T-1.179

ÁRBOLES DE GENTZEN COMO ALTERNATIVA A LAS TABLAS DE VERDAD PARA EL ANÁLISIS DE ARGUMENTOS

Edwin Insuasty Portilla
edwin@udenar.edu.co
Universidad de Nariño. Colombia

Núcleo temático: Comunicación y divulgación matemática. Profesorado
Modalidad: T (20 participantes)
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Lógica, Argumentos, Análisis, Gentzen

Resumen

Los árboles de Gentzen constituyen un método que es más corto que el de las tablas de verdad en el análisis de argumentos y que tiene una ventaja adicional, de ser puramente sintáctico ya que no es necesario trabajar con la verdad o falsedad de las proposiciones porque sencillamente se hacen operatorias algebraicas con los símbolos que las representan. Mediante los árboles de Gentzen es posible determinar si un argumento es correcto o incorrecto y también si un conjunto de proposiciones es consistente o inconsistente. En los currículos de matemáticas para la educación media solamente se considera el análisis de argumentos usando las tablas de verdad, las cuales se vuelven inmanejables cuando el número de proposiciones simples es alto. Se pretende que los docentes analicen la viabilidad de este método como una alternativa sintáctica frente a la operatoria mecánica de las tablas de verdad.

Inicialmente se formalizarán algunos conceptos básicos, muy conocidos de la lógica clásica, que permiten abordar los Árboles de Gentzen. En este caso no se hará diferencia entre oración y proposición.

Definición 1. Una oración o proposición lógica es una expresión de la cual podemos afirmar en una situación dada si ésta es verdadera o falsa. Puede ser representada por una letra. Ejemplo p: Está lloviendo.

Definición 2. El lenguaje L de la lógica está formado por los siguientes elementos:

1. Letras proposicionales: $p, q, r, \ldots$ También letras con subíndice $p_1, p_2, p_3 \ldots$ si necesitáramos muchas más.
2. Conectivos lógicos: $\wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$ y la negación $\neg$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

3. Paréntesis: ( )

Definición 3. Reglas para escribir oraciones o fórmulas de L

1. Una letra proposicional es una oración (p, q, p_1, etc.).
2. Si p es una oración, $\neg p$ también lo es.
3. Si p y q son dos oraciones, entonces $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$, $(p \leftrightarrow q)$ también lo son.
4. Sólo las expresiones construidas con las reglas 1, 2 y 3 son oraciones o fórmulas de L.

Definición 4. Las tablas de verdad de los operadores lógicos son las siguientes:

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \rightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

p	$\neg p$
V	F
F	V

Definición 5. Un *argumento* es un conjunto de una o más oraciones o proposiciones lógicas. La última de ellas se denomina conclusión, las anteriores se llaman premisas.

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\text{Oración } 1\\ \text{Oración } 2\\ \vdots\end{array}\right\}\text{Premisas}\\ \hline \text{Oración N}\ \}\ \text{Conclusión}\end{array}$$

Definición 6. Un *argumento* es *correcto* si en toda situación en la que sus premisas son verdaderas, su conclusión también es verdadera.

Definición 7. No se puede producir una conclusión falsa a partir de premisas verdaderas.

Ejemplos de argumentos:

1. Todos los humanos son mortales.
   Carlos es humano.
   ____
   Carlos es mortal.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

2. Hace frío y no hay sol.
Estoy caminando en la playa.
Uso lentes oscuros porque el sol está muy fuerte

Ese perro es verde.

3. Todos los Gluglú son Glogló
Glifó es Gluglú

Glifó es Glogló

En los argumentos estudiados por la Lógica, no se tiene en cuenta el sentido retórico, sino la estructura en sí del argumento. Significa esto que si se acepta como correcto el argumento 1, se debe también aceptar como correcto el argumento 3 porque ambos tienen la misma estructura, aunque éste último diga cosas incomprensibles.

La lógica proposicional estudia los argumentos que incluyen oraciones o proposiciones y conectivos lógicos.

Ejemplo. Analizar el siguiente argumento mediante tablas de verdad.

$$\frac{\begin{matrix}(p \rightarrow q)\\(p \vee q)\end{matrix}}{q}$$

Solución: En el argumento hay dos premisas y la conclusión.

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(p \vee q)$	q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

Primero obtenemos las tablas de verdad de las tres proposiciones. Interesa aquellas valuaciones en que las premisas son simultáneamente verdaderas (que en la tabla están marcadas con rectángulos rojos). Como para esas valuaciones, la conclusión q es siempre verdadera (valores resaltados en verde), de acuerdo con la *Definición 6* podemos afirmar que el argumento es *correcto*.

Ejercicios propuestos. Mediante tablas de verdad, analizar los siguientes argumentos.

$$\frac{\begin{matrix}(p \wedge q)\\(\neg p \vee q)\end{matrix}}{(q \rightarrow \neg p)} \qquad \frac{\begin{matrix}(p \leftrightarrow q)\\(\neg p \vee q)\end{matrix}}{(q \rightarrow p)}$$

Definición 8. Un conjunto de proposiciones $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$ se llama *consistente* (*satisfactible*) si existe al menos una posibilidad en que todas sus proposiciones sean simultáneamente verdaderas. En caso contrario se llamará *inconsistente* (*insatisfactible*)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ejemplo. Analizar mediante tablas de verdad, si el conjunto:

$\{(p \wedge q), (\neg p \vee q), (q \rightarrow \neg p)\}$ es consistente o no.

Solución. Construimos las tablas de verdad de las tres proposiciones del conjunto.

p	*q*	$(p \wedge q)$	$(\neg p \vee q)$	$(q \rightarrow \neg p)$
V	*V*	*V*	*V*	*F*
V	*F*	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*F*	*V*	*V*
F	*F*	*F*	*V*	*V*

Se puede observar que no existe al menos una sola valuación donde las tres proposiciones son simultáneamente verdaderas, por tanto se concluye de acuerdo con la *Definición 8* que el conjunto es inconsistente (insatisfactible).

Ejercicio propuesto. Analizar mediante tablas de verdad, si el conjunto:

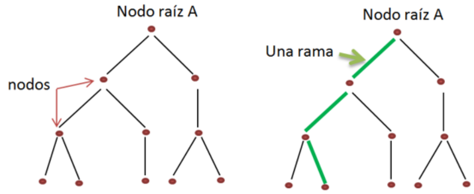
$\{(p \leftrightarrow q), (\neg p \vee q), (q \rightarrow p)\}$ es consistente o no.

Gerhard Gentzen (1909 – 1945) Matemático y lógico alemán. Trabajó en fundamentos de la matemática y teoría de la demostración. Introdujo la idea de sistema de deducción natural para lógica clásica y lógica intuicionista.

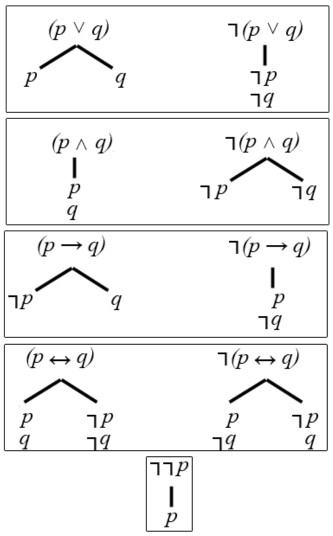
Los Árboles de Gentzen es un método más corto para el análisis de argumentos y conjuntos de proposiciones que el de las tablas de verdad, y es puramente sintáctico lo que significa que no se trabaja con los valores de verdad de las proposiciones sino que se hacen manipulaciones algebraicas con ellas.

Definición 9. Dado un conjunto *A* de oraciones, un Árbol de Gentzen se construye mediante las siguientes reglas:

1. Los árboles estarán constituidos por *nodos* unidos por *líneas*. En cada *nodo* escribiremos una o más oraciones. Una *rama* del árbol es una sucesión lineal de *nodos* de éste.

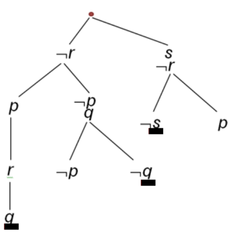


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



2. El primer nodo del árbol se llama *nodo raíz* y contiene todas las proposiciones del conjunto *A*.

3. Cada nodo del árbol se puede extender aplicando a alguna proposición del nodo una de las reglas mostradas en la figura de la izquierda.



4. Una rama se dirá *cerrada* si en ella aparece una oración *p* y su negación $\neg p$. Las ramas *cerradas* se marcarán con un pequeño rectángulo negro como se muestra en la siguiente figura. Una rama que no está *cerrada* se llamará *abierta*.

5. Una oración que aparece en algún nodo del árbol se llamará *acabada* si todas las ramas abiertas que le pertenecen han sido extendidas aplicándole una de las reglas. Las oraciones acabadas serán marcadas con un visto √.

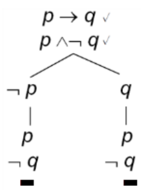
6. Un árbol está *completo* si todas las oraciones que aparecen en alguna rama abierta han sido acabadas.

Definición 10. Un conjunto de proposiciones es *sintácticamente consistente* si tiene un árbol de Gentzen *completo* con al menos una rama abierta. En caso contrario se llamará *inconsistente*.

Ejemplo 1. Es consistente este conjunto? $\{(p \rightarrow q), (p \wedge \neg q)\}$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

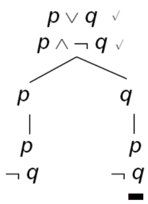
Solución. Desarrollamos un Árbol de Gentzen, aplicando reglas a la primera oración y luego a la segunda como se muestra en la figura.



Como se puede observar, el árbol está completo y todas las ramas se cierran. Como no quedó ni una rama *abierta*, de acuerdo con la Definición 10 el conjunto es *inconsistente*.

Ejemplo 2. Es consistente este conjunto? $\{(p \vee q), (p \wedge \neg q)\}$

Solución. Desarrollamos un Árbol de Gentzen, aplicando reglas a la primera oración y luego a la segunda como se muestra en la figura.

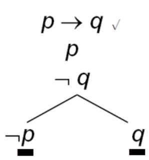


Como se puede observar, el árbol está completo y una de sus ramas quedó *abierta*, de acuerdo con la Definición 10 el conjunto es *consistente*.

Definición 11. Dado un argumento $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\} \vdash p_{n+1}$, su *conjunto contraejemplo* está formado por todas las premisas más la negación de la conclusión, es decir por:
$\{ p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \neg p_{n+1} \}$.

Teorema 1. Un argumento $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\} \vdash p_{n+1}$ es *correcto* si y solamente si su *conjunto contraejemplo* $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \neg p_{n+1}\}$ es *inconsistente*.

Ejemplo 1. Es correcto el siguiente argumento? $\{(p \rightarrow q), p\} \vdash q$

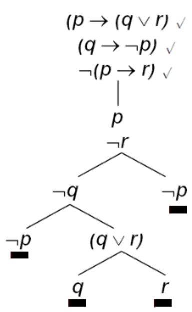


Solución. Su conjunto contraejemplo es: $\{(p \rightarrow q), p, \neg q\}$. Construimos a partir de este conjunto un árbol de Gentzen. Al aplicar regla a la primera proposición, las dos ramas se cierran. De acuerdo con la Definición 10, el conjunto contraejemplo es *inconsistente* y por el Teorema 1, el argumento es *correcto*.

Ejemplo 2. Es correcto el siguiente argumento? $\{(p \rightarrow (q \vee r)), (q \rightarrow \neg p)\} \vdash (p \rightarrow r)$

Solución. Su conjunto contraejemplo es: $\{(p \rightarrow (q \vee r)), (q \rightarrow \neg p), \neg (p \rightarrow r)\}$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

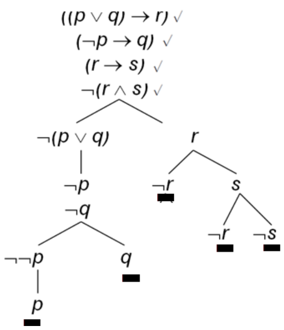


Construimos un Árbol de Gentzen aplicando reglas a las proposiciones en el siguiente orden: proposición 3, luego la 2 y por último la 1. El árbol obtenido se muestra en la figura adyacente.

En este caso, todas las ramas del árbol se cierran. De acuerdo con la Definición 10, el conjunto contraejemplo es *inconsistente* y por el Teorema 1, el argumento es *correcto*.

Ejemplo 3. Analizar el argumento: $\{((p \vee q) \rightarrow r)), (\neg p \rightarrow q), (r \rightarrow s)\} \vdash (r \wedge s)$

Solución. Desarrollando un Árbol de Gentzen mediante la aplicación de las reglas a las proposiciones del conjunto contraejemplo siguiendo el mismo orden en que aparecen, se genera un árbol mostrado en la figura adyacente.



Al igual que en los ejemplos anteriores, todas las ramas del árbol se cierran. De acuerdo con la Definición 10, el conjunto contraejemplo es *inconsistente* y por el Teorema 1, el argumento es *correcto*.

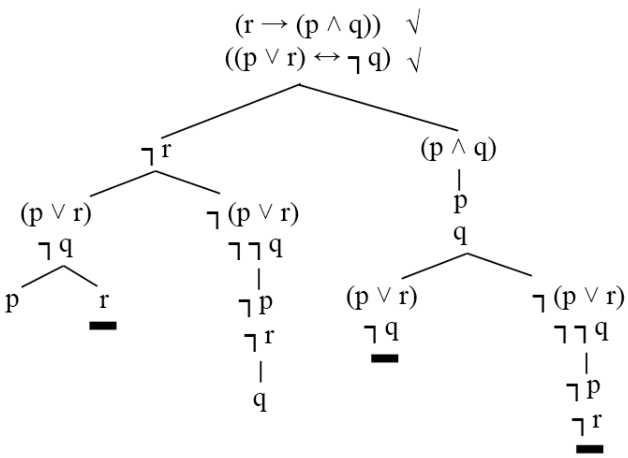
Ejemplo 4. Analizar el argumento: $\{(r \rightarrow (p \wedge q))\} \vdash \neg((p \vee r) \leftrightarrow \neg q)$

Solución. El Conjunto contraejemplo queda conformado de la siguiente manera:

$\{(r \rightarrow (p \wedge q)), \neg\neg((p \vee r) \leftrightarrow \neg q)\}$. Al ubicar las dos proposiciones de este conjunto en el primer nodo del árbol, eliminamos la doble negación de la segunda proposición.

Se procede a generar el árbol aplicando reglas a la primera y segunda proposición en ese orden y como se puede observar en la siguiente figura, aparecen dos ramas abiertas. Esto indica según la Definición 10, que el conjunto contraejemplo es *consistente* y por el Teorema 1, el argumento es *incorrecto*.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Ejercicios propuestos. Analizar mediante Árboles de Gentzen los siguientes argumentos:

1. $\{\ (p \wedge q)\ \} \vdash \neg\ (\neg p \vee \neg q)$
2. $\{\ (p \leftrightarrow \neg q)\ ,\ (p \vee \neg q)\ \} \vdash (p \rightarrow q)$
3. $\{\ (p \rightarrow q)\ ,\ (q \rightarrow (r \wedge \neg s))\ \} \vdash (p \rightarrow (r \vee s))$
4. $\{\ ((p \vee q) \rightarrow\ \neg r),\ (p \wedge q)\ \} \vdash \neg r$

Referencias bibliográficas.

Fernández, J. et. al (2007). *Lógica Computacional*. Madrid. UNED.

Labra, J. y Fernández, A (1998). *Lógica Proposicional para Informática*. Oviedo. Universidad de Oviedo.

Lewin, R. (2003). *Introducción a la Lógica*. Santiago de Chile. Pontificia Universidad Católica de Chile.

Beneyto, R. (1973). Árboles, lógica y mecanismos de decisión. Teorema: Revista internacional de filosofía, Vol. 3, Nº. 2-3, 289-314.

Marraud, H. y Navarro, P. (1988). *Sistemas deductivos tipo Gentzen: problemas de lógica de primer orden*. Madrid. Universidad Autónoma de Madrid.

ISBN 978-84-945722-3-4