. Las preguntas 1.a) y 2.e) las tomamos de Essien y Setati (2006), la pregunta 1.b) la tomamos, con modificaciones, de Falkner *et al.* (1999), y la pregunta 7) la tomamos, también con modificaciones, de Knuth *et al.* (2008).

y relacional (cinco alumnos), y *iv*) alumnos que muestran predominantemente una visión relacional (diez alumnos). Hubo tres alumnos que no fueron incluidos en ninguno de los grupos, ya que dejaron la mayoría de las preguntas sin contestar. Veremos a continuación dentro de cada uno de estos grupos un ejemplo de los trabajos de los alumnos.

Alumnos que evidencian una visión exclusivamente operacional

Cecilia (13 años) interpreta el signo de igual como el indicador de cuánto «te da» una operación. La pregunta 1.b) la contesta de la siguiente forma: $18+6=\underline{24}+5=29$, y explica así su respuesta: «te da 29 porque si sumás 18+6 te da 24 y si al 24 le sumás 5 te da 29». La pregunta 1.c) la contesta así: $\underline{8}+3=11+5=16$, y escribe: «Supe que iba un 8 porque si tenés un 3 y te da 11 lo que sobra es 8». La alumna busca siempre llegar a un resultado final en todas las sentencias, agregando un signo de igual a la derecha y un único número luego de este. Pensamos que esta es la manera que encuentra para darle sentido e incorporar en la actividad al signo operatorio y al número que están a la derecha de la sentencia. Puede pensarse que en las preguntas 1.a) y 1.b), si el alumno mira la parte izquierda de la sentencia junto al signo de igual y al espacio en blanco ($14\times3=\_\_\_\_, 18+6=\_\_\_\_$), puede interpretar el signo de igual como indicador de una propuesta de actividad, lo que lo lleva a realizar la operación de la izquierda y colocar el resultado en el espacio en blanco; la disyuntiva aparece cuando se considera el operador y el número que viene luego del espacio en blanco; colocar otro signo de igual y un nuevo resultado sería entonces una de las formas que encuentran los alumnos de resolver esa situación. Cecilia extiende su concepción del signo de igual como el indicador de cuánto «te da» una operación incluso cuando no hay ninguna operación, por ejemplo en la pregunta 2.g) señala que la sentencia $8=16$ «Es falsa porque si tenés 8 no te puede dar 16», o en la pregunta 1.f), que la completa escribiendo: $14=\underline{14}+3=17$ y la justifica del siguiente modo: «Puse eso porque es obvio que te da 14 y sumás 14+3 te da 17», o en la pregunta 2.c), en donde señala que la sentencia $16=7+9$ «Es falsa porque es imposible que tengas 16 y te dé 7».

Resulta interesante ver cómo se enfrenta esta alumna a la pregunta 5:

5) *Completa los espacios con el número que falta. Explica tus respuestas*
   a) $15+7=\_\_\_\_+15$
   b) $6+5+10=5+\_\_\_\_+10$
   c) $17+4=13+\_\_\_\_$

Las partes *b*) y *c*) tienen un planteo que desafía a la visión operacional, ya que el número que está inmediatamente a la derecha del signo de igual claramente no es el resultado de la operación que está a la izquierda. Cecilia la realiza de la siguiente manera: *a*) $15+7=\underline{22}+15$; *b*) $6+5+10=5+\underline{21}+10$, y *c*) $17+4=13+\underline{21}$. Vemos que la alumna realiza la operación que está a la izquierda del signo de igual y coloca el resultado en el espacio en blanco. Esta es la única pregunta en la cual no justifica lo que hace, esto nos puede llevar a inferir que no está muy segura de sus respuestas; también llama la atención que en ninguno de los tres casos coloca otro signo de igual para llegar a un resultado final, como sí lo hace en las preguntas de la parte 1).

Alumnos que transitan de la visión operacional a la relacional

Observamos que a lo largo de la resolución del cuestionario algunos estudiantes cambiaron su forma de interpretar el significado del signo de igual. Estos alumnos señalaron particularmente la pregunta 5) como aquella que generó este cambio. Esta pregunta, sobre todo las partes *b*) y *c*), buscaba provocar un conflicto en aquellos alumnos que estuvieran trabajando con una visión exclusivamente operacional.

Atendiendo a esto, y dada la relación de esta pregunta con la 1.a) y la 1.b), la pregunta 5) y las restantes hasta el final del cuestionario se las entregamos a los alumnos en una hoja aparte al terminar y devolver las preguntas anteriores. Según los resultados obtenidos podemos decir que en varios alumnos el conflicto buscado efectivamente se produjo, y llevó a algunos de ellos a reconsiderar la forma en la que venían contestando las preguntas –interpretando el signo de igual de forma operacional–, logrando pasar a una interpretación relacional.

Por ejemplo, Lucas (13 años) manifiesta en la entrevista lo siguiente:

Lucas: Yo al principio pensé que era la cuenta, y cuando nos diste la segunda… (*hace referencia a la segunda parte del cuestionario, de la pregunta 5 al final*) me di cuenta que tenías que buscar como… cómo es esto… viste esto, acá tiene que ser como el equivalente (…)

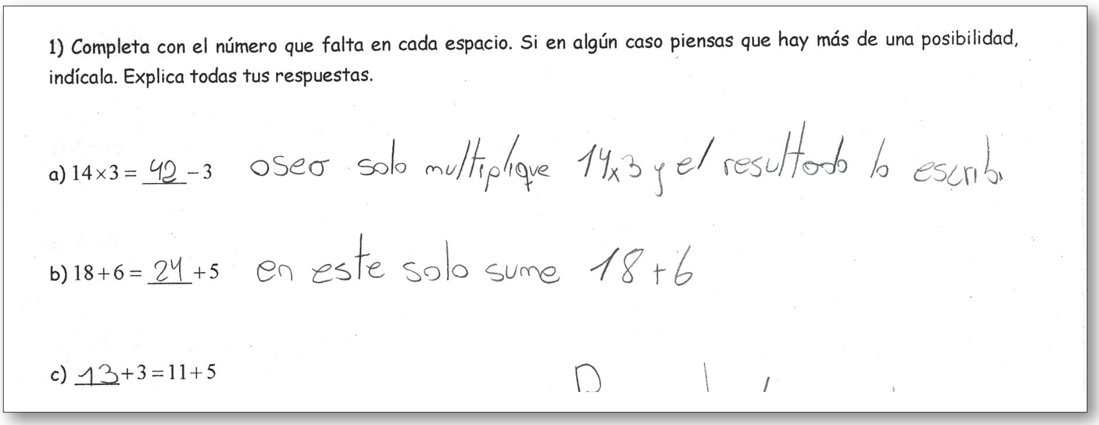
Entrevistador: ¿Qué fue lo que vos entendiste que había que hacer? (…)

L: Las cuentas, como esto (*pregunta 1.a*) está planteado como una cuenta, dije: «ta, las cuentas».

Cuando el alumno dice que «está planteado como una cuenta» creemos que está haciendo referencia a su interpretación del signo de igual como indicador de una *propuesta de actividad*, y al responder la pregunta 5) se da cuenta de que se trata de buscar «el equivalente», es decir, que hay que interpretar el signo de igual como *expresión de una equivalencia*.

Alumnos que combinan la visión relacional con la operacional

Una característica general de los estudiantes que combinan la visión relacional con la operacional a lo largo de todo el cuestionario es que les resulta más fácil argumentar y justificar a partir de una visión relacional del signo de igual en las sentencias en donde están escritos todos los números que en las que tienen que completar con el número que falta, más aún si el espacio para completar se encuentra inmediatamente a la derecha del signo de igual. Veamos como ejemplo lo que realiza Ignacio (12 años) en las tres primeras partes de las preguntas 1) y 2):



1) Completa con el número que falta en cada espacio. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

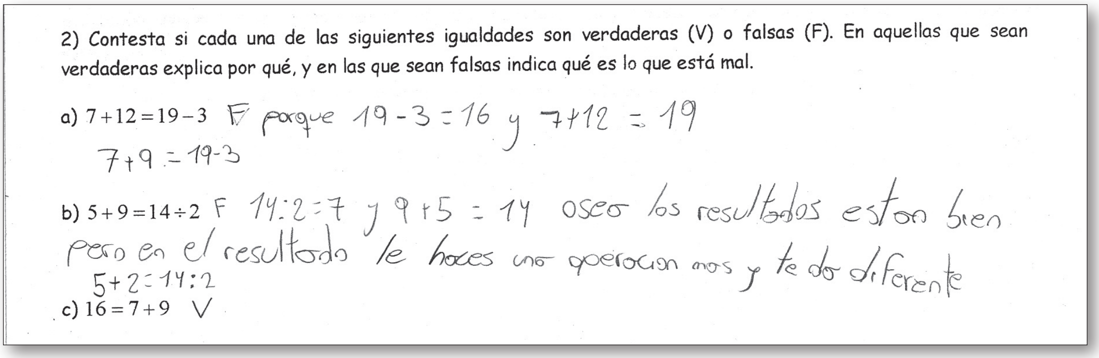
a) $14 \times 3 =$ 42 $- 3$ oseo solo multiplique 14x3 y el resultado lo escribi

b) $18 + 6 =$ 24 $+ 5$ en este solo sume 18+6

c) 13 $+ 3 = 11 + 5$

Fig. 1.

Vemos que el estudiante realiza las partes *a*) y *b*) con una visión operacional y en la parte *c*) adopta una visión relacional. Pensamos que en las dos primeras partes el alumno está interpretando el signo de igual como el indicador de una *propuesta de actividad*; en cambio, en la parte *c*), como el espacio en blanco no está a la derecha del signo de igual, interpreta el signo como la *expresión de una equivalencia*.



2) Contesta si cada una de las siguientes igualdades son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas indica qué es lo que está mal.

a) $7+12=19-3$ F porque 19 - 3 = 16 y 7+12 = 19
7+9 = 19-3

b) $5+9=14\div 2$ F 14:2=7 y 9+5 = 14 osea los resultados estan bien pero en el resultado le haces una operacion mas y te da diferente
5+2=14:2

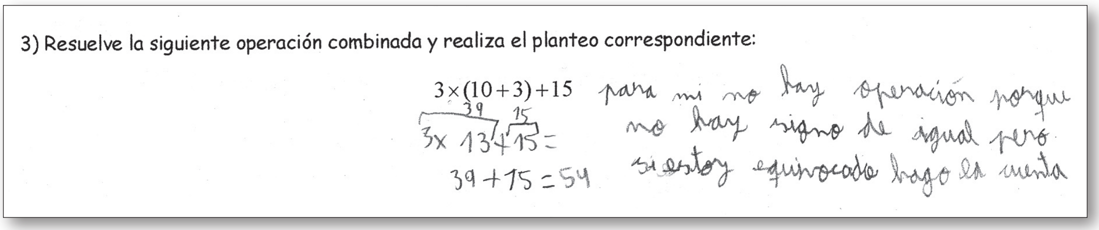
c) $16=7+9$ V

Fig. 2.

Es interesante comparar el argumento del alumno en la pregunta 2.b) con lo realizado por él mismo en las preguntas 1.a) y 1.b). En la 2.b) el alumno escribe: «o sea los resultados están bien pero en el resultado le hacés una operación más y te da diferente», sin embargo en las preguntas mencionadas de la parte 1) no considera esta «operación más» al momento de dar su respuesta. Vemos que el alumno no recurre a la visión *relacional* del signo de igual cuando es él quien tiene que colocar el número que falta inmediatamente después del signo de igual, como en las dos primeras partes de la pregunta 1), y sin embargo es capaz de identificar y justificar con claridad en las primeras sentencias de la pregunta 2) cuáles son verdaderas y cuáles son falsas. En la entrevista el alumno no supo apreciar la contradicción entre ambos razonamientos. Como ya señalamos, una característica general de este grupo de alumnos que estamos analizando es que les resulta más fácil argumentar y justificar a partir de una visión relacional en las cuatro primeras partes de la pregunta 2) que en las dos primeras de la pregunta 1), en donde adoptan una visión operacional; pareciera que el hecho de ver la sentencia completa les permitiera reflexionar mejor sobre esta, sin el impulso, posiblemente presente en las preguntas 1.a) y 1.b), de realizar la operación escrita a la izquierda y colocar su resultado tras el signo de igual, interpretando al signo como indicador de una *propuesta de actividad*.

Alumnos que muestran predominantemente una visión relacional

De los diez alumnos que muestran predominantemente una visión relacional, hay dos que realizan todas las preguntas del cuestionario bien, uno de ellos, José (12 años), realiza el siguiente comentario en la pregunta 3):



3) Resuelve la siguiente operación combinada y realiza el planteo correspondiente:

$3\times(10+3)+15$

$\underbrace{3x\ 13}_{39}+\underbrace{15}_{15}=$

39+15=54

para mi no hay operación porque no hay signo de igual pero si estoy equivocado hago la cuenta

Fig. 3.

En su respuesta José escribe: «Para mí no hay operación porque no hay signo de igual pero si estoy equivocado hago la cuenta». Esto nos muestra lo arraigado que está en los alumnos la interpretación del signo de igual como *propuesta de actividad*: como no está el signo de igual el alumno duda si hay o no «operación», es decir, si hay o no alguna actividad que realizar.

El resto de los alumnos de este grupo o no contesta, o contesta con error al menos una de las siguientes dos preguntas: 1.d) en donde había que completar la sentencia $90 \div 3 = \_\_\_\_ + 3 = \_\_\_\_$ y el verdadero o falso 2.e) $5 + 9 = 14 \div 2 = 7 \times 3 = 21$.

SIGNIFICADOS Y CONTEXTOS

Los significados más extendidos en las interpretaciones de los alumnos son –sin duda– los que corresponden a un contexto *estándar*, el de *operador* y el de *propuesta de actividad*. Podemos decir que la totalidad de los alumnos con los que trabajamos son capaces de interpretar el signo de igual como el indicador del resultado de una operación o como una señal de que se debe realizar una actividad. La diferencia está en que algunos alumnos se quedan exclusivamente con estas interpretaciones *operacionales* y otros logran trascenderlas interpretando el signo de igual de forma relacional. Casi la tercera parte de los alumnos participantes en este trabajo evidenciaron una visión exclusivamente *operacional* del signo de igual, un poco más de la tercera parte manifestaron una interpretación del signo de igual en ocasiones *operacional* y en ocasiones *relacional*, y algo menos de la tercera parte de los alumnos mostraron una visión predominantemente *relacional*. En definitiva, un poco más de las dos terceras partes de los alumnos evidenciaron, en la mitad o más de sus respuestas, dificultades para interpretar el signo de igual como indicador de una relación de equivalencia.

Esto último se evidenció con claridad en las interpretaciones del significado *equivalencia numérica*, que se da en un contexto de *operaciones a ambos lados*. Encontramos que cerca de un tercio de los alumnos no fue capaz de interpretar adecuadamente este significado en ninguna circunstancia, cerca de otro tercio sí lo interpretaron adecuadamente la mayoría de las veces y un poco más de un tercio lo interpretaron correctamente en algunas ocasiones y en otras no, generalmente dependiendo del contexto en el que se les presentaba. En concordancia con lo reportado por McNeil y Alibali (2005) pudimos apreciar que las interpretaciones *relacionales* se vieron favorecidas cuando se presentaron las sentencias en contextos no *estándar*. Mientras que en la pregunta 1.b) $18 + 6 = \_\_\_\_ + 5$ hubo diez alumnos de los treinta y seis participantes que manifestaron una visión *relacional*, en la pregunta 2.d) $4 + 7 = 9 + 2$ hubo dieciocho; en la pregunta 5.b) $6 + 5 + 10 = 5 + \_\_\_\_ + 10$ también hubo dieciocho, y en la pregunta 5.c) $17 + 4 = 13 + \_\_\_\_$ hubo diecisiete. Como vemos, las tres últimas preguntas parecen ser más favorables para que surja la interpretación *relacional* que la primera, y creemos que esto está vinculado con los contextos. En la primera pregunta varios alumnos no lograron interpretar que se trataba de una sentencia en un contexto de *operaciones a ambos lados*, ya que al estar el espacio en blanco inmediatamente a la derecha del signo de igual consideraron la sentencia como si se tratara de un contexto *estándar* de *operaciones-igual-respuesta* e interpretaron el signo de igual como indicador de una *propuesta de actividad*, y así realizaron la operación de la izquierda y colocaron el resultado en el espacio en blanco, ignorando o incorporando en otra operación al número y al operador escritos a la derecha del espacio en blanco. En cambio, en las otras tres preguntas, como no hay un espacio para completar inmediatamente a la derecha del signo de igual, se ve dificultada la interpretación del signo como *propuesta de actividad*, y en consecuencia puede surgir más claramente que se está ante un contexto de *operaciones a ambos lados*, y de este modo las interpretaciones relacionales aumentan.

Con relación al significado *expresión de una acción*, que se da en un contexto de *operaciones del lado derecho*, hemos visto que la tercera parte de los alumnos no aceptan las sentencias escritas de esa manera –algunos de ellos señalan explícitamente que están «al revés»–, mientras que el resto sí es capaz de interpretarlas correctamente.

Respecto al significado *identidad estricta*, si bien fue aceptado por la mayoría de los alumnos, hubo también varios que no lograron darle un significado a una sentencia como 17=17 en la que no se incluye ninguna operación. Relacionado con esto, pudimos ver que la mitad de los alumnos no fueron capaces de reconocer a la sentencia 8=16 como falsa, una cuarta parte de los alumnos la consideró verdadera y otra cuarta parte dejó la pregunta sin contestar.

Surgieron también, en mayor o menor medida, en los cuestionarios y en las entrevistas con los alumnos los siguientes significados: *separador*, *equivalencia simbólica*, *equivalencia por definición o por notación*, *indicador de cierta conexión o correspondencia* y *asignación de un valor numérico*. No surgieron en las respuestas de los alumnos los significados *expresión de una equivalencia condicional (ecuación)*, *definición de un objeto matemático*, *expresión de una relación funcional o de dependencia* y *aproximación*. Cabe destacar que en el cuestionario no había preguntas que apuntaran directamente a estos significados y por ello no resulta extraña esta ausencia.

APARECE UN NUEVO SIGNIFICADO DEL SIGNO DE IGUAL: EL CASO DE 8=16

En la pregunta 2.g) los alumnos debían responder si la sentencia 8=16 era verdadera o falsa, una cuarta parte del total (nueve alumnos) contestó que era verdadera y otra cuarta parte la dejó sin contestar; en definitiva, solo la mitad de los alumnos participantes reconocieron esta sentencia como falsa. Nos surgieron entonces dos interrogantes: ¿cuáles son las posibles causas que llevan a un alumno a considerar verdadera esta sentencia? y ¿qué significado le está asignando al signo de igual un alumno que piense de ese modo?

Los argumentos de los alumnos que consideraron verdadera la sentencia 8=16 pueden resumirse en tres: porque existe una operación que involucra al 8 cuyo resultado es 16 (por ejemplo 2×8, u 8+8), porque 16 es el doble de 8 y porque 8 es «equivalente» a 16 (donde el término *equivalente* está utilizado en una forma distinta a la habitual). Consultamos también a las docentes para ver qué explicación le encontraban al hecho de que algunos de sus alumnos consideraran verdadera la sentencia. Una de ellas buscó la explicación en el hecho de que 16 es múltiplo de 8, señalando que los alumnos al parecer no estarían pensando en una igualdad sino en múltiplos de 8: 8, 16, 24, etc. La otra profesora por su parte buscó la explicación en el contexto de las fracciones equivalentes, señalando que los alumnos están acostumbrados a multiplicar o dividir por dos el numerador y el denominador de una fracción para encontrar fracciones equivalentes, y que así la equivalencia de, por ejemplo, $\frac{8}{2}$ y $\frac{16}{4}$ los podría llevar a considerar que 8=16 es una sentencia verdadera.

Por otro lado, en uno de los cuadernos de clase de una alumna encontramos la siguiente notación utilizada por una de las profesoras para indicar los múltiplos de un número:[4]

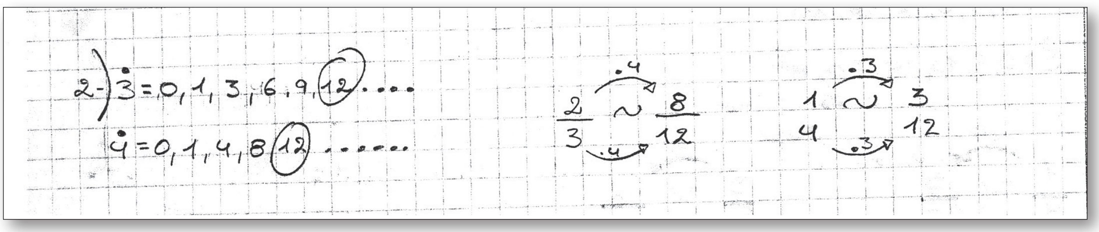


Fig. 4.

4. Tanto en la lista de los múltiplos de 3 como en la de los múltiplos de 4 aparece el número 1, seguramente esto es un error de la alumna dueña del cuaderno.

La notación utilizada por la profesora es una modificación de la siguiente: $a = \dot{b}$, que es usada en uno de los libros de texto[5] para primer año más utilizados en nuestro medio, y que indica que el número *a* es un múltiplo del número *b*.

Estamos ante un uso del signo de igual que indica algo que no es una igualdad, y que por consiguiente puede confundir a los alumnos. Obsérvese que con este uso del signo de igual no se cumple la propiedad transitiva. Cabe preguntarse hasta qué punto la escritura $10 = \dot{5}$ no puede llevar a algunos alumnos a considerar que la sentencia 10 = 5 es verdadera.

El uso del signo de igual que se desprende de la notación $a = \dot{b}$ no corresponde exactamente con ninguna de las categorías establecidas por Molina (2006) y Molina *et al.* (2009). El significado que nos parece más cercano es el de *indicador de cierta conexión o correspondencia*, este, según Molina, corresponde a un significado impreciso del signo de igual que se refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distintas naturaleza, como por ejemplo entre imágenes o figuras y números, o entre una expresión matemática y otra no matemática.

Cuando se escribe $10 = \dot{5}$ se está indicando una conexión o correspondencia: que 10 es múltiplo de 5. En este caso el signo de igual puede ser sustituido por la frase «es un», que determina esta correspondencia. La diferencia con la descripción de Molina, radica en que aquí la correspondencia se establece entre dos objetos matemáticos.

Pensamos entonces que estamos ante una nueva categoría, no reseñada por Molina *et al.*, que puede considerarse como una ampliación del significado *indicador de cierta conexión o correspondencia*, admitiendo que este también puede darse entre dos expresiones matemáticas.

Creemos además que el posible significado asignado al signo de igual por los alumnos que consideran a 8 = 16 como una sentencia verdadera está vinculado con lo anterior. El alumno está estableciendo que 8 es igual a 16 porque existe una relación o una correspondencia entre el 8 y el 16. Consideramos entonces que estamos ante otro ejemplo del significado *indicador de cierta conexión o correspondencia*, pero entre dos objetos matemáticos. Vemos además que esta es una interpretación operacional, el signo de igual indica un resultado: el 16. El signo funciona como un operador incluso allí donde no hay operación alguna.

Proponemos entonces incluir este nuevo significado como una ampliación del significado *indicador de cierta conexión o correspondencia* que aparece en Molina *et al.* Pensamos, a la luz de lo encontrado en esta investigación, que este significado puede darse también entre dos expresiones matemáticas. Este hallazgo nos invita a pensar que el listado de Molina *et al.* es pasible de ser ampliado y por ello es valioso continuar investigando en las interpretaciones de los estudiantes en torno al signo de igual.

EL ENFOQUE DE LA ENSEÑANZA Y LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Como fuentes para el análisis de los enfoques de enseñanza y de las actividades de aprendizaje propuestas a los alumnos utilizamos: las entrevistas realizadas a las dos docentes a cargo de las clases consideradas, la consulta de la *libreta del profesor* de cada clase y dos cuadernos de clase de dos alumnas, una de Primero B, a cargo de la profesora María, y otra de Primero C, a cargo de la profesora Marcela. Los cuadernos, que fueron fotocopiados, los seleccionamos con la ayuda de las docentes, para garantizar que estos estuvieran completos y reflejaran lo mejor posible los temas y las actividades trabajadas en clase. Estas fuentes nos permitieron acceder a información directa sobre las actividades planteadas por las profesoras y las oportunidades de aprendizaje que tuvieron los alumnos participantes en este estudio respecto a la temática que abordamos.

5. M. Borbonet, B. Burgos, A. Martínez y N. Ravaioli (2000): *Matemática 1*. Montevideo, Editorial Fin de Siglo.

Testimonios de las docentes

Realizamos una entrevista a cada docente para indagar qué usos del signo de igual fueron trabajados en los cursos, y en el marco de qué situaciones o contenidos temáticos se trabajaron. También nos interesaba saber si habían podido apreciar usos no adecuados del signo de igual por parte de sus alumnos, y en caso de ser así cuál era el tratamiento que habían realizado de esos errores en sus clases. Además las consultamos sobre qué aspectos del signo de igual o de la igualdad les parecía que se podía enfatizar en los cursos de primer año de enseñanza secundaria teniendo en cuenta que al año siguiente los alumnos comenzarían a trabajar con álgebra.

En las entrevistas, las profesoras propusieron ejemplos de usos del signo de igual que reflejan significados de *operador*, tanto en contexto aritmético como geométrico ($4 \times (-3) = -12$; $r \cap s = \{A\}$), de *propuesta de actividad* ($3 + 5 - 2 =$), de *expresión de una relación funcional o de dependencia*, también en contexto geométrico para indicar la imagen de un punto en una simetría central y en contexto aritmético para calcular el área de un triángulo ($C_O(A) = A'$, $Á = \frac{b.h}{2}$), de *definición de un objeto matemático* (MCD(5,10), «definición de potencia») y de *equivalencia por definición o por notación* ($\overline{AB} = 6$).

El único uso que refieren las docentes y que puede considerarse relacional es en el planteo de resolución de operaciones combinadas, y ambas señalan que en esos casos realizaban, o sugerían realizar a los alumnos, un planteo vertical. La profesora Marcela utiliza como ejemplo la operación $3 + 2 \times 3 =$, y en lugar de un planteo del tipo $3 + 2 \times 3 = 3 + 6 = 9$ dice que trabajó en su curso con un planteo vertical como el siguiente:

$$
\begin{aligned}
3 + 2 \times 3 &= \\
= 3 + 6 &= \\
= 9 &
\end{aligned}
$$

También la profesora María indica que ella les solicita a sus alumnos que realicen este tipo de planteos de forma vertical: «les pido que no vayan escribiendo para el costado, que vayan poniendo los resultados, si separaron términos, bueno, que vayan poniendo los resultados debajo de cada término».

Por otro lado pudimos observar que los usos incorrectos del signo de igual que recuerdan las docentes por parte de los alumnos están asociados a planteos horizontales ($3 + 2 = 5 + 4 = 9$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{5} = \ldots =$). En consecuencia, ambas docentes sugieren a sus estudiantes utilizar planteos de tipo vertical para evitar la aparición de errores en las cadenas de igualdades. Esta estrategia, que es comprensible como forma de evitar los errores de planteo de los alumnos, tiene también como consecuencia dejar de trabajar con sentencias del tipo $3 + 2 \times 3 = 3 + 6$, en las que se utiliza el signo de igual como expresión de una *equivalencia numérica* en un contexto de *operaciones a ambos lados*, y que para interpretarlas correctamente hay que visualizar el signo de igual de un modo relacional como el indicador de que los resultados de las operaciones a ambos lados del signo son el mismo número. Esta interpretación relacional del signo de igual aparece un poco encubierta en planteos verticales como el siguiente:

$$
\begin{aligned}
3 + 2 \times 3 &= \\
= 3 + 6 &=
\end{aligned}
$$

Aquí el uso del signo de igual se presenta en otro contexto, y si bien indica una *equivalencia numérica*, puede también interpretarse como un *separador* entre los distintos pasos del planteo, o como *propuesta de actividad*, ya que el signo indica aquí que hay que hacer algo: operar y colocar los resultados debajo. Podemos ver además que en este caso, al final del primer renglón y al principio del segundo, se da una duplicación de los signos de igual. Esto tal vez puede reforzar la interpretación del signo de igual como un *separador*.

Nos resultó muy interesante analizar las respuestas de las profesoras ante la pregunta referida a qué aspectos del signo de igual o de la *igualdad* les parecía que habría que enfatizar en el curso de primero para preparar mejor a los alumnos para el siguiente curso. En ambos casos las docentes señalan que se podría enfatizar la característica *relacional* del signo de igual. La profesora María dice que se podría «insistir en el tema de que la igualdad implica eso: un balance entre las dos cosas, los dos miembros que tenemos a cada lado», y la profesora Marcela dice que se podría enfatizar el significado del signo de igual como indicador de una relación de equivalencia. También surgió en ambas respuestas que este énfasis en el significado *relacional* del signo de igual no es algo que las profesoras realicen en sus cursos, y quedó en evidencia que las docentes no tienen claro cómo pueden hacerlo. La profesora Marcela señala explícitamente que ella no trabaja eso en su curso, y cuando se le pregunta qué aspectos de la *igualdad* o del signo de igual le parece que habría que enfatizar para preparar mejor a los alumnos para el trabajo en álgebra, señala de un modo genérico que habría que tener en cuenta que es una relación de equivalencia: «capaz [habría] que manejar un poquito las cosas que tienen que ver con la relación de equivalencia», sin especificar ninguna estrategia concreta para llevar adelante esta propuesta. Por su parte, la profesora María comienza contestando sobre las dificultades que encuentra en el curso de segundo año para que los alumnos aprecien relacionalmente el signo de igual, y en determinado momento plantea: «cómo trabajarlo en primero, la verdad…», dando a entender que no es un tema sobre el que tenga una respuesta clara ya que, seguramente, no se lo ha planteado con anterioridad.

Los cuadernos de clase y las actividades de enseñanza registradas en ellos

Veremos a continuación ejemplos de los dos cuadernos de clase que analizamos, uno (que llamaremos *cuaderno 1*) perteneciente a Agustina (13 años), alumna de Primero B a cargo de la profesora María, y otro (que llamaremos *cuaderno 2*) perteneciente a Dara (13 años), alumna de Primero C a cargo de la profesora Marcela.

En ambos cuadernos pudimos apreciar un amplio predominio de usos *operacionales* del signo de igual en un contexto *estándar* de *operaciones-igual-respuesta*. En este primer ejemplo, extraído del cuaderno 1, podemos ver a la izquierda de la imagen el significado *propuesta de actividad*, y en los planteos de la derecha el significado *operador*:

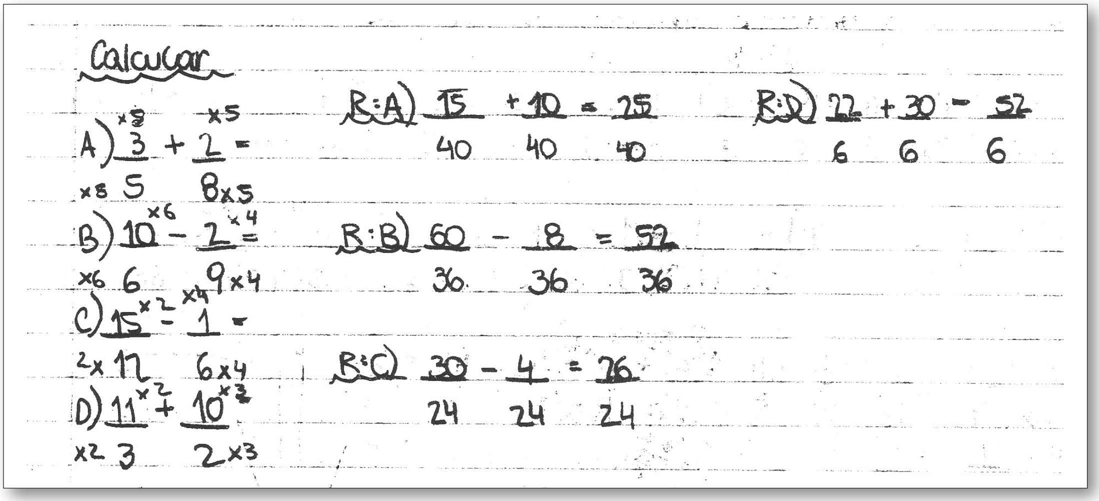


Fig. 5.

Este otro ejemplo es del cuaderno 2:

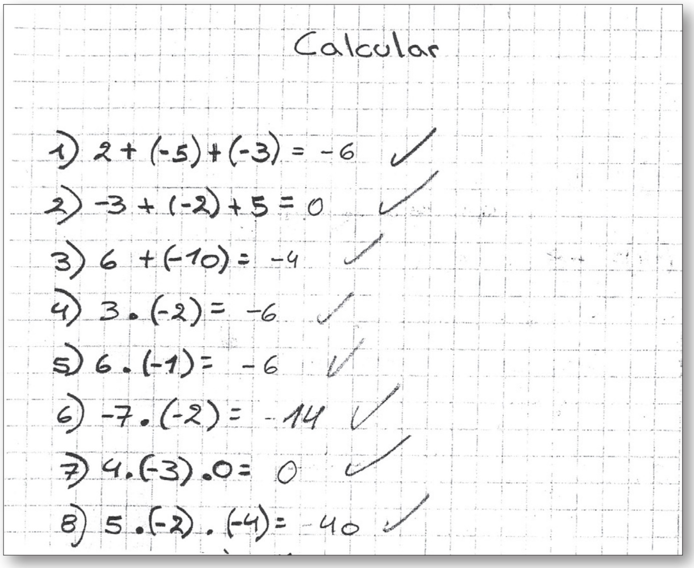


Fig. 6.

Puede observarse que en los ejercicios de la imagen anterior, cuando la docente plantea la actividad, el resultado no está escrito, y en consecuencia el signo de igual se está usando como *propuesta de actividad*, en cambio, tras colocar el resultado estamos ante un uso del signo como *operador*.

También apreciamos, en concordancia con lo manifestado por las docentes en las entrevistas, varios ejemplos en los dos cuadernos de operaciones combinadas con planteos verticales, en donde el signo de igual más que como indicador de una *equivalencia numérica* aparece cumpliendo el papel de *propuesta de actividad* o de *separador*. La imagen que sigue es del cuaderno 1:

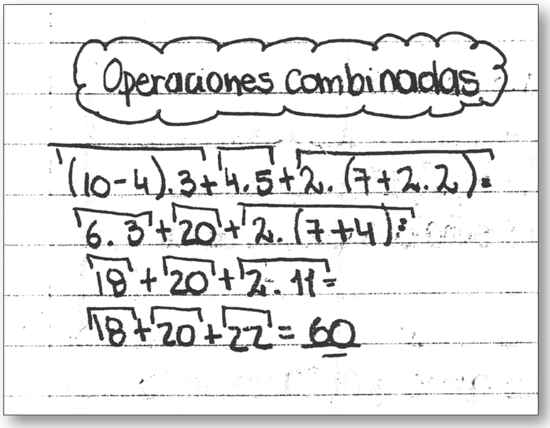


Fig. 7.

Las dos siguientes imágenes son del cuaderno 2: en la figura 8 se ve la propuesta de dos operaciones y sus resultados finales, y en la figura 9 aparece el planteo vertical realizado para la resolución:

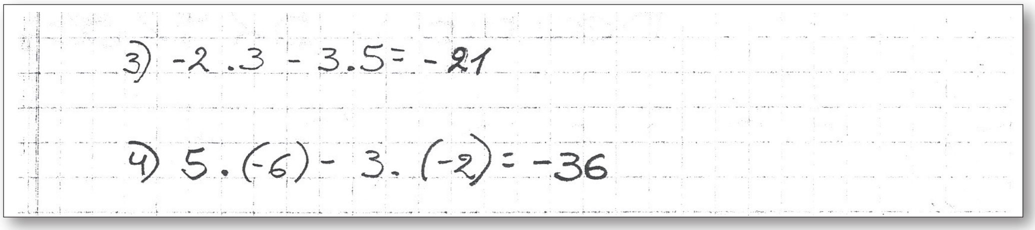


Fig. 8.

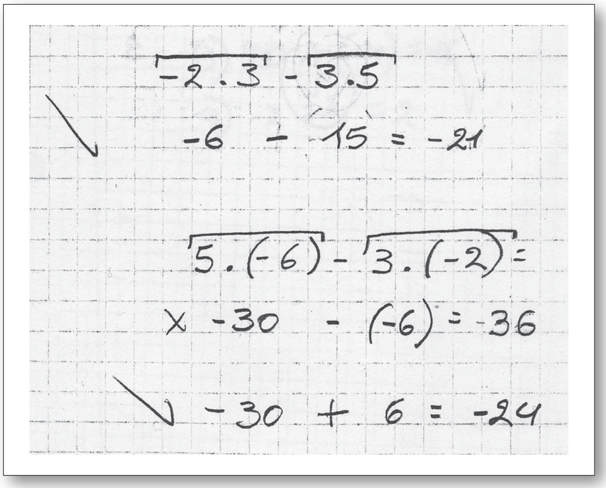


Fig. 9.

Por otro lado, cuando se utiliza el signo de igual en el contexto de *operaciones a ambos lados*, en ambos cuadernos, generalmente es como un paso intermedio para llegar a un resultado final escrito a la derecha de la sentencia, además este tipo de planteos se aprecian casi exclusivamente en las sumas y restas de fracciones. La figura 10 corresponde al cuaderno 1 y la figura 11 al cuaderno 2:

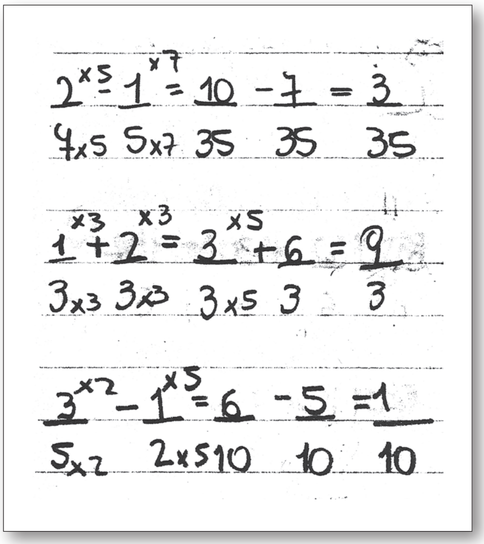


Fig. 10

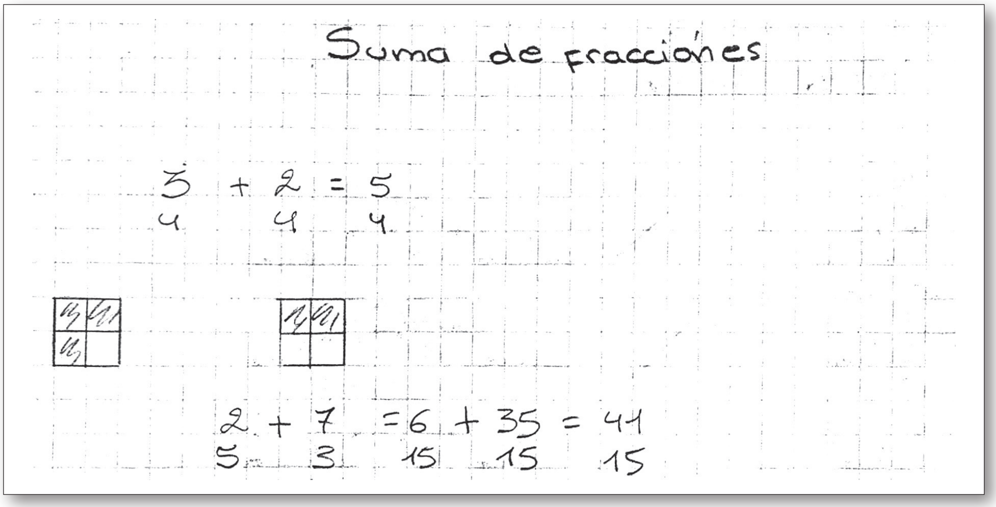


Fig. 11.

Si buscamos ejemplos numéricos de usos del signo de igual en un contexto de *operaciones a ambos lados* que no terminen con un resultado final, tras otro signo de igual a la derecha de la sentencia, encontramos, en el cuaderno 1, solo dos ejemplos en el marco de la definición de resta de enteros:

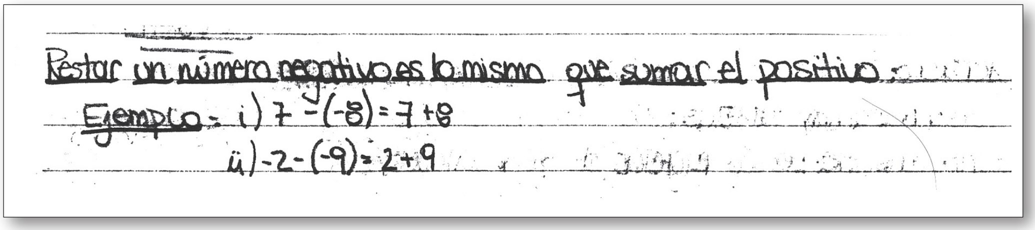


Fig. 12.

Sin embargo, este tipo de planteo no es el que se utiliza en los ejercicios que se realizan y que aparecen luego de la definición, sino que se opta por hacerlo, al igual que en las otras operaciones combinadas, de forma vertical.

En el cuaderno 2, por su parte, encontramos cuatro ejemplos numéricos de usos del signo de igual en un contexto de *operaciones a ambos lados* que no terminen con un resultado final a la derecha, dos como ilustración de la propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación:

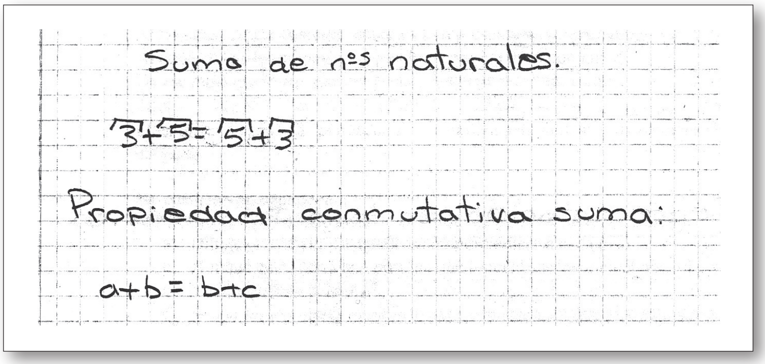


Fig. 13.

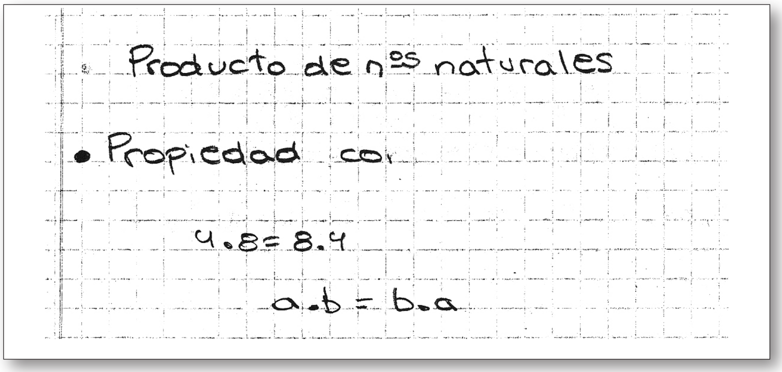


Fig. 14.

Y dos más en una misma sentencia, que puede verse en el último renglón de la siguiente imagen, como ilustración de la propiedad distributiva:

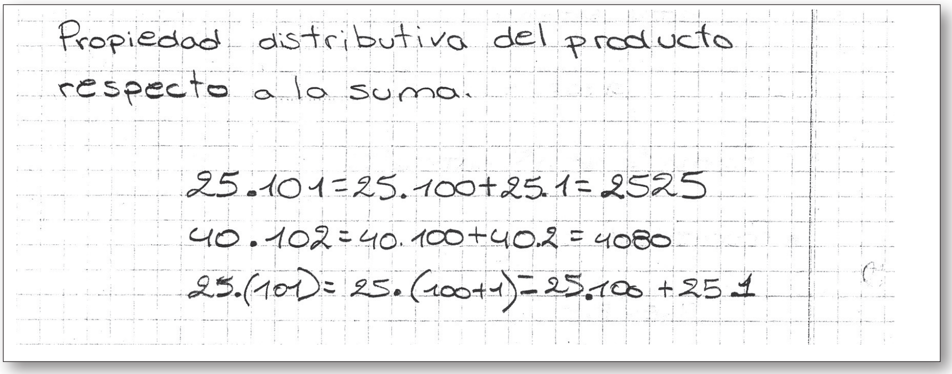


Fig. 15.

Otros usos del signo de igual que encontramos en el cuaderno 1 fueron los siguientes: *asignación de un valor numérico* ($\hat{B} = 90°$), *expresión de una acción* ($15 = 5 \times 3$), *definición de un objeto matemático* ($m(5) = \{0,5,10,15,20,25, \ldots\}$), *equivalencia por definición o por notación* ($\frac{1}{2} = 0,5 \, ; \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$) y *expresión de una relación funcional o de dependencia* ($a : b = c$). También encontramos el siguiente uso:

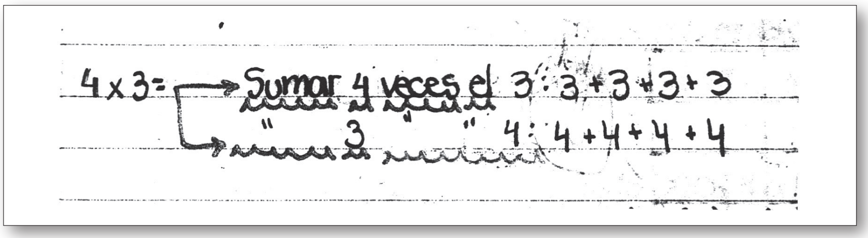


Fig. 16.

Vemos que aquí el signo de igual se utiliza en un esquema, en el cual se plantean dos posibilidades que podrían ir a la derecha de este. Si no estuvieran las flechas y estuviera escrita una de las dos opciones, estaríamos en presencia de un uso *relacional* del signo de igual, como expresión de una *equivalencia numérica* (por ejemplo: $4 \times 3 = 3+3+3+3$), pero del modo en que está planteado este significado se vuelve más difícil de apreciar. Podría decirse que aquí el signo de igual está cumpliendo un papel de *indicador de cierta relación o correspondencia*, papel que se ve reforzado además por las flechas que indican, por ejemplo en el primer caso, que a la expresión « 4×3 » le puede corresponder «sumar 4 veces el 3: 3+3+3+3», o «sumar 3 veces el 4: 4+4+4».[6] Cabe destacar que esta utilización del signo de igual en un esquema no lo hemos encontrado reseñado en ningún trabajo anterior y por tal motivo nos resulta novedoso.

Por su parte, en el cuaderno 2 encontramos, además de los ya reseñados, los siguientes usos: *asignación de un valor numérico* ($\overline{PA}=3{,}8$), *definición de un objeto matemático* ($b^0 = 1$), *equivalencia por definición o por notación* ($\frac{5}{4}=1{,}25$; $2^3 = 2\times 2\times 2$), *expresión de una equivalencia simbólica* ($a + b = b + a$), *expresión de una relación funcional o de dependencia* ($S_r(P) = P'$) e *indicador de cierta conexión o correspondencia* (*JMN = isósceles*). En la siguiente imagen vemos dos particularidades de este cuaderno:

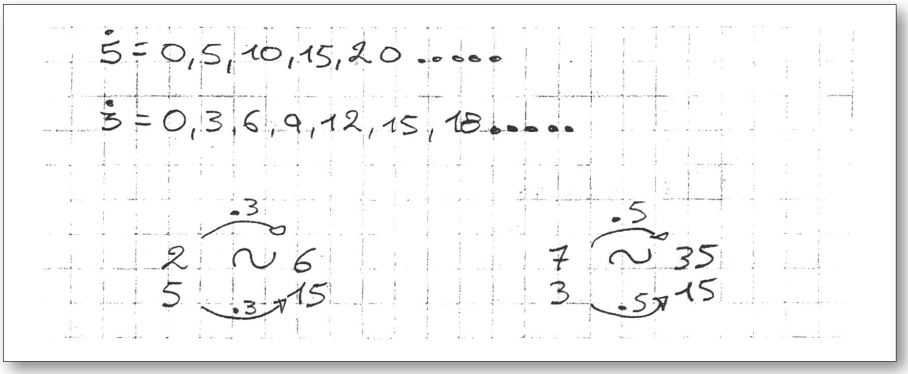


Fig. 17.

La primera particularidad es el uso no convencional que le da la profesora a la notación $\dot{3}$, ya que en el contexto en que la utiliza está representando al conjunto de los múltiplos de 3, en lugar de la notación de uso más corriente: $m(3)=\{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\ldots\}$; sin embargo, este no es el uso habitual de esa notación, que se utiliza convencionalmente para indicar que un único número es múltiplo de tres, por ejemplo para indica que el número quince es un múltiplo de tres se escribe: $15=\dot{3}$. Lo segundo que se ha de observar es que la profesora no utiliza el signo de igual para indicar que dos fracciones son equivalentes sino que lo hace con el signo de *equivalente*: ~.

REFLEXIONES FINALES

Una de las dificultades para enfrentar la problemática en torno a una adecuada interpretación del signo de igual es su invisibilidad. Ninguna de las dos docentes que participaron de este estudio brindaron a este tema una atención especial, ya sea porque no lo reconocen como un problema –asumiendo que los alumnos de nivel secundario dominan estos conceptos adecuadamente–, ya sea porque aun reconociéndolo como tal o bien no han tomado conciencia de su importancia, o bien no poseen estrategias didácticas como para enfrentarlo en las prácticas de enseñanza, tal como fue declarado por las docentes participantes en las entrevistas. En consecuencia recomendamos a los profesores prestarle una atención explícita a la comprensión de los significados del signo de igual y de la igualdad matemática, no presuponer que todos los alumnos tengan adquirida una visión relacional del signo de

6. En la imagen hay un «4» que sobra; se puede presumir que es un error de la alumna al copiar el esquema del pizarrón.

igual y estar atentos para evitar los posibles malos entendidos generados por las visiones exclusivamente operacionales.

Simultáneamente a lo anterior se deberían proponer actividades que ayuden a los alumnos a construir una visión *relacional* del signo de igual, presentándoles igualdades y sentencias para completar en contextos que no sean exclusivamente el *estándar*, sino también acostumbrarlos a trabajar en contextos de *operaciones del lado derecho*, de *operaciones a ambos lados* y *sin operaciones explícitas.*

Como ya se señaló, hubo alumnos que a partir de la pregunta 5 del cuestionario transitaron de una visión operacional a una visión relacional. Según esto sugerimos una posible secuencia de actividades para trabajar en el aula que podría ser de ayuda para transitar este proceso: comenzar con algunas sentencias para completar como la 1.a)$14\times3=\_\_\_\_-3$, la 1.b)$18+6=\_\_\_\_+5$ o la 1.c) $\_\_\_\_+3=11+5$, para ver si los alumnos manifiestan una visión relacional u operacional del signo de igual. A continuación se les puede proponer algunas sentencias como la 5.b)$16+5+10=5+\_\_\_\_+10$ o la 5.c)$17+4=13+\_\_\_\_$, en donde el objetivo sería generar un conflicto con la posible interpretación operacional, ya que el número escrito a la derecha del signo de igual no corresponde con el resultado de la operación escrita a la izquierda.

Consideramos importante prestar atención a las notaciones matemáticas habituales en las que se usa el signo de igual, y a la posibilidad de que algunas de ellas puedan dificultar la comprensión de otros significados. En este sentido creemos que, por ejemplo, la notación $a=\dot{b}$ no es conveniente usarla en etapas tempranas de aprendizaje. Sumado a esto, entendemos que es necesario investigar más a fondo la conveniencia de usar o no, con alumnos en estas edades, el signo de igual para indicar que dos fracciones son equivalentes.

BIBLIOGRAFÍA

Behr, M.; Erlwanger, S. y Nichols, E. (1976). How children view equality sentences. *PMDC Technical Report* 3. Florida State University.

Borbonet, M.; Burgos, B.; Martínez, A. y Ravaioli, N. (2000). *Matemática 1*. Montevideo: Editorial Fin de Siglo.

Essien, A. y Setati, M. (2006). Revisiting the equal sign: Some Grade 8 and 9 learners' interpretations. *African Journal of Research in SMT Education*, 10(1), pp. 47-58.

Falkner, K.; Levi, L. y Carpenter, T. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics* 6(4), pp. 232-236.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, 12, pp. 317-326.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En D. A. Grouws (ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, pp. 390-419. http://dx.doi.org/10.1007/BF00311062

Knuth, E.; Stephens, A.; Mc-Neil, N. y Alibali, M. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36, pp. 297-312.

Knuth, E.; Stephens, A.; Mc-Neil, N. y Alibali, M. (2008). The importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 9, vol. 13, pp. 514-519.

Kouropatov, A. y Tirosh, D. (2011). Is a narrow interpretation of the equal sign unavoidable? Prescool children's understanding of equality. *Proceedings of CERME*, 7.

Lyons, R. (2003). Interpretation de phrase mathematiques. Disponible en línea: <http://www.defimath.ca/mathadore/vol3num123.html> (última consulta: 20/09/2012).

MacGregor, M. y Stacey, K. (1999). A flying start to algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(2), pp. 78-85.

McNeil, N. y Alibali, M. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development*, 6, pp. 285-306. http://dx.doi.org/10.1207/s15327647jcd0602_6

McNeil, N.; Grandau, L.; Knuth, E.; Alibali, M.; Stephens, A.; Hattikudur, S. y Krill, D. (2006). Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. *Cognition and Instruction*, 24, pp. 367-385. http://dx.doi.org/10.1207/s1532690xci2403_3

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria*. Tesis de doctorado, Universidad de Granada. Disponible en línea: <http://documat.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210> (última consulta:12/12/2011).

Molina, M.; Castro, E. y Ambrose, R. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA*, 1(1), pp. 33-46.

Molina, M.; Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary Students' Understanding of the Equal Sign in Number Sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psycholog*, 17, vol. 7(1), pp. 341-368.

Oksuz, C. (2007). Children's Understanding of Equality and the Equal Symbol. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.* Disponible en línea: <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm> (última consulta: 12/05/2011).

Pirie, S. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: Language as (slippery) stepping-Stones. En H. Steinbring, B. Bussi y A. Sierpienska (eds.). *Language and communication in the mathematics classroom*. NCTM, Reston: Virginia, pp. 7-29.

Stacey, K. y MacGregor, M. (1997). Building Foundations for Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2 (4), pp. 252-260.

ANEXO

Cuestionario propuesto a los alumnos

1) Completa con el número que falta en cada espacio. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.
   a) $14 \times 3 = \_\_\_\_ - 3$
   b) $18 + 6 = \_\_\_\_ + 5$
   c) $\_\_\_\_ + 3 = 11 + 5$
   d) $90 \div 3 = \_\_\_\_ + 3 = \_\_\_\_$
   e) $\_\_\_\_ = 16 - 4$
   f) $14 = \_\_\_\_ + 3$
   g) $\_\_\_\_ = 15$

2. Contesta si cada una de las siguientes igualdades son verdaderas (V) o falsas (F). En aquellas que sean verdaderas explica por qué, y en las que sean falsas indica qué es lo que está mal.
   a) $7 + 12 = 19 - 3$
   b) $5 + 9 = 14 \div 2$
   c) $16 = 7 + 9$

d) $4+7=9+2$

e) $5+9=14\div 2=7\times 3=21$

f) $17=17$

g) $8=16$

h) $4=0$

i) $5+9=21$

3. Resuelve la siguiente operación combinada y realiza el planteo correspondiente.

$$3\times(10+3)+15$$

4. Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera explica por qué y plantea un ejemplo utilizando números; si es falsa explica qué es lo que está mal y muestra un ejemplo utilizando números que lo ejemplifique.

si a y b son dos números naturales, entonces $a+b=b+a$

5. Completa los espacios con el número que falta. Explica tus respuestas.

a) $15+7=$ _____ $+15$

b) $6+5+10=5+$ _____ $+10$

c) $17+4=13+$ _____

6. Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera explica por qué y plantea un ejemplo utilizando números; si es falsa explica qué es lo que está mal y muestra un ejemplo utilizando números que lo ejemplifique:

$1+4=2+3$ entonces $1+4+a=2+3+a$ donde a representa un número natural cualquiera.

7. Las siguientes actividades se refieren al símbolo que te presentamos a continuación.

$$=$$

a) ¿Cuál es el nombre que tiene ese símbolo?

b) Explica con tus propias palabras cuál es el significado que tiene para ti ese símbolo.

c) Muestra por lo menos tres situaciones distintas donde ese símbolo pueda usarse.

Meanings of the equal sign and aspects of its teaching. A study carried out with students of the first form of Secondary School and their teachers

Federico Burgell
Consejo de Formación en Educación
federico.burgell@gmail.com

Cristina Ochoviet
Consejo de Formación en Educación
cristinaochoviet@gmail.com

The research results presented in this paper refer to the following two objectives: to explore the different meanings of the *equal* sign built by students who were finishing the first year of the secondary school in Montevideo (12-13 years old); and inquire what the opportunities that teachers offered to their students were in order to construct the different meanings. We also present an extension to one of the theoretical perspectives used in the study that emerged during the study and an additional use of the equal sign made by one of the teachers, not reported in the literature reviewed. Finally, we make some recommendations for teaching.

As theoretical framework we consider the different meanings of the equal sign proposed by Molina (2006) and Molina, Castro & Castro (2009); and the different contexts in which the equal sign is used as suggested by McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur & Krill (2006).

In order to achieve the objectives, we conducted a case study with 36 students from three classes of the first year of the secondary school of the public education in Montevideo. We developed a questionnaire with seven questions, several of them divided into parts, trying to present a variety of proposals that would allow us to approach the problem from different angles. After preliminary analysis of questionnaire responses, we selected 13 students for individual interviews that were recorded.

Furthermore, we analyzed the teaching approach used by teachers and the learning activities they proposed to the students. We also interviewed the teachers and reviewed the teacher book of each class. The teacher book is the official document in which the professor records, among other things, the course syllabus and the subjects he/she teaches every day. Besides, we analyzed the content of two class notebooks belonging to two students.

The results show that a significant proportion of students interprets the equal sign as the indication of the result of an operation and not as an indication of an equivalence relation. This interpretation is essential for addressing algebra in the middle level. We can say that all the students we worked with were capable of interpreting the equal sign as the indicator of the result of an operation or as a sign that indicates they should carry out an activity.

The difference is that some students stay exclusively with these operational interpretations and others manage to transcend interpreting the equal sign relationally. Almost a third of the students participating in this study showed an exclusively operational view of the equal sign, a little more than one third sometimes showed an operational interpretation and some others a relational interpretation, and less than a third of the students predominantly showed a relational view. In short, a little over two thirds of the students showed in half or more of their responses difficulties in interpreting the equal sign as an indicator of an equivalence relation.

In addition, we found that none of the teachers who participated in this study gave special attention to this issue, perhaps because they do not recognize it as a problem –assuming that secondary students master these concepts properly, or because even recognizing it as a problematic concept, they have not become aware of its importance. Maybe it is also because they do not know teaching strategies to face it in teaching practices, as it was declared by the teachers in the interviews.