http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1706
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

¿Cómo son los apuntes de matemáticas de un estudiante? Influencia de los elementos matemáticos y sus relaciones

How are the mathematics notes written by a student? Influence of the mathematical elements and their relations

Matías Arce Sánchez, Laura Conejo Garrote, Tomás Ortega del Rincón
Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática. Universidad de Valladolid, España.
arcesan@am.uva.es, lconejo@am.uva.es, ortega@am.uva.es

RESUMEN • Esta investigación se desarrolla en tres clases de primero de bachillerato con una metodología tradicional. En ella, comparamos los diferentes tipos de elementos y relaciones expuestos por los docentes con los apuntes que los estudiantes escriben en sus cuadernos. El tópico es reglas y técnicas de derivación. Se consideran marcos de análisis de contenido, construyendo mapas de elementos y relaciones para realizar la comparación. Detectamos una amplia gama de perfiles de transcripción en alumnos, especialmente en contextos donde el profesor combina la obtención de las reglas a partir de su justificación con su aplicación práctica. En los apuntes predomina un enfoque procedimental y simbólico, influido por la pizarra, unido a una transcripción muy baja de los elementos de naturaleza relacional presentes en el discurso oral.

PALABRAS CLAVE: apuntes; reglas de derivación; análisis de contenido; mapa de elementos y relaciones; bachillerato.

ABSTRACT • This research has been developed in three classrooms of high school students (16-17 years old) with a traditional methodology. We have compared the different kinds of elements and relations presented by the teachers with the notes written by the students in their notebooks. The topic is derivative rules and techniques. The framework is the content analysis, using maps of elements and relations in order to do this comparison. We have found a wide range of transcription profiles in students, especially in contexts where the teacher combines the obtaining of rules through its justifications with their practical application. The notes with a procedural and symbolic approach are the majority, influenced by the blackboard. There is a low transcription of the relational nature elements that are presented by the teachers in their oral discourse.

KEYWORDS: notes; derivative rules; content analysis; maps of elements and relations; high school.

Recepción: marzo 2015 • Aceptación: octubre 2015 • Publicación: marzo 2016

INTRODUCCIÓN. PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO

¿Son iguales los apuntes que toma cada estudiante en una clase de Matemáticas? La respuesta a esta pregunta depende de muchos factores (alumno, metodología docente seguida, papel de la toma de notas…). No obstante, incluso en metodologías de tipo expositivo, aún persistentes en niveles educativos superiores (Godino, Contreras y Font, 2006), pueden existir diferencias tanto en el contenido anotado por los alumnos como en las características de esa transcripción. Este trabajo, que forma parte de una investigación sobre la elaboración y uso del cuaderno de matemáticas (en adelante, cuaderno) por los estudiantes, pretende profundizar más en esas diferencias y características.

Existen bastantes estudios en ámbitos pedagógicos y universitarios sobre la toma de apuntes en alumnos, un proceso de alto nivel cognitivo, relacionado con la comprensión, el análisis, la síntesis y la escritura de la información presentada (Monereo y Pérez Cabaní, 1996; Saint-Onge, 1997). Monereo, Carretero, Castelló, Gómez y Pérez Cabaní (1999) distinguen tres grupos de investigaciones según su foco de interés. Un primer grupo sobre la enseñanza de habilidades para tomar apuntes y su incorporación en las prácticas docentes, donde destacamos el estudio de Salgado-Horta y Maz-Machado (2013), en clases universitarias de estadística. Un segundo centrado en las relaciones entre estrategias de enseñanza-aprendizaje y la toma de apuntes en el alumnado. Estudios como los de Monereo y colaboradores o Saint-Onge proporcionan clasificaciones del alumnado universitario en dos perfiles: *copistas* (que buscan «grabar» fielmente la clase) y *estratégicos* (que buscan identificar y seleccionar las ideas principales). Asimismo, Nogueira (2005) analiza las características de los apuntes elaborados por alumnos universitarios según sea el discurso del profesor y su uso de la pizarra. En el tercer grupo están los estudios sobre la percepción de los estudiantes acerca del proceso de tomar apuntes. Los estudiantes toman apuntes, principalmente, para mantener la atención en clase, posibilitar el recuerdo y revisión de la información presentada, y facilitar su organización para preparar pruebas de evaluación (Van Meter, Yokoi & Pressley, 1994).

No hemos encontrado investigaciones específicas sobre cómo toman apuntes los alumnos en matemáticas. En este estudio buscamos saber más sobre ello, relacionando los modos de toma de apuntes con los tipos de elementos, relaciones y procesos matemáticos, y con el rol de las notas para el alumno. El entorno son clases de primero de bachillerato, donde la teoría es presentada de forma expositiva por el docente. El tópico son las reglas y técnicas de derivación, dentro del contenido sobre la derivada de una función. Siguiendo a Courant y Robbins (1964), llamaremos *regla de derivación* a aquella que puede obtenerse a partir de la definición de derivada de manera directa (como, por ejemplo, las reglas para derivar funciones elementales); y *técnica de derivación*, a un conjunto de reglas y transformaciones que permiten derivar una función con una estructura o propiedad determinada, como la técnica de derivación logarítmica (para derivar funciones del tipo $f(x)^{g(x)}$) o la de la función recíproca (entendida como la función simétrica para la composición de funciones).

Numerosos estudios señalan la dificultad asociada a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la derivada. Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) revisan las investigaciones desarrolladas acerca de la comprensión de este concepto bajo diversos marcos teóricos, abogando por una presentación del concepto que integre la perspectiva analítica (como límite del cociente incremental) y la gráfica (como pendiente de la recta tangente a la curva), y que diferencie su carácter puntual o global. La derivada en un punto y la función derivada no siempre son percibidas como diferentes, incluso entre docentes de matemáticas (Badillo, Azcárate y Font, 2011), lo que provoca un tratamiento inadecuado en el aula. Actualmente hay un interés creciente por conocer el conocimiento matemático y didáctico sobre la derivada de profesores de secundaria en formación (Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2014; Pino-Fan, Godino y Font, 2015).

Font (2005) defiende el uso de diferentes representaciones al plantear el cálculo de la derivada, dada la dificultad del límite del cociente incremental. Las reglas y técnicas de derivación buscan mecanizar y facilitar ese cálculo, existiendo propuestas didácticas para su tratamiento integrado (Fonseca y Gascón, 2002). La regla de la cadena ha recibido mayor atención investigadora, destacando el trabajo de Clark *et al.* (1997), que detecta diferentes niveles de comprensión de la regla (desde la existencia de «casos especiales» aislados hasta la construcción de la estructura subyacente a la regla). Godino *et al.* (2006) analizan una sesión de clase sobre este tópico utilizando constructos del Enfoque Ontosemiótico (EOS). Nosotros utilizaremos instrumentos de análisis distintos, basados en los tipos de elementos expuestos y las relaciones establecidas entre ellos, que nos permitan dar respuesta a los siguientes objetivos de investigación:

- Establecer semejanzas y diferencias en el contenido impartido por los docentes participantes, de acuerdo con el marco teórico adoptado.
- Detectar diferentes comportamientos en el alumnado al transcribir ese contenido, a través de un estudio similar de las notas que toman.
- Identificar relaciones entre los elementos y relaciones expuestas, los comportamientos de los alumnos al transcribir y el papel de las notas para ellos.

MARCO TEÓRICO

El marco que consideramos para analizar tanto el contenido expuesto por los docentes como el transcrito por los alumnos es el *análisis de contenido*, propuesto por Rico y colaboradores (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008; Picado y Rico, 2011; Rico, 2012) para analizar los significados de los contenidos de las matemáticas escolares, y que es una de las etapas del *análisis didáctico* (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013). En él, estos autores adaptan el triángulo semántico de signo, sentido y referencia de un concepto (Frege, 1998, citado en Rico) para diferenciar tres dimensiones de análisis: la estructura conceptual (referencia), la fenomenología (sentido) y los sistemas de representación (signo).

La *estructura conceptual* es el sistema organizado de conceptos y de procedimientos, junto con las relaciones existentes entre ellos, sus propiedades y criterios de veracidad, que dan lugar a la estructura matemática que los organiza y justifica. Dentro de esta estructura pueden existir *focos conceptuales*, que son una «agrupación específica de conceptos, estrategias y estructuras, que adquiere importancia especial ya que expresa, organiza y resume agrupamientos coherentes de los contenidos» (Rico *et al*., 2008: 11).

Dentro de la estructura conceptual de la derivada, pensamos que las reglas y técnicas de derivación forman un foco conceptual. Dadas las características del contenido expuesto, vamos a distinguir en él tres tipos de elementos: los *enunciados* de las reglas y técnicas, sus *justificaciones* (que permiten construir, organizar, fundamentar y sistematizar la estructura matemática que organiza el foco conceptual, así como relacionarlo con la estructura conceptual) y los *comentarios* (observaciones que enfatizan la relación entre diferentes enunciados, su aplicabilidad, o que refuerzan otros elementos importantes).

La *fenomenología* incluye aquellas situaciones, contextos o problemas que dan origen a la estructura conceptual, y que también dotan de sentido a esta, al servir como herramienta para modelizar, organizar y comprender dichos fenómenos. En las exposiciones teóricas de los docentes, la fenomenología ha quedado reducida a los *ejemplos de aplicación,* en funciones concretas, de las reglas y técnicas presentadas.

Los *sistemas de representación* son todas aquellas expresiones, signos, símbolos o gráficos a través de los cuales se hace presente un contenido matemático, de modo que permiten la comunicación de ideas matemáticas. Los sistemas de representación muestran diferentes facetas de un mismo concepto u objeto, así como posibles relaciones de este con otros. En este trabajo haremos un estudio transversal de los sistemas de representación que se han utilizado al presentar y referenciar los elementos que forman el contenido, que han sido: verbal oral y escrito, simbólico y gráfico.

Para reconocer y analizar el contenido asociado al foco conceptual desarrollado por cada docente o escrito por cada alumno, construiremos *mapas de elementos y relaciones*, similares a los planteados por Rico *et al.* (2008) al analizar y planificar un contenido escolar. Estos mapas nos permitirán visualizar los cuatro tipos de elementos (enunciados, justificaciones, comentarios, ejemplos), así como las conexiones o relaciones establecidas entre ellos. Distinguiremos dos tipos de relaciones: las asociadas a *procesos de aplicación* directa de enunciados en ejemplos ilustrativos o en la obtención de casos particulares de reglas, y relaciones asociadas a *procesos de justificación* de reglas y técnicas de derivación utilizando reglas previas u otros conceptos o resultados. El mapa incluye también los sistemas de representación utilizados. La comparación de los diferentes mapas asociados a la exposición de cada profesor y la transcripción de cada alumno permitirá mostrar diferentes niveles de desarrollo de los contenidos, así como la cantidad y naturaleza de las relaciones entre elementos establecidas y de los procesos seguidos, aspectos clave para desarrollar y manifestar la comprensión de un concepto (Harel, Selden y Selden, 2006).

CONTEXTO DEL ESTUDIO. MÉTODO

Los datos se recogieron en el curso 2011/2012, en tres aulas de primero de bachillerato, elegidas por disponibilidad y pertenecientes a dos centros de Valladolid. Haremos un uso genérico del masculino durante todo el artículo, sin referirnos al sexo concreto de los participantes ni tener en cuenta la variable género. Las tres aulas tienen pocos alumnos, las dos primeras pertenecen a un instituto público y la tercera a un colegio privado concertado. La primera es de la modalidad Científico-Técnica, con un profesor al que nos referiremos como Docente 1 (en adelante, DO1) y 9 estudiantes, que se codifican E1 a E9; la segunda es de Ciencias Sociales, con un Docente 2 (DO2) y 7 alumnos, E10 a E16. La tercera también es de Sociales, con el Docente 3 (DO3) y 10 estudiantes, E17 a E26. Los tres docentes participantes son licenciados en Matemáticas. Además, DO2 es doctor en Didáctica de la Matemática.

Los tres profesores han planificado y desarrollado la docencia sobre reglas y técnicas de derivación sin ninguna directriz, intervención ni sugerencia del equipo investigador. DO1 y DO2 dedicaron dos sesiones de clase completas a exponer este tópico. DO3 también, pero incluyendo algún ejercicio práctico a lo largo de la exposición. Los tres docentes han hecho una presentación expositiva, de carácter personal, de los contenidos teóricos, combinando el discurso oral con el uso de la pizarra de tiza para escribir simbólicamente enunciados, justificaciones o ejemplos, y sin intervenciones previstas para el alumnado. No hubo referencias explícitas en la exposición al libro de texto (LT), de la misma editorial en las tres aulas (Colera y García, 2008*a*, 2008*b*). La única diferencia metodológica reseñable fue el uso explícito del dictado verbal oral por parte del DO2 al presentar algunas reglas y los comentarios. Estas metodologías han sido las seguidas usualmente por los docentes durante todo el curso, sin que, según nos cuentan en una entrevista, estos hayan proporcionado estrategias de toma de apuntes a sus alumnos.

Este estudio se enmarca dentro de un paradigma descriptivo-interpretativo. Los datos recogidos fueron las notas tomadas por el equipo investigador al observar las clases; los diarios de clase, con la planificación y el resumen diario y escritos por cada profesor a petición nuestra; entrevistas informales periódicas con los docentes y las fotocopias del cuaderno de cada alumno con las notas tomadas. Con esos datos, y de acuerdo con el marco teórico, hemos elaborado, usando el programa CmapTools, un mapa conceptual de elementos y relaciones asociado a la exposición teórica de las reglas y técnicas de derivación de cada docente. Estos mapas nos permiten comparar el contenido expuesto y dar respuesta al primer objetivo de esta investigación.

Para las transcripciones de los alumnos, el mapa de elementos y relaciones correspondiente a cada uno se complementará con un análisis de contenido en sentido genérico. Cohen, Manion y Morrison (2011) lo definen como «un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y verificación de los contenidos de datos escritos» (p. 563), que busca pasar de la mera descripción de un texto a su interpretación y a la formulación de inferencias teniendo en cuenta el contexto del análisis (Bardin, 1996). Para esa interpretación, nos ayudaremos de entrevistas por parejas realizadas a varios estudiantes participantes, sobre su elaboración y uso del cuaderno. Este análisis mixto (cuantitativo y cualitativo) nos permitirá profundizar en los otros dos objetivos del estudio.

ANÁLISIS DE LOS DATOS Y RESULTADOS

Desarrollo teórico de los docentes sobre reglas y técnicas de derivación

El Decreto 42/2008, que fija el currículo de bachillerato en Castilla y León, tan solo hace una mención general a las «reglas de derivación» en los contenidos de matemáticas de ambos cursos y modalidades, pero en los criterios de evaluación considera el cálculo en funciones polinómicas y «racionales sencillas». Los LT concretan la información curricular, ocupando un espacio intermedio entre currículo y aula (Rico *et al.*, 2008). En este caso, los docentes no han usado los LT seguidos ni en la planificación ni en su actuación en el aula. En Arce, Conejo y Ortega (2014: 141) se describe el contenido de los LT para este foco.

La figura 1 muestra la leyenda utilizada para identificar los distintos elementos en los *mapas de elementos y relaciones* asociados a cada desarrollo teórico expuesto. Hemos usado diferentes tipos de recuadros para los contenidos expuestos, incluidos los ajenos al foco conceptual. Las justificaciones han sido representadas con flechas, que parten de los resultados utilizados durante la demostración y llegan al enunciado demostrado, conectando diferentes enunciados y resultados. Las relaciones asociadas a procesos de aplicación son indicadas con flechas de trazo discontinuo, bien al derivar funciones en ejemplos ilustrativos o bien al obtener derivadas de funciones particulares a partir de una general (por ejemplo, la derivada de $y=\ln(x)$ a partir de $y=\log_a(x)$). En cada recuadro con elementos del foco hemos añadido los sistemas de representación utilizados por el profesor en su exposición: verbal (distinguiendo entre discurso hablado o dictado explícito), simbólico (distinguiendo tres notaciones utilizadas para la derivada) y gráfico.

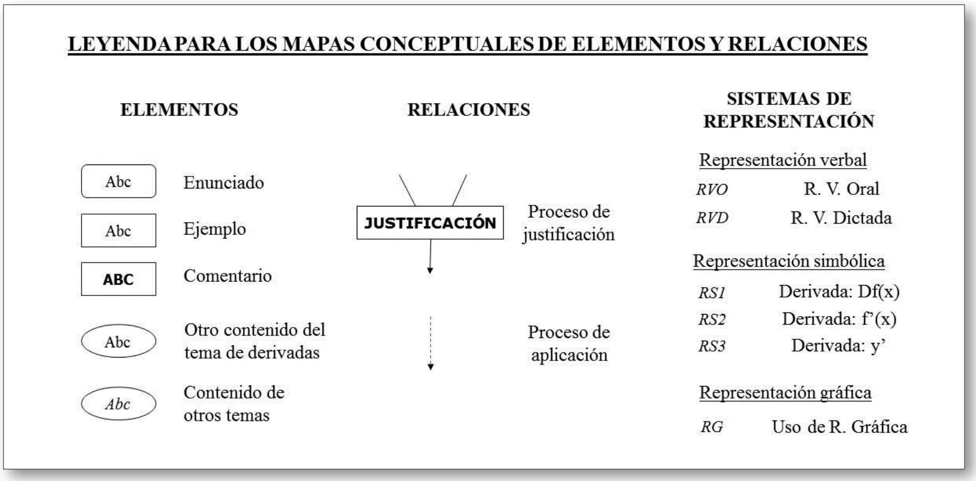


Fig. 1. Leyenda para identificar los elementos y relaciones de los mapas conceptuales.

Las figuras 2, 3 y 4 muestran los mapas conceptuales de elementos y relaciones asociados al desarrollo teórico de DO1, DO2 y DO3, respectivamente. En estas figuras y en las figuras 9 y 10, dadas las limitaciones de notación del programa CmapTools, la notación exponencial se ha sustituido por su equivalente en programas informáticos (por ejemplo, la función $f(x)=x^2$ se denotará como f(x)=x^2). Estos mapas, junto con la información complementaria recogida, nos permiten detectar semejanzas y diferencias en sus exposiciones teóricas, que se comentan a continuación.

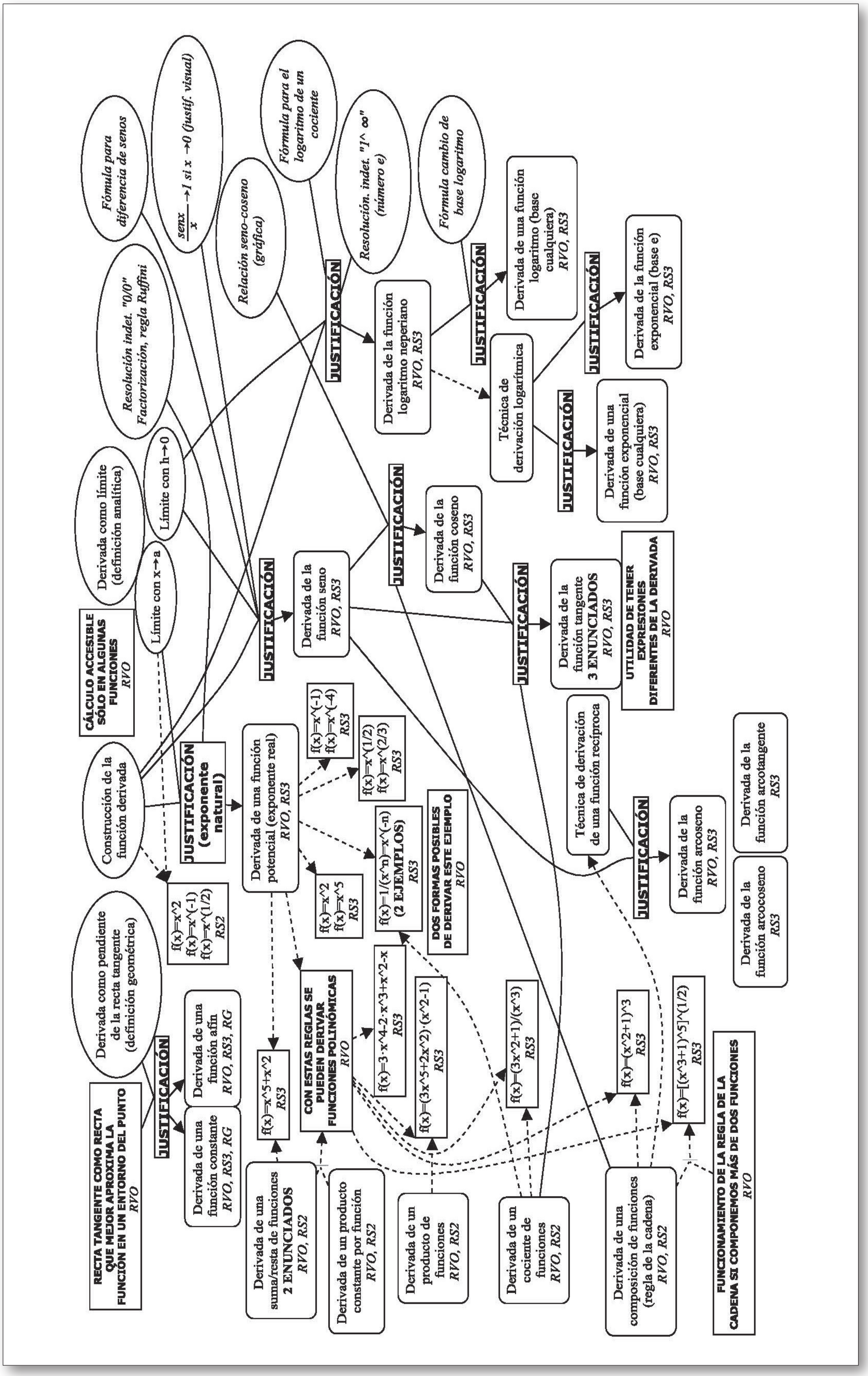


Fig. 2. Mapa conceptual de elementos y relaciones del docente DO1 (leyenda en fig. 1).

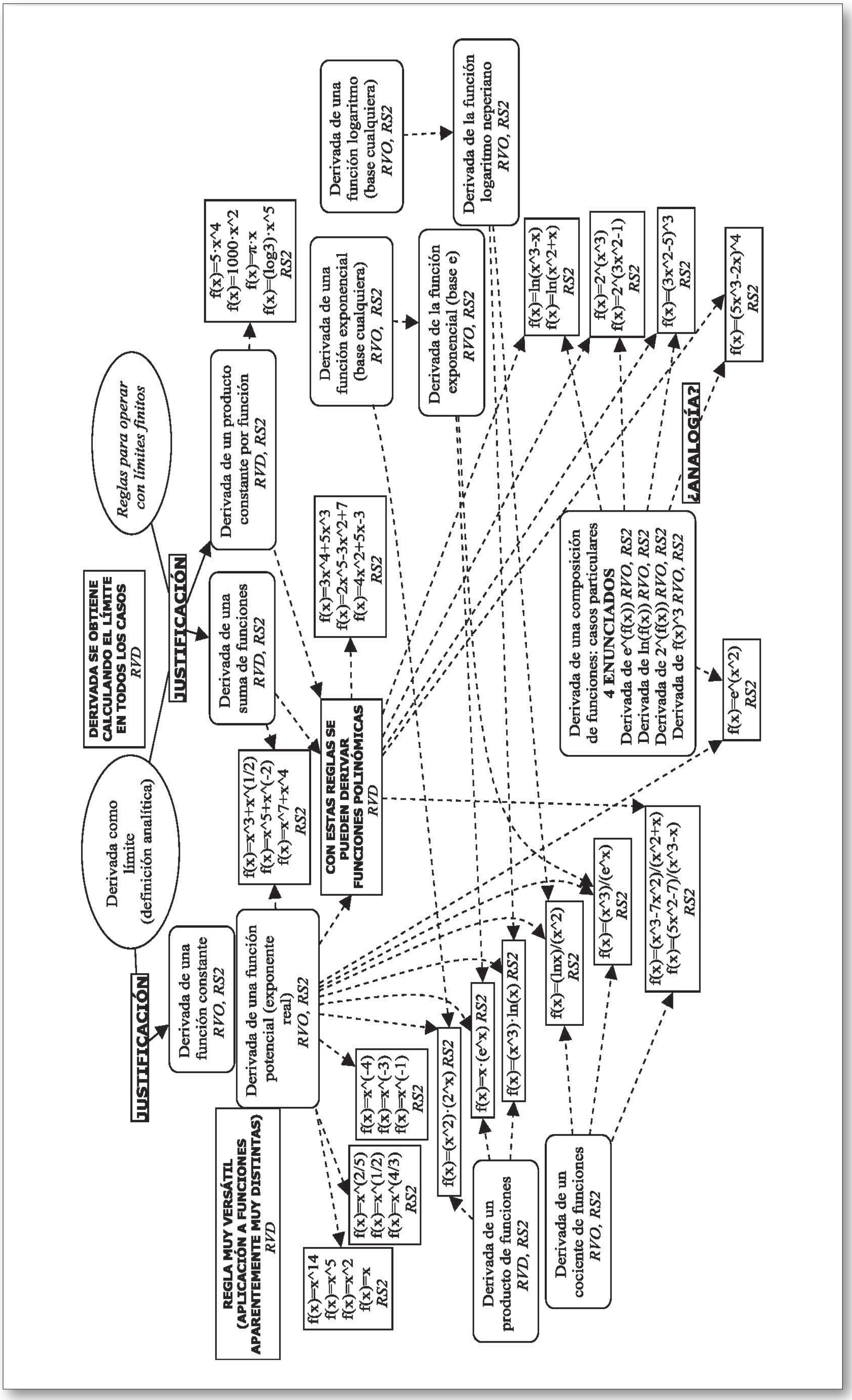


Fig. 3. Mapa conceptual de elementos y relaciones del docente DO2 (leyenda en fig. 1).

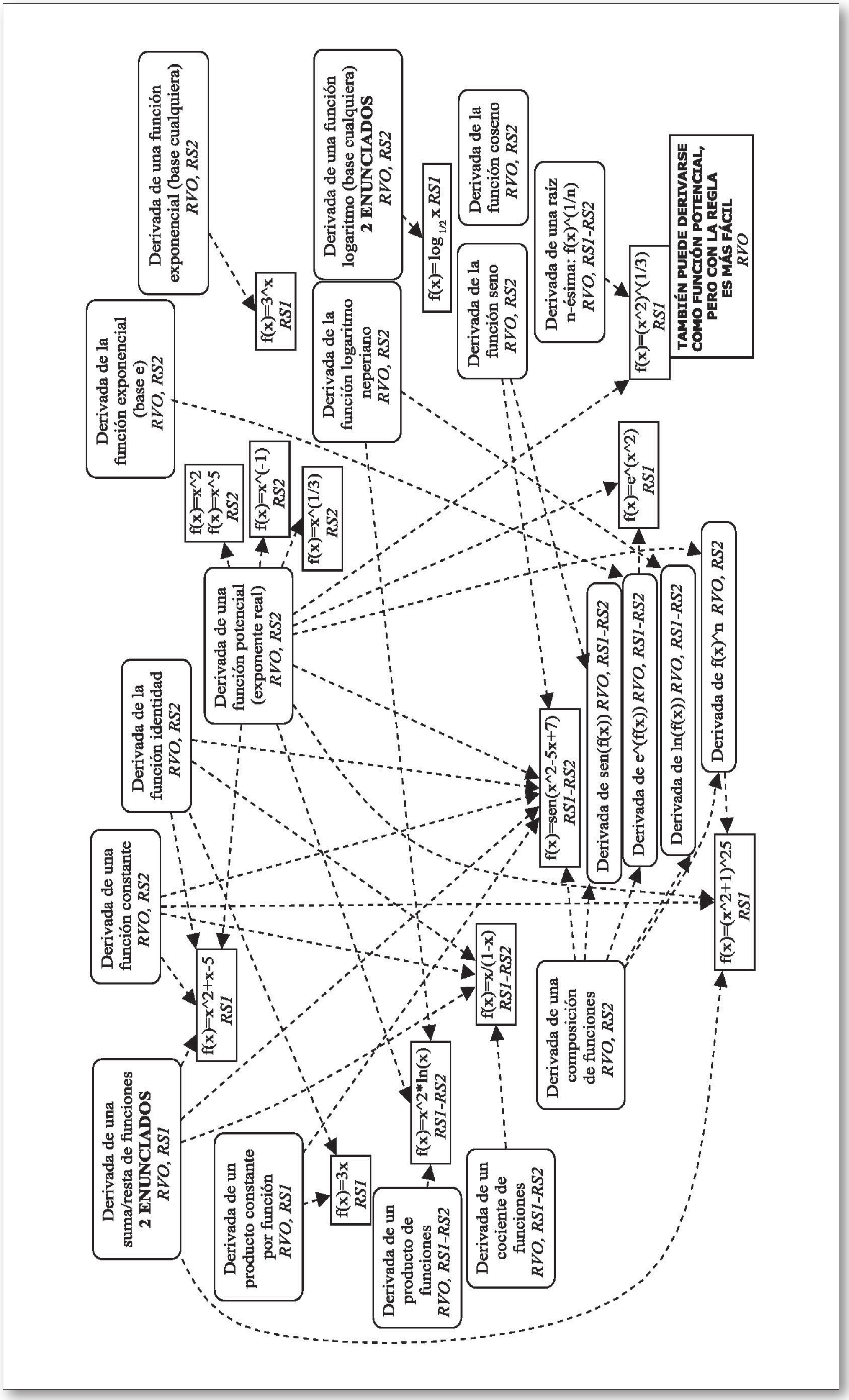


Fig. 4. Mapa conceptual de elementos y relaciones del docente DO3 (leyenda en fig. 1).

El primer elemento de la comparación es el número de elementos de cada tipo expuestos (véase tabla 1).

Tabla 1.
Elementos expuestos por cada docente

Docente	Enunciados	Ejemplos	Comentarios	Justificaciones
DO1	23	17	6	11
DO2	14	34	3	3
DO3	21	14	1	0

En relación con los enunciados, hay varias reglas desarrolladas por los tres docentes: derivada de funciones constantes, potenciales, exponenciales, logarítmicas y reglas para derivar operaciones con funciones. El DO2 expone menos enunciados, y presenta las reglas para derivar las funciones exponencial y logarítmica de base «e» como ejemplo de aplicación de las reglas para base cualquiera (que no justifica). El DO3 añade las reglas para derivar las funciones seno y coseno, así como alguna regla particular no necesaria, como la «regla para derivar la raíz enésima de una función», que se podría hacer con reglas previas. El DO1 realiza el desarrollo más completo de enunciados, con todas las funciones trigonométricas y dos técnicas de derivación: logarítmica y de la función recíproca.

Con respecto a los ejemplos, los tres docentes ejemplifican la derivada de una función potencial (abarcando exponentes naturales, enteros negativos y racionales) y las reglas para derivar operaciones con funciones. Sin embargo, el DO2 plantea al menos tres ejemplos por regla, mientras que los otros dos docentes hacen uno o dos como mucho (véanse las figuras 2, 3 y 4 y la tabla 1). Este hecho, y la mayor variedad de funciones que utiliza el DO2 en sus ejemplos, hacen que exista un abundante número de flechas asociadas a procesos de aplicación en la figura 3. Los ejemplos del DO3 tienden a ser los más sencillos y de aplicación más directa. Solo el DO1 desarrolla tres ejemplos (con funciones potenciales) donde calcula la derivada a partir de la definición analítica, rehaciéndolos posteriormente aplicando la regla. Otra diferencia es que el DO2 obvia el desarrollo de cálculos posteriores para simplificar la expresión de la derivada, algo que sí destacan DO1 y DO3 para facilitar la obtención de información sobre la función.

Los comentarios de los tres profesores se centraron en enfatizar la estructura de algunas reglas o funciones, la aplicabilidad o consecuencias de algunas reglas o la posibilidad de aplicar diferentes reglas al derivar algunas funciones, en algún caso acompañado de un juicio de valor discutible sobre cómo calcular la derivada (único comentario de DO3, véase figura 4). El DO1 expone un mayor número de comentarios, incluyendo un resultado teórico importante (caracterización de recta tangente, véase figura 2), que permite justificar las reglas para derivar funciones constantes y afines. Hay un comentario común a DO1 y DO2: la posibilidad de derivar funciones polinómicas a partir de reglas anteriores. DO3 no lo explicita, lo que provoca la aparición de muchas flechas de aplicación, asociadas a las reglas parciales usadas para derivar funciones polinómicas.

Los procesos de justificación suponen un gran contraste entre docentes: abundantes en DO1, escasos en DO2 e inexistentes en DO3. DO1 afirma en una entrevista que los desarrolla para repasar y recordar otros conceptos o técnicas presentes en ellos (que pueden verse en los numerosos recuadros elípticos de la figura 2), sin atribuir el distinto número a la diferente modalidad de matemáticas. En todo caso, las justificaciones están fuera de las *expectativas de aprendizaje* (Lupiáñez, 2009) que los tres docentes fijan para sus alumnos, es decir, de lo que esperan que los escolares aprendan según los objetivos específicos y las competencias que establecen para este tópico.

El mapa del DO1 muestra la presencia de dos bloques de relaciones muy diferenciados en su exposición: la justificación de casi todas las reglas para derivar funciones elementales y la ejemplificación, sin justificar, de las correspondientes a operaciones con funciones. Este docente recurre en sus demostraciones a diferentes definiciones de derivada en un punto: dos definiciones analíticas (límites del cociente incremental cuando $x \rightarrow a$ y cuando $h \rightarrow 0$) y la definición geométrica como pendiente de la recta tangente en un punto. El DO2 utiliza siempre el límite del cociente incremental cuando $x \rightarrow a$, pero no explicita la necesaria construcción de la función derivada a partir de la derivada puntual, de modo que se refleja la problemática detectada por Badillo *et al.* (2011) y pasa desapercibida para sus alumnos. DO3 omite esta construcción. Solo DO1 presenta explícitamente la construcción de la función derivada y la aplica correctamente en sus justificaciones.

El orden de enunciado y justificación supone otra diferencia importante entre profesores. DO2 expone primero la regla y después desarrolla la demostración. Sin embargo, DO1 usa la demostración como medio para obtener la regla, que institucionaliza después.

En los desarrollos de la regla de la cadena subyacen los niveles de comprensión de esta indicados por Clark *et al.* (1997). El DO2, que no había trabajado previamente la composición de funciones, se limita a escribir e ilustrar la regla en cuatro casos particulares: $e^{f(x)}$, $\ln(f(x))$, $2^{f(x)}$ y $f(x)^3$. No obstante, añade un ejemplo con una función del tipo $f(x)^4$ (fig. 3), con la intención de aplicar una analogía con respecto a la regla para $f(x)^3$. El DO3 primero enuncia y ejemplifica la regla de la cadena, pero después complementa el desarrollo exponiendo cuatro casos «particulares»: $\operatorname{sen}(f(x))$, $e^{f(x)}$, $f(x)^n$ y $\ln(f(x))$. Con ello, este docente parece querer abarcar tanto la situación en la que los alumnos comprenden la estructura subyacente a la regla como los que no lo consiguen. Este hecho de proporcionar reglas «directas» de derivación de funciones frente a la posible aplicación de una regla general para una estructura determinada se muestra como una característica de este profesor. Por último, DO1 presenta la regla general junto con su nombre, y realiza dos ejemplos de aplicación. La composición de tres funciones en el segundo ejemplo pretende generalizar la estructura subyacente a la regla, lo cual es enfatizado con un comentario verbal.

En relación a los sistemas de representación, todas las reglas, ejemplos y justificaciones se escriben simbólicamente en la pizarra. Además, las reglas, junto con los comentarios, se indican verbalmente en el discurso oral. El DO2, a diferencia de los otros, dicta explícitamente algunas reglas de derivación y todos sus comentarios. Los docentes han usado diferentes notaciones simbólicas para la derivada. El DO2 siempre ha optado por utilizar f'(x) o (f(x))' (que hemos denotado como RS2). DO3 alterna la notación anterior con la de operador (RS1). DO1 prefiere la notación y' o y'(a) (RS3), y es el único docente que utiliza la representación gráfica, al representar funciones genéricas constantes y afines para justificar su derivada utilizando la definición geométrica del concepto.

En resumen, DO1 ha realizado la exposición más completa de este foco conceptual, con un mayor número de enunciados, comentarios y procesos de justificación. Debido al tiempo similar de exposición en los tres docentes, este hecho muestra un ritmo global de exposición superior en DO1. Su desarrollo mezcla una visión de aplicación práctica de las reglas, al tratar la derivada de operaciones con funciones, con otra visión más centrada en la fundamentación y sistematización de reglas en la parte sobre funciones elementales, utilizando la demostración como proceso para obtener reglas. DO2 hace un desarrollo limitado en número de enunciados, pero enfatiza su aplicación a través de abundantes ejemplos de cada tipo. El número de justificaciones de este docente es reducido, con el problema implícito en ellas de la ausencia de construcción de la función derivada. Por último, DO3 hace un desarrollo centrado en la exposición de enunciados y los procesos de aplicación de estas a través, generalmente, de un ejemplo ilustrativo. No hay procesos de justificación en el desarrollo de este docente, que se caracteriza por intentar proporcionar a sus alumnos reglas de aplicación inmediata, tendiendo a evitar el proceso de reconocimiento de estructuras al aplicar reglas.

Transcripciones de los alumnos. Relaciones con el contenido desarrollado por los docentes

Hemos construido el *mapa de elementos y relaciones* asociado al registro de la exposición que cada alumno anota en su cuaderno. Estos mapas tienen la misma estructura que los anteriormente construidos, añadiendo únicamente el grado de completitud de la transcripción de cada elemento, distinguiendo entre: *transcripción completa* (TC), *transcripción incompleta* (TI) y *ausencia de transcripción* (AT). Además, hemos estudiado la presencia de otros posibles elementos añadidos por cada alumno.

La tabla 2 indica el número de enunciados transcritos por cada alumno, añadiendo en las dos últimas filas la frecuencia y el porcentaje de transcripción globales de cada aula.

Tabla 2.
Número de enunciados transcritos por estudiante y por aula

Aula *DO1* Enunciados: *23*				Aula *DO2* Enunciados: *14*				Aula *DO3* Enunciados: *21*			
Nº Est.	En. TC	En. TI	En. AT	Nº Est.	En. TC	En. TI	En. AT	Nº Est.	En. TC	En. TI	En. AT
E1	8	1	14	E10	12	0	2	E17	21	0	0
E2	3	0	20	E11	10	0	4	E18	21	0	0
E3	13	0	10	E12	12	0	2	E19	21	0	0
E4	12	1	10	E13	13	0	1	E20	19	0	2
E5	23	0	0	E14	10	0	4	E21	17	0	4
E6	0	0	23	E15	12	0	2	E22	20	0	1
E7	3	1	19	E16	14	0	0	E23	18	1	2
E8	19	0	4					E24	20	0	1
E9	16	3	4					E25	17	0	4
								E26	19	0	2
Frec.	97	6	104	Frec.	83	0	15	Frec.	193	1	16
%	46,9	2,9	50,2	%	84,7	0	15,3	%	91,9	0,5	7,6

La tabla 2 muestra un comportamiento muy homogéneo entre los alumnos de DO2 y DO3, transcribiendo los enunciados casi en su totalidad salvo algunos casos especiales (casos particulares de composición de funciones o una regla con varias expresiones para la derivada). Por el contrario, el porcentaje de transcripción es menor y más variable entre los alumnos del DO1, encontrando desarrollos completos (E5) y otros muy insuficientes (E2, E6 y E7), y una transcripción muy escasa de las técnicas de derivación (solo E5 transcribe la de la función recíproca). Además, existen algunas transcripciones incompletas de enunciado y justificación (véase figura 5), provocadas por la falta de escritura de la construcción de la función derivada y de la institucionalización de la regla, lo que puede ser reflejo de una falta de percepción de los alumnos de la diferenciación entre derivada puntual y global.

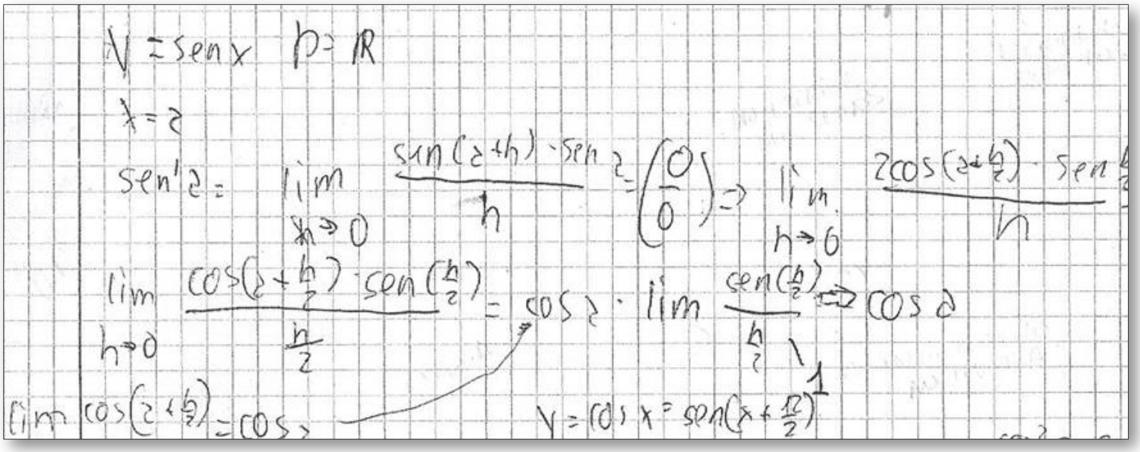


Fig. 5. Transcripción incompleta (enunciado y justificación) de la derivada de la función seno (alumno E9).

La tabla 3 muestra el número de ejemplos transcritos por cada alumno y, como en la tabla 2, los datos globales por aula.

Tabla 3.
Número de ejemplos transcritos por estudiante y por aula

Aula *DO1*				Aula *DO2*				Aula *DO3*			
Ejemplos: *17*				Ejemplos: *34*				Ejemplos: *14*			
Nº Est.	Ej. TC	Ej. TI	Ej. AT	Nº Est.	Ej. TC	Ej. TI	Ej. AT	Nº Est.	Ej. TC	Ej. TI	Ej. AT
E1	3	0	14	E10	20	0	14	E17	14	0	0
E2	2	0	15	E11	21	0	13	E18	13	1	0
E3	5	2	10	E12	34	0	0	E19	14	0	0
E4	5	1	11	E13	32	0	2	E20	14	0	0
E5	16	0	1	E14	16	0	18	E21	4	0	10
E6	2	1	14	E15	27	0	7	E22	14	0	0
E7	0	1	16	E16	34	0	0	E23	10	2	2
E8	4	2	11					E24	14	0	0
E9	7	0	10					E25	13	0	1
								E26	10	0	4
Frec.	44	7	102	Frec.	184	0	54	Frec.	120	3	17
%	28,8	4,6	66,7	%	77,3	0	22,7	%	85,7	2,1	12,1

Observamos cómo aumenta la diferencia de las clases de DO2 y DO3 frente a DO1, pero los porcentajes de transcripción de los ejemplos son algo menores en los tres casos, con mayor diversidad entre estudiantes.

El análisis cruzado de las transcripciones nos ha permitido detectar diferentes patrones de comportamiento en los alumnos al transcribir las reglas ejemplificadas. En cada una, consideramos que el alumno puede tener un comportamiento *exhaustivo*, si transcribe tanto la regla como todos sus ejemplos ilustrativos (sean uno o varios); un comportamiento *selectivo-estratégico*, si recoge al menos uno pero no todos los ejemplos expuestos; o puede haber una *ausencia de relaciones* de aplicación asociadas a la regla, al transcribir la regla sin ejemplos ilustrativos, un ejemplo sin la regla que pretende ilustrar o no transcribir ambos. Con esta diferenciación, y según el comportamiento predominante en cada alumno, hemos adaptado y detallado la clasificación en perfiles indicada en Arce *et al*. (2014):

– Ocho alumnos muestran un *comportamiento exhaustivo siempre*, registrando todas las reglas y ejemplos ilustrativos, es decir, todos los procesos de aplicación. Son E5, E16, E17, E18, E19, E20, E22 y E24, con mayoría del aula de DO3.
– Cuatro alumnos exhiben un *comportamiento exhaustivo en la mayoría de los casos*, registrando la mayoría de procesos de aplicación salvo alguno puntual. Son E12, E13, E15 y E25. La falta de exhaustividad se concentra en la regla para derivar una suma de funciones (comportamiento selectivo-estratégico, quizá por su sencillez) o en alguna regla «particular» de composición de funciones, donde se registra el ejemplo sin la regla.
– Cinco alumnos tienen un *comportamiento exhaustivo en las reglas ilustradas con un ejemplo y selectivo-estratégico en las reglas ilustradas con varios ejemplos.* Las relaciones de aplicación abarcan todos los elementos así relacionados. Son E10, E11, E14, E23 y E26, siendo más marcado en los alumnos de DO2, que exponía un alto número de ejemplos por regla (véase apartado anterior). La figura 6 contrasta el comportamiento selectivo-estratégico de un alumno en una regla profusamente ejemplificada (cuatro ejemplos) frente a un alumno exhaustivo.

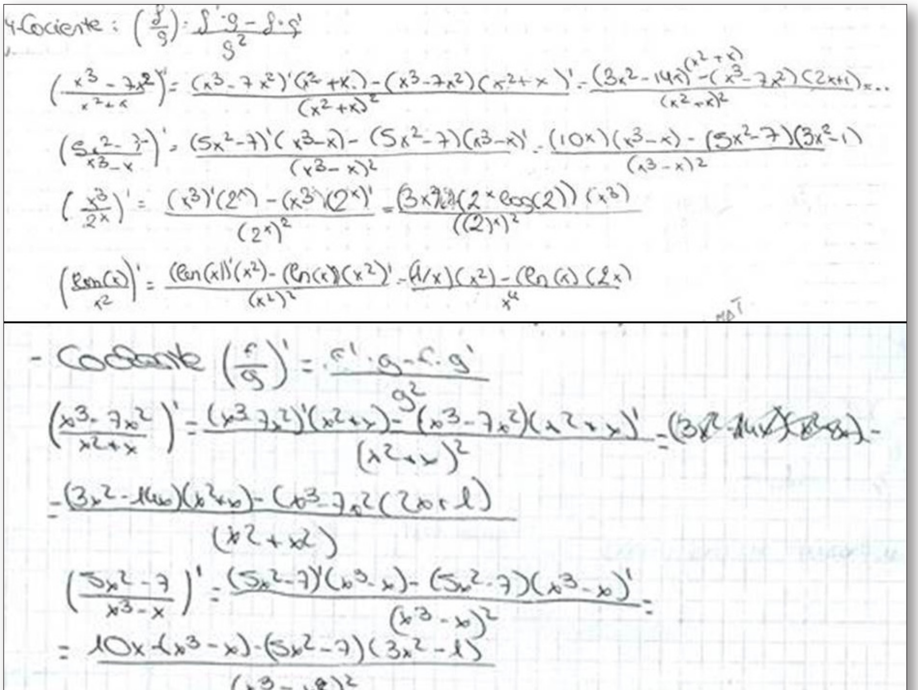
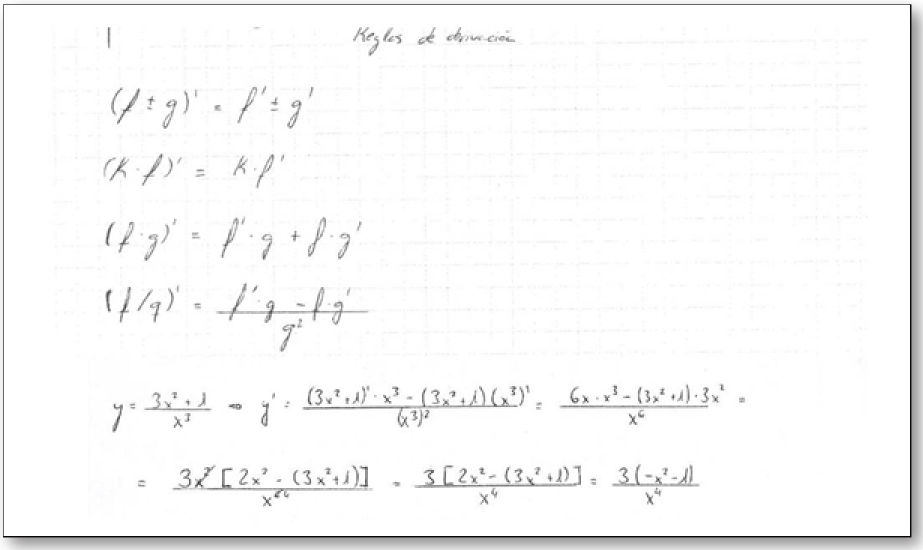


Fig. 6. Alumno exhaustivo (E13, arriba) y selectivo-estratégico (E10, abajo) para la misma regla.

– Un alumno, E3, tiene un *comportamiento variable* (exhaustivo, selectivo-estratégico, transcripción solo de la regla), con una presencia parcial de relaciones asociadas a procesos de aplicación.
– Tres estudiantes, E8, E9 y E21, son mayoritariamente *selectivo-estratégicos en las reglas ilustradas con varios ejemplos, sin ejemplificar las reglas con solo un ejemplo ilustrativo*, con una baja presencia de procesos de aplicación. La figura 7 muestra este comportamiento en E8. En este caso, DO1 expuso dos ejemplos para la derivada del cociente y uno para las restantes (véase figura 2).



Reglas de derivación

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(k\cdot f)' = k\cdot f'$

$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

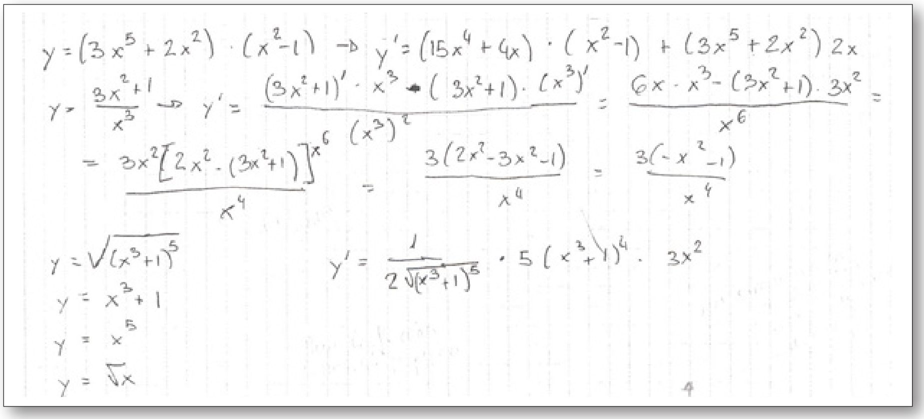
$(f/g)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$

$y=\frac{3x^2+1}{x^3} \to y' = \frac{(3x^2+1)'\cdot x^3-(3x^2+1)(x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{6x\cdot x^3-(3x^2+1)\cdot 3x^2}{x^6} =$

$= \frac{3x^2[2x^2-(3x^2+1)]}{x^6} = \frac{3[2x^2-(3x^2+1)]}{x^4} = \frac{3(-x^2-1)}{x^4}$

Fig. 7. Escaneo de E8.

– Los cinco alumnos restantes (todos del DO1) recogen un *número muy reducido o inexistente de procesos de aplicación*. E1, E2 y E4 fluctúan entre el registro de la regla sin ejemplos, el ejemplo sin la regla o nada. La figura 8 muestra un extracto de E1, donde registra varios ejemplos sin copiar la regla. Los alumnos E6 y E7 no anotan ni reglas ni ejemplos.



$y=(3x^5+2x^2)\cdot(x^2-1) \to y'=(15x^4+4x)\cdot(x^2-1)+(3x^5+2x^2)2x$

$y=\frac{3x^2+1}{x^3} \to y'=\frac{(3x^2+1)'\cdot x^3 - (3x^2+1)\cdot(x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{6x\cdot x^3-(3x^2+1)\cdot 3x^2}{x^6}=$

$= \frac{3x^2[2x^2-(3x^2+1)]}{x^4} = \frac{3(2x^2-3x^2-1)}{x^4} = \frac{3(-x^2-1)}{x^4}$

$y=\sqrt{(x^3+1)^5}$ $\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{(x^3+1)^5}}\cdot 5(x^3+1)^4\cdot 3x^2$

$y=x^3+1$

$y=x^5$

$y=\sqrt{x}$

Fig. 8. Registro de ejemplos sin tomar la regla ilustrada (E1).

La tabla 4, similar a las tablas 2 y 3, muestra el número de justificaciones transcritas por cada alumno de las aulas de DO1 y DO2 y los datos totales por aula.

Tabla 4.
Número de justificaciones transcritas por estudiante y por aula

Aula *DO1*				Aula *DO2*			
Justificaciones: *11*				Justificaciones: *3*			
Nº Est.	Just. TC	Just. TI	Just. AT	Nº Est.	Just. TC	Just. TI	Just. AT
E1	4	2	5	E10	0	1	2
E2	1	0	10	E11	1	0	2
E3	3	0	8	E12	1	1	1
E4	7	1	3	E13	1	1	1
E5	9	2	0	E14	1	0	2
E6	0	0	11	E15	1	0	2
E7	1	1	9	E16	1	1	1
E8	0	2	9				
E9	5	5	1				
Frec.	30	13	56	Frec.	6	4	11
%	30,3	13,1	56,6	%	28,6	19,0	52,4

Los porcentajes globales de transcripción en ambas aulas son similares y son bajos. No se recogen algo más de la mitad de los procesos de justificación expuestos, lo que puede deberse a que estos no formen parte de las *expectativas de aprendizaje* (Lupiáñez, 2009) establecidas por los docentes para sus alumnos. También encontramos un número apreciable de transcripciones incompletas, lo que puede estar provocado por la mayor complejidad para simultanear el seguimiento del proceso y su registro, y por la problemática sobre las derivadas puntual y global ya comentada.

De nuevo, hay mayor variabilidad en el aula del DO1 y más homogeneidad con DO2, aunque en esta aula el número sea poco significativo. Analizamos más en profundidad los comportamientos de los alumnos de DO1, comparándolos con su conducta al transcribir justificaciones y ejemplos.

El estudiante E5 refuerza su carácter exhaustivo transcribiendo todos los procesos de justificación. Solo en dos casos lo hace parcialmente, al no tomar la caracterización de la recta tangente utilizada para demostrar la derivada de las funciones constante y afín. Los estudiantes E4 y E9 registran gran parte de los procesos de justificación y las relaciones asociadas a ellos, omitiendo solo unas pocas reglas. Esto contrasta con su transcripción mucho más incompleta de los procesos de aplicación. En particular, E4 presenta dos comportamientos muy distintos, que pueden verse en el mapa de elementos y relaciones de la figura 9. E4 transcribe y justifica la mayoría de las reglas de derivación de funciones elementales; pero no transcribe las reglas para derivar operaciones con funciones, tomando solo algunos ejemplos aislados, que provocan inconsistencias en su desarrollo.

El alumno E8 se caracteriza por transcribir las reglas sin registrar, apenas, sus demostraciones (muy baja incidencia de procesos de justificación), al igual que sucedía con los procesos de aplicación. Así, E8 tiene un cuaderno cuyo contenido se asemeja a una colección de reglas expuestas (y no todas). El alumno E1 presenta un comportamiento heterogéneo: registra reglas justificadas, reglas sin justificar, omite algunas e, incluso, encontramos dos transcripciones inacabadas de demostraciones sin escribir la regla.

Tres estudiantes, E2, E3 y E7, transcriben un número reducido de reglas justificadas, pero casi siempre con su demostración. Esta incompletitud provoca inconsistencias en los pocos procesos de justificación recogidos, al faltar reglas previas que son utilizadas. La figura 10 muestra este hecho en el mapa de elementos y relaciones de E3. Este alumno, al contrario que E4, parece preferir anotar procesos de aplicación frente a justificaciones, lo cual se refrenda al comparar sus mapas (figuras 9 y 10). Las transcripciones de E2, E6 y E7 son muy incompletas en todo tipo de elementos, registrando solo retazos aislados.

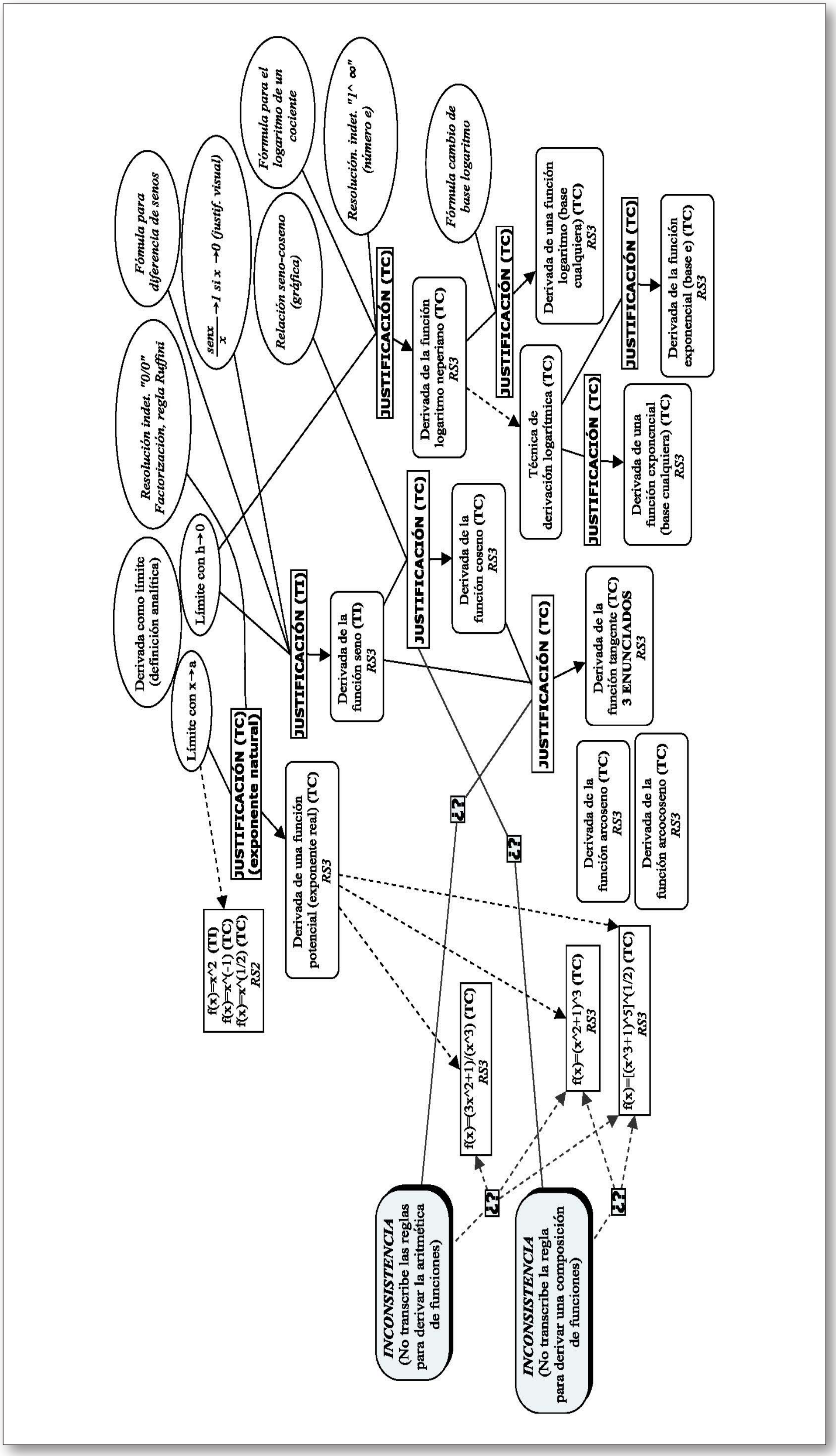


Fig. 9. Mapa conceptual de elementos y relaciones de E4 (leyenda en fig. 1).

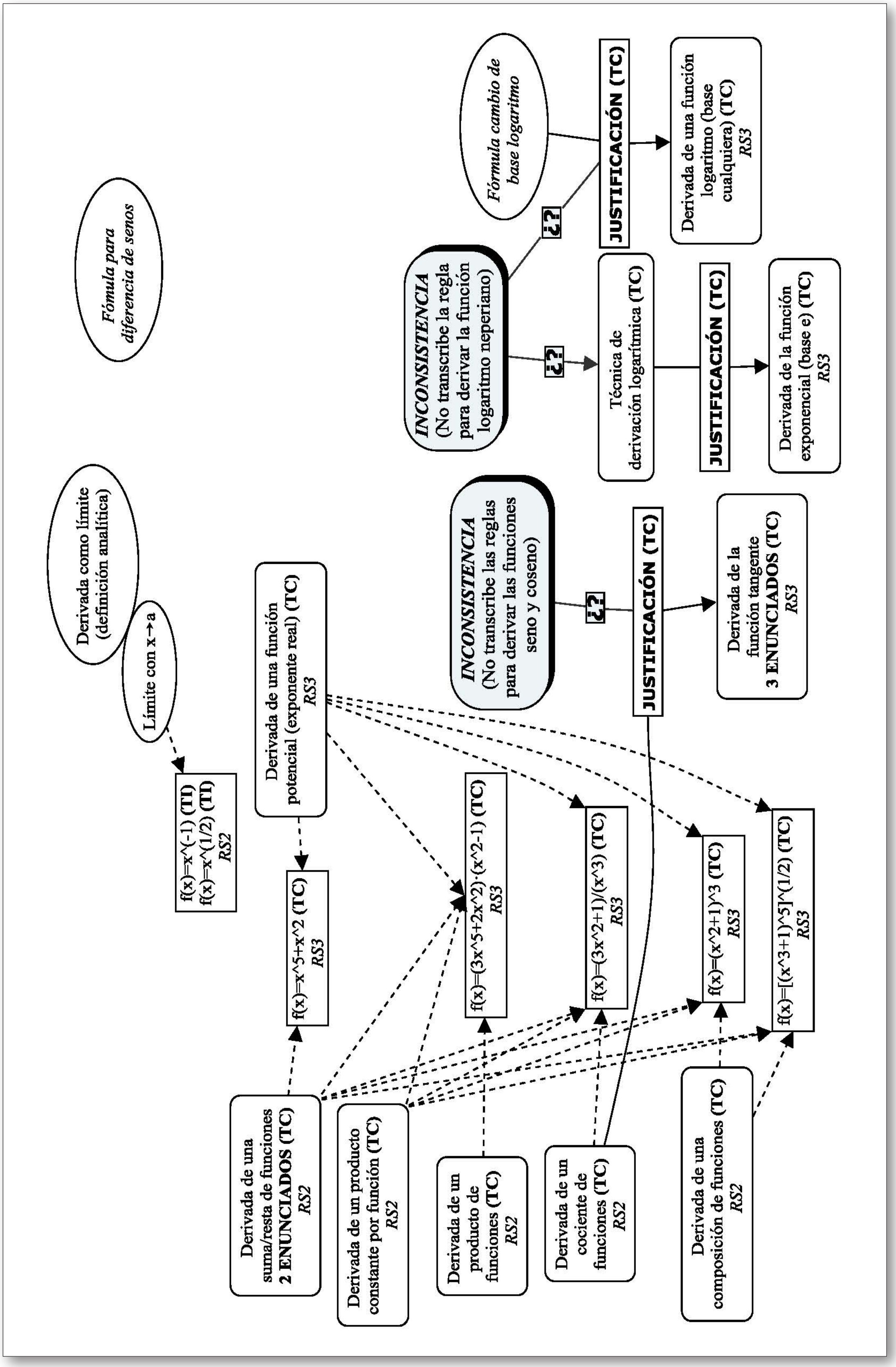


Fig. 10. Mapa conceptual de elementos y relaciones de E3 (leyenda en fig. 1).

El dictado verbal de los comentarios (a modo de «observaciones») por DO2 provoca una diferencia muy acusada en la transcripción de estos elementos: anotación total en sus alumnos frente a una escritura casi nula en las otras dos aulas. En particular, los alumnos parecen no dar importancia a los comentarios que relacionan reglas o que indican la posibilidad de aplicar diferentes reglas para derivar una función, que favorecería un aprendizaje más relacional y menos memorístico de estas. Su transcripción es casi inexistente. En sentido contrario, E19 escribe una aclaración propia de tipo simbólico (figura 11) donde pretende relacionar dos reglas de derivación tratadas de modo independiente en el aula: las reglas para derivar la función identidad y cualquier función potencial.

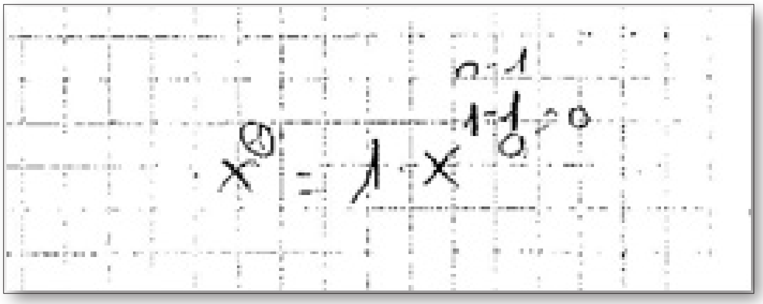


Fig. 11. Comentario de carácter relacional (E19).

No hay más anotaciones personales de tipo relacional. Sí existen *aclaraciones o ayudas propias* en algunos alumnos al transcribir elementos del contenido teórico. Encontramos ayudas de tipo simbólico al desarrollar cálculos de límites en justificaciones, generalmente para indicar explícitamente la tendencia de alguna función, muy abundantes en E9 (véase la figura 5). Tan solo E5 añade una aclaración de tipo verbal, recordando la definición de derivada utilizada al justificar la derivada de las funciones constante y afín: «Derivada: Pendiente de las rectas tangentes de f(x)».

En los ejemplos también existen algunas aclaraciones, con dos propósitos principales. Primero, indicar explícitamente la regla de derivación aplicada, a través de flechas, asteriscos o números. En particular, siete alumnos suelen indicar explícitamente la sustracción de una unidad en el exponente al aplicar la regla para derivar una función potencial. Segundo, mostrar explícitamente la derivada de cada una de las funciones al derivar operaciones con funciones. Los docentes DO1 y DO3 lo detallaron en algunos casos, pero cuatro alumnos (E17, E19, E20 y E24) generalizan el hábito, añadiendo incluso una aclaración verbal: «(5)'=0 porque es una constante». Tres alumnos de DO1 realizan aclaraciones al aplicar la regla de la cadena: diagramas con flechas detallando la composición (E9) o composiciones parciales obteniendo cada uno de los factores cuyo producto es la derivada (E5 y E8).

En relación a los *sistemas de representación*, casi todos los alumnos optan por la representación simbólica de enunciados, ejemplos y justificaciones, transcribiendo el simbolismo escrito por los profesores en la pizarra. La transcripción verbal de reglas por los alumnos solo se produce con DO2, en aquellas que dictó explícitamente, aunque algún alumno sustituyó palabras por símbolos o abreviaturas (véase figura 12, con escaneo de E12). En las otras dos aulas tan solo un alumno, E21, transcribe de forma verbal una de las reglas.

Los alumnos tampoco escriben verbalmente el tipo de función u operación cuya derivada se presenta, siendo este un comportamiento esporádico salvo en tres alumnos (E8, E19 y E21).

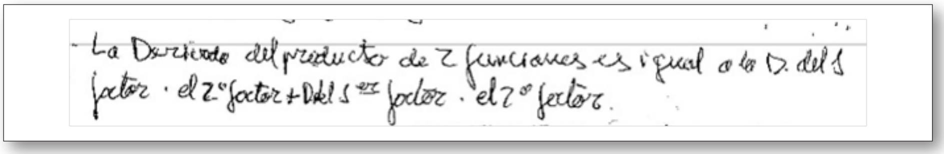

- La Derivada del producto de 2 funciones es igual a la D. del 1 factor · el 2º factor + D del 1er factor · el 2º factor.

Fig. 12. Transcripción verbal, errónea, de regla (E12).

Solo DO1 utilizó representaciones gráficas, en tres justificaciones. El estudiante E5 es el único que escribe todas, E9 anota solo dos (las asociadas a las funciones constante y afín). No se ha encontrado ninguna representación gráfica en el resto de alumnos participantes, por lo que la incidencia de este tipo de representaciones también es muy reducida o nula.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Los resultados obtenidos del análisis evidencian una respuesta negativa a la pregunta inicial del artículo. A pesar de las similitudes metodológicas entre los tres docentes, con un enfoque expositivo «tradicional», existe gran diversidad en los apuntes de los estudiantes, incluso dentro de la misma clase. Es cierto que existe algún matiz metodológico, como el dictado de DO2, que provoca diferencias importantes. También podría apelarse a diferencias provocadas por distintos niveles de atención del alumnado. Pero, como verbalizan en las entrevistas, los alumnos toman decisiones propias y conscientes al realizar las transcripciones, influidas también por la naturaleza del contenido presentado y la metodología seguida por el docente durante el curso. En este apartado presentaremos varias evidencias de ello.

Todos los estudios que buscan clasificar los apuntes tomados por los alumnos reportan la existencia de alumnos que buscan «grabar» fielmente la clase, copiando todo lo expuesto. En nuestro estudio se han detectado ocho estudiantes (alrededor del 30%) con este comportamiento *copista* o *exhaustivo* al tomar enunciados de las reglas y técnicas de derivación y ejemplos de aplicación. Encontramos este comportamiento en las tres aulas, aunque es mayoritario (seis de diez) en el aula de DO3, quizá por basar su exposición en una colección de reglas acompañadas de ejemplos de aplicación directa (véase figura 4). Sin embargo, esa exhaustividad no se mantiene al considerar las justificaciones y, sobre todo, los comentarios (a excepción del aula de DO2, por el matiz metodológico del dictado). Tan solo E24 tomó el único comentario expuesto por DO3; mientras que E5, que anota todos los enunciados, ejemplos y justificaciones, solo transcribe uno de los seis comentarios del DO1.

En las entrevistas, los alumnos recalcan la importancia del registro de las fórmulas, de los ejemplos y de lo escrito en la pizarra, destacando la escritura en este medio frente al discurso oral del docente. Así, en ocasiones, parecen tener en cuenta solo el medio de exposición y no la naturaleza del contenido expuesto, como se deduce de esta frase de E3, compartida por otros alumnos: «A algo que el profesor dé mucha importancia, lo escribe en la pizarra; si no le da tanta, pues lo dice oralmente».

Nogueira (2005) señala la disyuntiva de los estudiantes inexpertos en la toma de apuntes al tener que decidir entre sistemas semióticos simultáneos, como la escritura en pizarra y el discurso oral, prevaleciendo generalmente el primero. También indica la dificultad para que los alumnos identifiquen conexiones orales entre elementos que complementan la escritura en la pizarra. Ambos comportamientos se reafirman en nuestro estudio, donde se anotan mayoritaria y simbólicamente fórmulas y ejemplos, siendo apenas recogidos los comentarios orales destinados a relacionar diferentes reglas entre sí o a indicar la posibilidad de aplicar diferentes reglas de derivación a una misma función. Las justificaciones, que permiten relacionar enunciados y sistematizar de forma lógica su desarrollo, son generalmente poco transcritas. Todo ello refleja una visión de las matemáticas donde prima una comprensión instrumental frente a una relacional (en términos de Skemp, 1976) y una evaluación del alumnado, en consecuencia, con un carácter procedimental basado en relaciones de aplicación.

Así, los apuntes de los alumnos de este foco conceptual presentan características similares a las expuestas por Shield y Galbraith (1998) en su estudio sobre la escritura expositiva de los alumnos: predominio del aspecto algorítmico de las matemáticas y baja presencia de justificaciones, observaciones o explicaciones sobre la utilización o no de reglas y procedimientos. Es cierto que algunos estudiantes acompañan su transcripción con anotaciones personales que completan sus apuntes, pero la mayoría tienen un marcado carácter procedimental, siendo ayudas de carácter práctico. Estos elementos son destacados en la entrevista por estudiantes como E17 o E24, que buscan con ellos facilitar el estudio de la asignatura a través de la revisión de su cuaderno de clase. Tan solo E19 hace una anotación con carácter relacional (véase fig. 11), que es, prácticamente, la única muestra de escritura propia del dominio privado del estudiante (en términos de Fried y Amit, 2003), buscando reflexionar y externalizar sus pensamientos a través de la escritura.

El desarrollo más completo del foco conceptual por parte del DO1, con un número mayor de enunciados, justificaciones y comentarios expuestos, ha dado lugar a comportamientos muy distintos entre sus alumnos, detectándose una amplia gama de perfiles intermedios característicos, más allá de perfiles del tipo «todo» o «nada». Por una parte, dos alumnos (E4 y E9) han optado mayoritariamente por registrar los procesos de justificación frente a los de aplicación, pudiendo considerar de mayor importancia los primeros, aunque E9 indique en la entrevista que tiende a «copiar todo». El alumno E3 muestra el comportamiento contrario. E8 basa su anotación en los enunciados de las reglas, por lo que su transcripción es una yuxtaposición de reglas inconexas, sin apenas relaciones de aplicación y justificación. Varios alumnos de DO2 y DO3 presentan otro perfil destacable: los que anotan al menos un ejemplo en todas las reglas ejemplificadas, pero que no suelen tomar todos cuando se hacen varios.

Apuntamos tres hechos que pueden haber contribuido a las grandes diferencias entre alumnos y la menor transcripción de enunciados detectada en el aula del DO1: la utilización de la justificación como proceso de obtención e institucionalización posterior de una regla, el desarrollo más completo de este docente y con un mayor ritmo, y la posible dificultad de los estudiantes para distinguir entre los diferentes elementos y procesos matemáticos y su papel (Ibañes y Ortega, 2003). No obstante, son necesarios estudios específicos que clarifiquen la posible influencia de cada uno de estos hechos.

Esos diferentes comportamientos al transcribir los elementos y relaciones dan lugar a inconsistencias en los desarrollos anotados por varios alumnos: ejemplos sin haber apuntado la regla que ilustran (figura 9) o ausencia de enunciados que son usados más tarde en demostraciones (figura 10). A estas inconsistencias se une la frecuente presencia de errores de transcripción (como el mostrado en la figura 12). Ambas circunstancias dificultan el papel del cuaderno como herramienta para ayudar al estudio y aprendizaje de los contenidos teóricos. Este uso se muestra mayoritario en los alumnos, que argumentan la mayor proximidad del cuaderno a lo desarrollado y realizado en la clase, con el LT como mero complemento.

En resumen, este estudio evidencia la presencia de comportamientos muy diferentes en el alumnado al transcribir en sus cuadernos la exposición teórica de un tópico, como el de reglas y técnicas de derivación, de carácter procedimental. Estos comportamientos son reflejo de las diferentes visiones hacia las matemáticas de los alumnos, el contenido expuesto por el profesor, la forma de exposición y el distinto rol del cuaderno para estudiar la asignatura.

El cuaderno se ha mostrado como una herramienta básica de estudio para muchos alumnos, donde escriben y hacen matemáticas, reflexionan y resuelven problemas. La integración de nuevas tecnologías en el aula puede hacer cambiar el soporte físico de esta herramienta, pero no debe eliminarse. En este momento de transición, estudiar cómo los alumnos elaboran y usan su cuaderno es esencial para plantear transiciones adecuadas. Las nuevas tecnologías fomentan entornos de trabajo más dinámicos y constructivos que una exposición teórica (generalmente unidireccional y con contenido ya construido), lo que provoca la presencia de más puntos posibles de atención (profesor, software, compañeros) y un aumento de las decisiones del alumno sobre cómo recordar lo vivido. Esto puede ser un punto importante de conflicto puesto que, como sucedió en Nogueira (2005) y ha sucedido en nuestro estudio, con solo dos variables de atención (pizarra y discurso oral del docente), muchos estudiantes tienden a centrar su atención en un medio, teniendo poco en cuenta la naturaleza e importancia del contenido presentado.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor recibe la ayuda y financiación de una beca FPU (Ref.: FPU12/02241) del MECD. Agradecemos a docentes y alumnos participantes su colaboración desinteresada en el estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arce, M., Conejo, L. y Ortega, T. (2014). ¿Cómo transcriben los alumnos en sus cuadernos las reglas y técnicas de derivación? Un estudio en tres aulas de Bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 137-146). Salamanca: SEIEM.

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias,* 29(2), pp. 191-206.

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido*. Madrid: Akal.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., Tolias, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule? *Journal of Mathematical Behavior,* 16(4), pp. 345-364.
http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90012-2

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres: Routledge.

Colera, J. y García, R. (2008*a*). *Matemáticas I. 1º de Bachillerato.* Madrid: Anaya.

Colera, J. y García, R. (2008*b*). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. 1º de Bachillerato.* Madrid: Anaya.

Courant, R. y Robbins, H. (1964). *¿Qué es la Matemática?* Madrid: Aguilar.

Fonseca, C. y Gascón, J. (2002). Organización matemática en torno a las técnicas de derivación en la Enseñanza Secundaria. En J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano, J. M. Gairín y L. Blanco (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 205-223). Logroño: SEIEM.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Noveno simposio de la SEIEM* (pp. 111-128). Córdoba: SEIEM.

Fried, M. & Amit, M. (2003). Some reflections on mathematics classroom notebooks and their relationship to the public and private nature of student practices. *Educational Studies in Mathematics,* 53(2), pp. 91-112.
http://dx.doi.org/10.1023/A:1025572900956

Godino, J., Contreras, Á. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), pp. 39-88.

Harel, G., Selden, A. & Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 147-172). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(1), pp. 49-64.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Monereo, C., Carretero, R., Castelló, M., Gómez, I. y Pérez Cabaní, M. L. (1999). Toma de apuntes en estudiantes universitarios: descripción de las condiciones de un escenario específico. En J. I. Pozo y C. Monereo (Eds.), *El aprendizaje estratégico. Enseñar a aprender desde el currículo* (pp. 219-236). Madrid: Santillana.

Monereo, C. y Pérez Cabaní, M. L. (1996). La incidencia de la toma de apuntes sobre el aprendizaje significativo. Un estudio en enseñanza superior. *Infancia y Aprendizaje,* 73, pp. 65-86. http://dx.doi.org/10.1174/02103709660560555

Nogueira, S. (2005). Efectos del uso de la pizarra en la toma de apuntes de estudiantes universitarios. *Cultura y Educación*, 17(4), pp. 373-385. http://dx.doi.org/10.1174/113564005775133757

Picado, M. y Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA,* 6(1), pp. 11-27.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática,* 29(51), pp. 60-89. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 1, pp. 39-63.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma: Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 58, pp. 7-23.

Saint-Onge, M. (1997). *Yo explico, pero ellos, ¿aprenden?* Bilbao: Mensajero.

Salgado-Horta, D. y Maz-Machado, A. (2013). Toma de apuntes y aprendizaje en estudiantes de Educación Superior. *Revista Complutense de Educación*, 24(2), pp. 341-358. http://dx.doi.org/10.5209/rev_rced.2013.v24.n2.42083

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), pp. 267-296.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education.* http://dx.doi.org/10.1007/s10763-014-9544-y

Shield, M. & Galbraith, P. (1998). The analysis of expository writing in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 36, pp. 29-52. http://dx.doi.org/10.1023/A:1003109819256

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, pp. 20-26.

Van Meter, P., Yokoi, L. & Pressley, M. (1994). College students' theory of note-taking derived from their perceptions of note-taking. *Journal of Educational Psychology,* 86(3), pp. 323-338. http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.86.3.323

How are the mathematics notes written by a student? Influence of the mathematical elements and their relations

Matías Arce Sánchez, Laura Conejo Garrote, Tomás Ortega del Rincón
Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática. Universidad de Valladolid, España.
arcesan@am.uva.es, lconejo@am.uva.es, ortega@am.uva.es

There is a high number of pedagogical studies in higher education that analyse the process of note-taking and the notes written by the students. However, no research about note-taking of mathematical contents is found. This paper presents an investigation about note-taking in mathematics (topic: derivative of a function, specifically the derivative rules and techniques) developed in three classes of high school students (Grade 11) in which mathematics teachers use a traditional methodology. The objectives of the investigation are:

O1: Establish similarities and differences between the content taught on this topic by each participating teacher.
O2: Detect different behaviours in the students when they transcribe this content, analysing the notes taken by them.
O3: Identify links between the elements and relations presented by the teachers, the behaviours of transcription in the students and the role of the notes for them.

The content analysis framework developed by Rico and colleagues (Rico, Marín, Lupiáñez & Gómez, 2008; Rico, 2012) was used to analyse the content presented by the teachers and transcribed by the students. This framework has three dimensions of analysis:

Conceptual structure: an organised system of concepts, procedures, and relations among them, their properties and truthfulness criteria, which lead to the mathematical structure that organizes and justifies them. Here, three kinds of elements are considered within the conceptual structure: the *statements* of the derivative rules and techniques, their *proofs* and other *comments* (observations that emphasise the relationship between different statements or its applicability).

Phenomenology: it includes the situations, contexts or problems that give rise to the conceptual structure and give meaning to it. In this study, the phenomenology has been reduced to the *examples* of application of the rules and techniques.

Systems of representation: it includes the expressions or signs through which a mathematical content is presented, allowing the communication of ideas. Here, the systems of representation used to present or transcribe the mathematical elements are analysed transversely.

Besides, two different types of relations between the elements (statements, proofs, comments and examples) have been considered: relations associated with application processes or with justification processes. Using this framework, *maps of elements and relations* were built to compare the expositions of each mathematics teacher and the transcription of each student in his/her notebook.

The three participating classes, chosen by availability, have a low number of students (26 adding up the three). The research team made no changes in the planning and teaching: the methodology of each teacher was expositive, with no use of the textbook. The data gathered was: class journal of each teacher, field notes taken during the classes, photocopies of the mathematics notebook of each student and interviews with some students about their elaboration and use of it.

A great diversity between the class notes written by the students during the exposition was detected, even within the same class. It may be due to the students' different visions towards mathematics, the content presented by the teachers and the role played by these notes in the study of mathematics. There are eight students with an exhaustive behaviour, writing all the statements and examples of application, even though some different selective behaviours transcribing these kinds of elements were detected.

The transcription of proofs and comments is very low in a lot of students. In the interviews, the students have stressed the importance of recording the statements and the application examples, and they emphasised as well the elements written by the teacher in the blackboard. Some students seem to privilege this last aspect instead of the nature of the content. This is an important limitation, especially in more dynamic environments. In general, the transcriptions have a procedural and symbolic character, with very low presence of verbal and graphical representations, explanations, justifications and observations.

The differences between students have been higher in one of the classes, in which the mathematics teacher had a higher rhythm of exposition and used the proof as a process to obtain the derivative rule. In this class, we have identified students who have preferred to write justification procedures against application procedures and vice versa.

Finally, the majority of the students have pointed out that their mathematics notebook is their main tool to study the subject and to learn mathematics. In a lot of transcriptions we have found some inconsistencies and mistakes that hinder this role.