T-265

Título: Dame tu gráfica y te diré qué es … El tránsito de las representaciones gráficas a las representaciones algebraicas.

Nombre: Eduardo Mancera Martínez

e mail: mancera.eduardo@gmail.com

Institución: Comité Interamericano de Educación Matemática

Modalidad: Conferencia Regular (CR)

Nivel educativo: No específico

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática.

Palabras claves: Funciones, Representaciones, Graficación, Modelación

Resumen:

En la escuela en los diferentes niveles medios que anteceden a los estudios universitarios, generalmente seis años, es frecuente que se enfoque el manejo de funciones o lugares geométricos a partir de expresiones algebraicas, preponderantemente, las gráficas y el uso de tablas de valores numéricos, por lo general, no son incluidos o se incorporan mínimamente, esto caracteriza a los enfoques tradicionales. Las gráficas, solamente se incluyen cuando se abordan "casos sencillos", lo mismo que las tablas. Por otro lado, generalmente de la expresión algebraica se pide construir la gráfica o hacer una tabla de valores numéricos. Se ha detectado algunas actividades que se presenta una gráfica y se pide encontrar la expresión algebraica asociada, pero solamente para "casos sencillos", es poca la atención que se presta al paso de una tabulación a una expresión algebraica o de una gráfica a representación simbólica. No obstante, es un aspecto principal en las aplicaciones y la modelación. Esto abre la posibilidad de una línea de investigación que promueve el desarrollo del pensamiento gráfico, en principio apoyado en teorías interesadas en la percepción. En esta presentación se analizará el papel de la percepción y su relación con la simbolización las propiedades de las gráficas.

Introducción

La enseñanza de las funciones se ha concentrado en un manejo algebraico. En efecto, al revisar las notas de clase de los estudiantes es frecuente observar solamente expresiones algebraicas y pocas, muy pocas, gráficas, además de tablas de valores casi ausentes. Posiblemente la dificultad de dibujar una gráfica "aceptable", tanto en un pizarrón como en una hoja de papel, puede ser parte del problema. Algo similar se debe enfrentar al elaborar tablas numéricas para determinar puntos que corresponden a gráfica.

El trayecto en esta área de investigación se inició hace varios años con publicaciones que trataban el tema como curiosidad (Shilov, 1976) o como parte de la formación de algunos profesionales (Sánchez - Serrano,1962), incluso como parte de cursos de nivel licenciatura o maestría que se referían a "graficación sin cálculo", pero faltó integración e identificación de elementos fundamentales.

En un intento de acercamiento a algunas ideas sobre el tema, por parte de quien suscribe, se ha trabajado en utilizar la recta o las funciones lineales como el "genoma" de las funciones algebraicas, en algunas publicaciones tituladas "La danza de las rectas" (Mancera, 2005) o al generar notas de cursos (Mancera, 2004) o han sido motivo de Cátedras Magistrales institucionales (https://miuniversidadculiacan.com/impartiran-catedra-en-matematicas-en-colegio-de-sinaloa/) y que se impartieron en 2009 y 2010. Adicionalmente, se ha trabajado frecuentemente con estudiantes con base en las ideas de un libro (Mancera E. Y Basurto E., 2016).

Cabe mencionar que el desarrollo de actividades se realizó con el uso de tecnología. Primero se utilizaron salones de cómputo, utilizando diverso software gratuito pero que no permitía fácilmente el paso entre representaciones, pero se detectaron problemáticas de distracciones de los estudiantes y las limitaciones del wifi institucional. Después se utilizaron diversos modelos de calculadoras gráficas con CAS que permitían el paso más o menos eficiente entre distintas representaciones (numéricas, algebraicas y gráficas), lo cual permitió concentrar a los estudiantes en las actividades diseñadas, pero se empleaba mucho tiempo en transitar por el aula. Las últimas experiencias se realizaron con una calculadora de última generación con aplicaciones precargadas que ayudaron mucho al proceso de enseñanza y pues se contaba con intercomunicación inalámbrica, sin wifi, entre calculadoras y la computadora del maestro, pero con costo menor a todas las posibilidades.

Se agradece a la División de Calculadoras de Hewlett Packard haber permitido utilizar las imágenes obtenidas en pantalla de la calculadora Hp Prime para ilustrar las argumentaciones que se desarrollan tal y como se manejaron en los salones de clase.

Marco de Referencia

Es importante indicar que la concepción principal que orienta los trabajos en torno al presente escrito, se vincula a ideas constructivistas. Se parte de que las nociones y procedimientos matemáticos son construidos paulatinamente por el individuo y no son "aprendidos". La construcción del pensamiento matemático no parte de los símbolos ni del tratamiento del contenido utilizando técnicas estereotipadas, se inicia con exploraciones guiadas por el maestro con la intención de encontrar regularidades y relaciones entre distintas representaciones de los objetos matemáticos, es hasta el final del proceso que se establecen reglas de manejo de los símbolos.

Cuando se hace referencia al término "aprender" se evoca la idea de "tomar" de manera inmediata y permanente el contenido escolar o cualquier otro conocimiento, En un sentido platónico, las ideas o las nociones están por ahí y solamente basta descubrirlas y atraparlas, como si se cazaran mariposas. Pero, la construcción de significados en un proceso que no necesariamente concluye, sino que es parte de una evolución de ideas, significados y construcciones mentales que implica interacciones constantes con experiencias o situaciones problemáticas. Algunos se refieren a aprender al asumirse como constructivistas, pero esto solamente confunde, es un error frecuente.

Se utilizaron diversos lineamientos de la teoría de la Gestalt para el diseño de actividades, dado que se trabajó con imágenes y la percepción jugó un papel importante. Por ejemplo, la "Ley del Cierre" establece que la mente añade los elementos faltantes para completar una figura, lo cual es frecuente en las gráficas, pues se tiende a completar con la imaginación las formas percibidas, buscando la mejor organización posible; la "Ley de la Comunidad", que establece que elementos que se mueven en la misma dirección son percibidos como un único elemento, etc. Falta espacio para discutir los elementos de la Gestalt que fueron considerados.

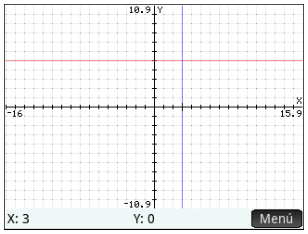
Otro tema por mencionar es la importancia de identificar significados en el desarrollo del pensamiento gráfico, como se ha hecho con las fracciones o el uso de literales en la investigación en educación matemática de las últimas décadas. Prevalece un significado relativo al manejo de relaciones formales entre literales, las relaciones geométricas quedan confinadas o desdibujadas, lo mismo sucede con las relaciones numéricas.

Se trabajó un significado cercano a "lugares geométricos" (conjunto de puntos que cumplen determinadas condiciones o propiedades geométricas), se hace referencia a "lugares cartesianos" (conjunto de puntos que cumplen determinadas condiciones o propiedades en el plano cartesiano), así las gráficas en el plano se interpretarán a partir de las relaciones que se tienen los puntos que las conforman.

Desarrollo

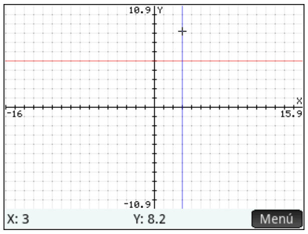
Al trabajar rectas en el plano empezamos por el final y sin fórmulas, resaltando relaciones entre sus puntos. Las rectas paralelas a los ejes generalmente se abordan como "casos degenerados" de las "rectas normales". En efecto, este tipo de rectas se asocian a "pendientes infinitas" ($x = a$) o "pendientes cero" ($y = b$), donde a y b son constantes. Con lo cual se atiende más a los "aspectos formales" o "convenciones de la disciplina".

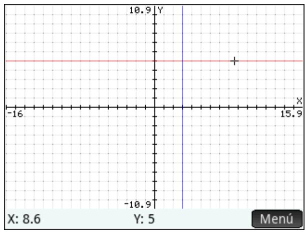
Usando la idea de "lugares cartesianos", se enfoca el trabajo con rectas cuya expresión algebraica es del tipo $x = 3$ o $y = 5$, atendiendo a la relación que cumplen los puntos que las conforman.



ISBN 978-84-945722-3-4

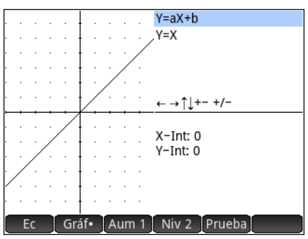
Se aprovecha una convención implícita al usar las letras x o y, "abscisa" u "ordenada", respectivamente, de puntos del plano cartesiano. Entonces, $x = 3$ se refiere a los puntos con abscisa igual a 3, también $y = 5$, se refiere a los puntos de ordenada igual a 5.

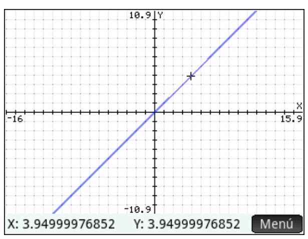




Esta interpretación, que puede parecer obvia, abre la puerta para trabajar con todo tipo de rectas sin recurrir a fórmulas o trigonometría, con deducciones de fórmulas que conllevan procesos de inducción inmediata (generalizaciones que se establecen a partir de un solo caso).

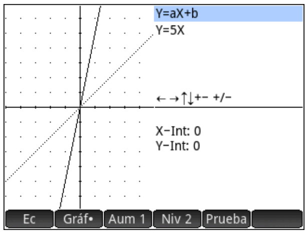
En realidad, en el plano solamente hay una recta: $y = x$. Todas las demás son "trasformaciones" o "movimientos" de ésta. Es la recta cuya gráfica se conforma con puntos en el plano que tienen abscisa igual a la ordenada.

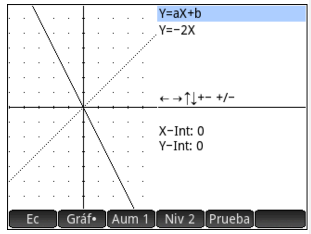


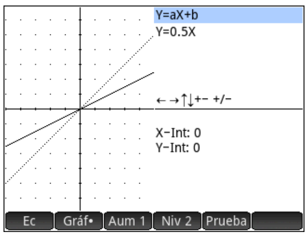


Si se incrementa o decrementa el valor absoluto del coeficiente de x , la recta varía su pendiente, originando relaciones como "los puntos del plano cuya ordenada es el quíntuple de la abscisa", "los puntos del plano cuya ordenada es el triple de la abscisa", "los puntos del plano cuya ordenada es la mitad de la abscisa", "los puntos del plano cuya ordenada es el negativo de la abscisa" etc.

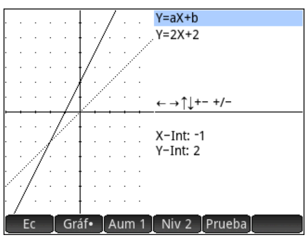
ISBN 978-84-945722-3-4

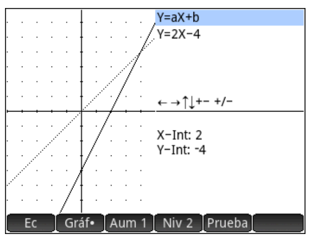






Las expresiones algebraicas al relacionadas con subir “subir” o “bajar” pueden analizarse moviendo rectas.





Cabe entonces plantear actividades como:

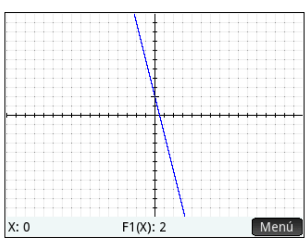
a) Dada la tabla siguiente encontrar la ecuación de la recta y la gráfica correspondiente.
b) Dada la gráfica correspondiente determinar algunos puntos de la recta y la expresión algebraica correspondiente:


Vista numérica Función

X	F1
-2	-12
-1	-9
0	-6
1	-3
2	0
3	3
4	6
5	9
6	12
7	15

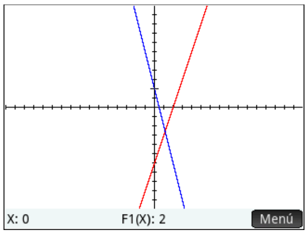
-2

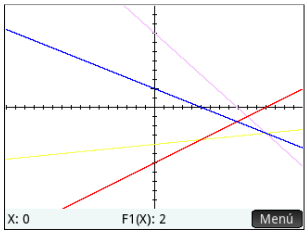
Zoom Más Ir a Defn



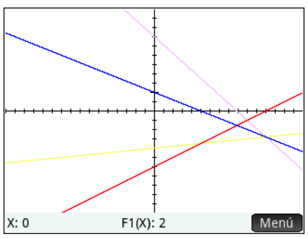
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

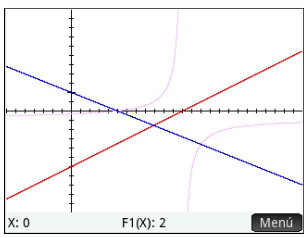
También se puede considerar obtener la gráfica de la suma o diferencia de dos gráficas de funciones lineales, sin conocer las expresiones algebraicas correspondientes:



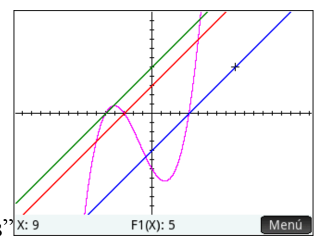


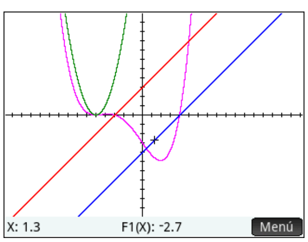
Las parábolas pueden ser consideradas como productos de funciones lineales y las hipérbolas como cocientes de funciones lineales:





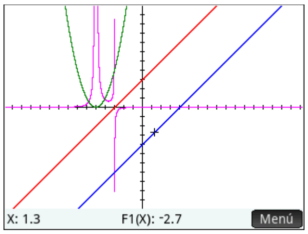
Lo cual permite analizar el comportamiento de polinomios al considerarlos como “productos de funciones lineales” o de “funciones lineales y parábolas”

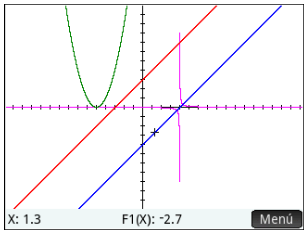




VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

De la misma manera se pueden abordar el comportamiento de funciones racionales al analizarlas como como cocientes de polinomios:





Trabajar las funciones algebraicas con este tipo de procedimientos permite paulatinamente introducir y discutir, en el momento oportuno, nociones de dominio, imagen, máximos mínimos globales y locales, así como asíntotas y varios aspectos del cálculo de límites, sin usar procesos de aproximación complicados.

Comentarios finales

Generalmente en un curso sobre el manejo de funciones se trabajan varios aspectos al mismo tiempo, conceptuales que se pueden desarrollar con apoyo en algunos dispositivos tecnológicos y operativos, relacionados con el manejo de técnicas, que no necesariamente se desprenden de la comprensión de los aspectos gráficos, tienen más relación con lo que se podría denominar una “ortografía matemática”, pues se refiere al manejo de reglas para combinar símbolos y cada requiere un espacio especial para hacerlo no se puede lograr todo al mismo tiempo, pero lo simbólico requiere tener en mente imágenes claras y significativas para dar sentido a las manipulaciones algebraicas, frecuentemente esto se hace al revés y los resultados ya los conocemos. Varias de las experiencias con este enfoque han implicado dividir los cursos de cálculo en dos partes, una dedicado solamente a lo conceptual con apoyo de tecnología y la otra dedicada solamente a las técnicas algebraicas.

Quedan muchos aspectos por cubrir para dar una idea completa de lo que se logra con esta perspectiva que implica atender a los aspectos relativos a la enseñanza y la construcción del pensamiento gráfico para apoyar el pensamiento analítico.

ISBN 978-84-945722-3-4

Los símbolos, aunque se pueden trabajar sin referentes, como se hace en la matemática moderna, debe tener sentido para quienes no serán matemáticos, pero si serán usuarios de algunos aspectos de la matemática.

Será necesario abandonar las pretensiones disciplinarias y pensar en formas de trabajo que permitan un mejor acercamientos a los contenidos matemáticos, pues la matemática se construye con ideas principalmente y no con procedimientos operativos rutinarios.

Bibliografía

Ázcárate, C. y Deulofeu, J. (1996) Funciones y gráficas. Síntesis, Madrid, España

Lacasta, E. y Pascual, J. (1995). Las funciones en los gráficos cartesianos. Síntesis, Madrid, España.

Mancera E (2004); *Notas del curso Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía; Universidad Iberoamericana*, México, UIA.

Mancera, E. (2005). *La danza de las rectas*. Revista innovaciones Educativas 7ª. Edición. USA.

Mancera, E. y Basurto E. (2016). *El baile de las funciones lineales,* CIAEM, México.

Rees, P. (1970). *Geometría Analítica*. Reverté, España.

Sánchez - Serrano A. (1962). Representación de curvas problemas y aplicaciones; Escuela Superior de Ingenieros Aeronáuticos, España.

Shilov G. E. (1976). *Cómo construir gráficas*. Temas Matemáticos, Limusa, México.

Steven, C (2012). *Teorías del aprendizaje*. Boston, MA.

ISBN 978-84-945722-3-4