ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 34.3 (2016): 51-71
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Significado escolar de las razones trigonométricas elementales

Students' notions of elementary trigonometric ratios

Enrique Martín Fernández
Universidad de Granada
enrique_martin_f@hotmail.com

Juan Francisco Ruiz Hidalgo
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada
jfruiz@ugr.es

Luis Rico
Grupo de Investigación: Didáctica de la Matemática Pensamiento Numérico. Universidad de Granada
lrico@ugr.es

RESUMEN • En este artículo presentamos algunos resultados de un estudio exploratorio relativo a los modos en que un grupo de estudiantes de bachillerato expresan e interpretan las nociones trigonométricas de seno y coseno. El objetivo de la investigación es indagar sobre las representaciones, conceptos, nociones y sentidos que los estudiantes emplean cuando se les pide describir o mostrar el seno y el coseno de un ángulo. El análisis realizado sobre las producciones de este grupo hace emerger una categorización de distintas respuestas, cuyas relaciones se discuten e interpretan. Los resultados muestran varios tipos de representaciones y sentidos, algunos ya reconocidos en otros estudios, junto con otros nuevos. La escasez de investigaciones relacionadas con el significado escolar de las nociones de seno y coseno aporta interés añadido a este estudio.

PALABRAS CLAVE: razones trigonométricas; representaciones; significado.

ABSTRACT • In this paper, we present some of the results of an exploratory study on the several ways of expressing and interpreting the trigonometric notions of sine and cosine by a group of 16-17 years old students. The aim of this research is to analyze the representations, concepts, notions and senses handled by students when describing the sine and cosine of an angle. From the analysis on the answers of this group of students emerge a categorization, whose relations are discussed and interpreted. The results show several types of representations and senses, some of which have already been recognized in previous studies, while some others are new. The scarcity of research related with school meaning of the sine and cosine provides an extra interest to the study.

KEYWORDS: trigonometric ratios; representations; meaning.

Recepción: julio 2015 • Aceptación: mayo 2016 • Publicación: noviembre 2016

Martin Fernández, E., Ruiz Hidalgo, J. F., Rico, L., (2016) Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias*, 34.3, pp. 51-71

INTRODUCCIÓN

Comprender un concepto matemático escolar es dotarlo de significado, es decir, disponer de una definición, representarlo, identificar sus operaciones, relaciones y propiedades, sus modos de uso, su interpretación y aplicación. Esta consideración se sigue de la noción de Frege (1998) sobre significado de un concepto matemático, quien la fundamenta en tres componentes:

- Los signos, es decir, aquellas notaciones gráficas y simbólicas que lo expresan, incluidas sus reglas de procesamiento.
- La referencia, o contenido semántico del concepto.
- Los sentidos en que pueda ser entendido, aplicado e interpretado.

La noción de significado aquí utilizada deriva de esas ideas de Frege y se desarrolla en Rico (2013). Se postula también que, para las matemáticas escolares, los conceptos adquieren una variedad de significados más allá del modo formal y de la notación simbólica con que vienen establecidos en el currículo y con los cuales, usualmente, se enseñan.

Este estudio analiza el significado de los conceptos escolares de seno y coseno de un ángulo, según la terna semántica mencionada. Los componentes del significado que aquí se consideran son la estructura conceptual en que los conceptos se encuadran, los sistemas de representación mediante los que se presentan y sus sentidos o modos en que se usan, propuesta por Rico (2012).

El tema elegido, la trigonometría en el plano, es un exigente y apasionante tópico de las matemáticas en la enseñanza secundaria. Es una estructura matemática de gran riqueza conceptual, que incluye conexiones a diversas nociones, se vincula a otras estructuras matemáticas y enlaza con diversas disciplinas pues «la trigonometría fusiona aritmética, álgebra, geometría y mecánica» (Mathematical Association, 1950: 3). Para autores como Gelfand y Saul (2001) la trigonometría es parte central de las matemáticas en la enseñanza secundaria. La trigonometría tiene aplicación práctica en ciencias y tecnología, siendo utilizada en topografía, geodesia, electricidad, electrónica y óptica, entre otras disciplinas (Army, 1991).

Sin embargo, la trigonometría es un contenido escolar que resulta difícil de entender por los estudiantes (De Kee, Mura y Dionne, 1996; Maldonado, 2005) debido a factores diversos como son su complejidad, la conexión con numerosos fenómenos y las interconexiones con otras disciplinas (Brown, 2005). Inconvenientes para su aprendizaje son también las distintas vías de entender, representar y relacionar sus diversas nociones básicas, como las relativas a la circunferencia goniométrica y a los triángulos rectángulos. Las diferentes maneras de aproximarse a estas nociones así como sus modos de uso pueden ocasionar conflictos de interpretación; la expresión y transmisión deficiente de algún concepto básico de la trigonometría puede provocar confusión en la explicación de sus significados y, por tanto, dificultar su enseñanza y aprendizaje (Martín-Fernández, 2013).

Brown (2005) señala que «existe escasa investigación en relación con las ideas intuitivas que los estudiantes poseen sobre el contenido de la trigonometría o sobre los métodos más adecuados con los que enfocar y estructurar los nuevos conceptos para construir un núcleo sólido de conocimiento» (p. 10). Análogamente, Moore (2012) sostiene que la trigonometría es una parte de la matemática que carece de coherencia en su enseñanza por las dificultades que presentan estudiantes y profesores en su uso en múltiples contextos. Estos problemas sugieren que la aproximación a este tópico de la matemática no facilita que alumnos y docentes establezcan conexiones entre sus diferentes componentes de significado. Asimismo, Weber (2005) sostiene que la investigación orientada a conocer y superar las dificultades de los estudiantes en trigonometría es escasa.

Por estos motivos, detectamos un insistente requerimiento por realizar investigaciones sobre las razones trigonométricas y, más concretamente, sobre su significado escolar. Interés también debido a que la trigonometría provee a los estudiantes del conocimiento necesario para resolver cuestiones matemáticas relevantes (Mathematical Association, 1950).

Para estudiar el significado de las razones trigonométricas elementales hemos diseñado un cuestionario semántico (Blok, 2014) siguiendo un método ya utilizado en algunas investigaciones previas (Castro-Rodríguez, 2010; Fernández-Plaza, 2011). El cuestionario aborda los tres componentes de significado mencionados para las razones trigonométricas seno y coseno (Martín-Fernández, 2013).

Con ese instrumento analizamos, mediante la técnica de análisis del contenido (Cohen, Manion y Morrison, 2011), las respuestas que los estudiantes expresan cuando se les pregunta por cuestiones relacionadas con los significados de los conceptos de seno y coseno de un ángulo. Los resultados manifiestan familiaridad de los estudiantes con los significados parciales y riqueza en la variedad de las representaciones y sentidos utilizados.

Esta investigación se propone identificar y caracterizar los significados que expresan un grupo de estudiantes de bachillerato sobre el seno y el coseno de un ángulo, al evocar conocimientos previamente estudiados. Para ello nos proponemos documentar y analizar las representaciones, conceptos y sentidos que dichos estudiantes utilizan cuando se les pide expresar, definir e interpretar dichos conceptos.

ANTECEDENTES

El conocimiento disponible basado en investigación sobre la complejidad didáctica de los contenidos escolares de la trigonometría y, más concretamente, sobre los significados de las razones trigonométricas seno y coseno, es escaso. Este trabajo se sitúa dentro de la investigación sobre las representaciones y sentidos usados en la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas seno y coseno de un ángulo, a los que se ha prestado poca atención (Byers, 2010: 1). Hay diversos modos en que los estudiantes pueden representar el seno y el coseno de un ángulo, conectados con una variedad de significados (Weber, 2005).

En los estudios localizados sobre didáctica de la trigonometría, se pueden identificar trabajos referidos a las representaciones y sentidos que se utilizan durante la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas seno y coseno. Brown (2005: 237) afirma que el seno y coseno son preferentemente utilizados como coordenadas, distancias y cocientes. Weber (2008: 1-2) indica dos formas principales mediante las que se representan las nociones trigonométricas: como cociente y como función. Byers (2010: 1-5) enumera seis dominios conceptuales que caracterizan los sistemas de representación en trigonometría: el triángulo rectángulo, las razones trigonométricas, la función trigonométrica, la circunferencia unidad, la onda sinusoidal y el vector. Finalmente, otros trabajos ponen de manifiesto las dificultades del alumnado al manipular, interpretar y dotar de significado a las razones, ecuaciones, identidades y funciones vinculadas a las razones trigonométricas (De Kee, Mura y Dionne, 1996; Maldonado, 2005; Montiel, 2007; Martín-Fernández, 2014).

Los significados mostrados por el alumnado están ligados a diversos factores, entre los cuales destaca la metodología de la enseñanza. En relación con las investigaciones sobre técnicas para la enseñanza de la trigonometría, Kendal y Stacey (1998) exploran las diferencias entre dos aproximaciones para la introducción de la trigonometría al alumnado, una, la basada en la relación entre longitudes de los lados en un triángulo rectángulo, «ratio system», y otra, la aproximación mediante la circunferencia unidad, «line system», en la que el coseno y el seno son definidos como las coordenadas x e y de un punto en la circunferencia goniométrica. Otros estudios que han utilizado para la aproximación del tópico situaciones reales, calculadora gráfica y software de geometría dinámica han concluido que estas ayudan a establecer relaciones numéricas y geométricas (Army, 1991; Blackett y Tall, 1991; Thompson, 2007; Zengin, Furkan y Kutluca, 2012), facilitando así el dominio de los conceptos y la construcción de significados.

MARCO TEÓRICO

Este estudio se sustenta en la determinación del significado de un concepto matemático escolar considerando tres componentes para su análisis: los sistemas de representación, la estructura conceptual y el sentido.

Significado de un concepto matemático escolar

La amplitud y profundidad de los significados que los escolares construyen se reconoce atendiendo a sus distintos modos de expresión y de uso, a la capacidad para conectar diversas estructuras y para utilizar diferentes procedimientos; se identifica por medio de la riqueza de conexiones que se establecen para una determinada noción o nociones matemáticas y a la variedad de elementos conceptuales que deben tenerse en cuenta (Lesh y Doerr, 2000). Cada concepto matemático viene determinado por sus diferentes propiedades y relaciones, mediado por sus diversas representaciones y sus modos de uso.

Analizamos el significado de un concepto mediante una terna de componentes que, como se ha dicho, adaptamos del triángulo semántico propuesto por Frege (1998), constituido por su referencia, su signo y su sentido. Adoptamos la noción de significado de un concepto matemático escolar desarrollado a partir de esas ideas por Rico (2012), quien considera tres componentes:

- *Estructura conceptual*, que identifica los aspectos formales que caracterizan y describen los contenidos matemáticos considerados, establecidos en términos de nociones, conceptos, propiedades, razonamientos y demostraciones matemáticas.
  La estructura conceptual de un determinado contenido matemático escolar se sintetiza mediante las ideas y relaciones de los principales conceptos y procedimientos que la configuran. La estructura conceptual suministra el criterio de veracidad o falsedad para las proposiciones que se pueden enunciar sobre dicho concepto y que, de acuerdo con la caracterización de Frege, desempeña el papel de referencia para dicho concepto.
- *Sistemas de representación*. Los sistemas de representación consisten en el conjunto de reglas y notaciones, convenios, símbolos, imágenes y grafismos abstractos que expresan y hacen presentes las correspondientes nociones y conceptos de los contenidos en estudio. Los modos de representación objetivan los conceptos y destacan sus propiedades; las reglas de conversión entre sistemas dan forma a los modos de procesamiento matemático y a los procedimientos a los que caracterizan.
- *Sentidos y modos de uso*. Mediante esas categorías identificamos los términos que nombran los conceptos implicados, lo que se conoce como «diccionario semántico» de un concepto. También se ocupa de los interrogantes y cuestiones a que dan respuesta los contenidos en estudio y de los fenómenos que están, o pueden estar, en su origen. Finalmente, se ha de tener en cuenta la riqueza de situaciones distintas en que se implican. Los contextos y modos de uso, sus tipos y variantes, establecen la pluralidad de sentidos de un determinado concepto.

Mediante las tres componentes se identifica, expresa y emplea un concepto matemático. El significado de un concepto en el ámbito escolar se delimita, analiza y establece mediante el marco estructural en que se evalúa como verdadero o falso, por las representaciones con las que se piensa, comunica y trabaja, y por los usos que se le dan y con los que toma sentido. Las componentes semánticas atienden a distintas funciones para un concepto y, en común, establecen su significado.

Estructuras matemáticas escolares

Las matemáticas trabajan conceptos abstractos y sus interrelaciones. Los resultados matemáticos se basan en y se deducen de conceptos básicos. Los conceptos y métodos matemáticos son generales y abstractos; se reconocen por sus fundamentos lógicos y se derivan unos de otros por razonamientos deductivos y necesarios. Demostrar una propiedad o un teorema quiere decir que su veracidad o falsedad se prueba mediante argumentación lógica a partir de propiedades de los conceptos básicos implicados, que se sustentan en una referencia que permite evaluar su valor de verdad.

Las disciplinas matemáticas tienen, por otra parte, un método interno de trabajo, una regulación convencional, de justificación y exposición. En general, la organización de las disciplinas respeta una secuencia; dicho proceso se inicia con las definiciones y notaciones, lo continúan los axiomas, enunciados, relaciones, operaciones y propiedades, lo culminan los teoremas y corolarios, y concluye con las aplicaciones (Alexandrov, Kolmogorov, Laurentiev, *et al.*, 1981).

Los contenidos –conceptos y procedimientos– se estructuran, asimismo, según criterios cognitivos. Tales criterios consideran el modo como los conocimientos correspondientes se entienden, aprenden y utilizan. Para la caracterización cognitiva del contenido matemático escolar los expertos utilizan tres campos o categorías generales: el campo conceptual, el campo procedimental y el campo actitudinal. Complementariamente, diferencian tres niveles cognitivos de complejidad en cada uno de ellos, con los que estructuran los distintos contenidos en los campos considerados (Bell, Costello y Küchemann, 1983). La organización conjunta de un contenido matemático escolar, combinando criterios conceptuales y cognitivos, identifica aquella componente de su significado que llamamos estructura matemática escolar.

Representaciones

La noción de representación en la que nos basamos sigue el planteamiento de Kaput (1987), e involucra los siguientes componentes: la entidad representada, la entidad que representa o representante, los aspectos particulares de cada una y la correspondencia entre las dos entidades. Consideramos las representaciones matemáticas como aquellas notaciones simbólicas y gráficas con las que pensamos y expresamos ideas y conceptos, es decir, que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos (Rico, 2009). La representación de una estructura matemática tiene carácter sistémico, los símbolos no solo expresan los conceptos y sus relaciones sino que, mediante reglas de transformación, ejecutan sus operaciones (Kaput, 1987). Los sistemas de representación contribuyen a que los alumnos piensen, expresen y comuniquen sus ideas matemáticas, las cuales actúan en los procesos de construcción de estructuras (Castro y Castro, 1997). En este estudio indagamos, principalmente, las representaciones de los conceptos seno y coseno de un ángulo, con los cuales piensan, se expresan y comunican los estudiantes sobre estas nociones.

La representación proporciona sentido dentro de un sistema de conceptos y relaciones (Rico, 2009). Las diversas representaciones de los conceptos y sus conexiones son fundamentales en la comprensión de las matemáticas escolares para captar toda su complejidad y las particularidades propias de sus distintas nociones (NCTM, 2000). En relación con la trigonometría, interesa que el alumnado establezca relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo, trabaje las razones trigonométricas y las funciones circulares (NCTM, 1989).

Sentidos y usos

Las matemáticas contrastan su significado cuando las nociones y conceptos se piensan con plenitud de sentido, cuando proporcionan variedad de modos de uso, cuando organizan fenómenos y proporcionan respuestas a problemas en contexto, en situaciones individuales y sociales. El sentido de un concepto matemático es central en su significado (Rico, Flores y Ruiz-Hidalgo, 2015).

El sentido de las nociones y conceptos matemáticos escolares, se manifiesta mediante:

– Diversidad de términos y usos reconocible en el lenguaje y sus modos de empleo.
– Diversidad de fenómenos que organizan y ámbitos de los mundos natural y social en que se originan.
– Problemas y cuestiones en contexto que surgen y a las que dan respuesta.
– Situaciones del mundo natural y social en que se emplean junto con sus aplicaciones.

METODOLOGÍA

Foco de estudio

Esta investigación se propone identificar y caracterizar qué significados alcanza un grupo de estudiantes de bachillerato sobre el seno y el coseno de un ángulo. Es decir, nos proponemos estudiar tales significados mediantes los tres componentes elegidos para su estudio: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los sentidos que dichos estudiantes utilizan cuando se les pide expresar, mostrar y explicar tales conceptos.

Nos interesa establecer la diversidad de interpretaciones sobre esos contenidos una vez trabajados en el aula, tal y como se ponen de manifiesto, una vez transcurrido cierto tiempo desde la instrucción recibida.

Diseño

Para reunir los significados de los participantes acerca de las razones trigonométricas elementales se elaboró un cuestionario semántico con distintas tareas. Los cuestionarios semánticos recogen palabras, términos, símbolos, gráficas, descripciones, explicaciones y otras notas que expresan y representan un modo de apropiación por cada sujeto del concepto considerado. Este cuestionario se propone indagar qué propiedades de las razones trigonométricas identifican los escolares, cómo las representan, qué términos y argumentos emplean para dotarlas de sentido, qué valores les atribuyen; la modalidad elegida es apropiada para grupos con pocos participantes (Blok, 2014).

La investigación es un estudio exploratorio de tipo descriptivo e interpretativo y sigue el marco metodológico de una teoría fundamentada, «grounded theory» (Cohen, Manion y Morrison, 2011). El análisis se centra en las respuestas al cuestionario aportadas por un grupo de estudiantes. Las unidades de análisis son las representaciones que han utilizado los estudiantes de bachillerato cuando han dado respuesta a las cuestiones planteadas sobre el seno y el coseno de un ángulo. Los símbolos y las nociones asociadas recogidas se ajustan a una estructura jerárquica, que identificamos según orden creciente de complejidad de los conceptos utilizados.

Recogidas y ordenadas las producciones realizamos un análisis de su contenido. Empleamos un aparato crítico basado en la terna semántica para un concepto matemático escolar. Una vez sistematizadas y categorizadas, sintetizamos las nociones y representaciones trigonométricas proporcionadas por las respuestas, de manera que muestren cómo los alumnos las entienden, utilizan e interpretan. Identificamos a su vez posibles focos de dificultad en esa interpretación.

Sujetos

La encuesta se aplicó a un total de 74 estudiantes, matriculados durante el curso académico 2012-2013 en el primer curso de bachillerato de la modalidad científico-tecnológico en un centro público de educación secundaria de la ciudad de Granada. Los alumnos fueron escogidos intencionalmente, por disponibilidad.

Según información suministrada por el centro, los alumnos habían recibido instrucción en el curso escolar en el que se aplicó la encuesta sobre las nociones de trigonometría, según lo establecido por el R.D. 1467/2007. Como guía de ejercicios y texto de referencia utilizaron el libro Matemáticas I para bachillerato en la modalidad de Ciencias y Tecnología (Vizmanos *et al.*, 2008). La mayoría había trabajado también en trigonometría el año anterior, al haber cursado cuarto curso de la ESO, opción B.

Los significados transmitidos por los profesores corresponden a la aproximación curricular establecida en los documentos mencionados. Estos introducen las razones trigonométricas mediante el «ratio system»; a continuación usan el «line system»; no incluyen el uso de tecnologías en ningún caso. Conocemos que la formación previa incide en los significados mantenidos por los estudiantes. No obstante, consideramos que para responder a las tareas propuestas apelarán a las concepciones personales ya arraigadas, a los modos individuales en que tales conceptos se usan, donde la formación escolar recibida es moldeada por estas concepciones personales, como se ha observado en los estudios antes mencionados (Martín-Fernández, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2014).

Los participantes del estudio se dividieron en dos subgrupos equivalentes en función del rendimiento académico en la asignatura de matemáticas durante ese año, realizándose, además, en estos subgrupos una estratificación de la muestra siguiendo el mismo criterio, tras una consulta mantenida entre el equipo de investigación y un investigador, experto en Didáctica de la Matemática. La finalidad fue planificar una distribución similar para dos cuestionarios que permitiera obtener respuestas lo más representativas posibles.

Instrumento

La implementación de la encuesta para la recogida de datos se realizó mediante aplicación de dos cuestionarios semánticos (Blok, 2014) de ocho ítems de respuesta abierta cada uno, estructuralmente iguales, que denominamos opción A y opción B. Todas las preguntas de la opción A son relativas al seno de un ángulo menor de 90º, mientras que las preguntas de la opción B lo son sobre el coseno; la sexta pregunta fue idéntica en ambos cuestionarios. La diferenciación de estas dos opciones está motivada por el futuro estudio de que una de las dos razones trigonométricas estudiadas tuviese mayor precisión en las respuestas que la otra, y por la posibilidad de que hubiese diferencias entre ellas en el modo de representación y en los significados comunicados por los alumnos. En definitiva, la única distinción en las preguntas de los cuestionarios es la razón trigonométrica sobre la que se referían, como se indica en los ejemplos de los ítems 1 y 2. Cada cuestionario se aplicó a uno solo de los subgrupos durante una sesión ordinaria de clase de matemáticas, con duración de 60 minutos.

Las pruebas fueron diseñadas a partir de las utilizadas en otras investigaciones (Fi, 2003; Weber, 2005; Brown, 2005 y Dominic, 2012) y de la consulta a los siguientes manuales escolares: Ibañes, Ortega y Piñeiro (1998), Bescós y Pena (2010), Arias y Maza (2008) y Vizmanos *et al*. (2008). La elección de los ítems que conformaron los cuestionarios abarcó las tres componentes del triángulo semántico de un concepto matemático escolar (Rico, 2012).

Este instrumento se validó mediante la realización de un estudio piloto previo (Martín-Fernández, 2013) que ayudó a determinar qué cuestiones y qué método de análisis eran adecuados. Los datos que aquí se presentan corresponden a las respuestas proporcionadas por los estudiantes a dichos cuestionarios. En este trabajo consideramos las respuestas relativas a las preguntas número 1 y número 6 de ambos cuestionarios. Nos centramos así, fundamentalmente, en las cuestiones relacionadas con las representaciones gráficas y simbólicas. Se incluyen a continuación las preguntas número 2, como complemento para una mejor interpretación del cuestionario por el lector:

- Ítem 1 cuestionario A. «Haz un dibujo en el que se muestre *sen(30º)*».
- Ítem 1 cuestionario B. «Haz un dibujo en que se muestre *cos(30º)*».
- Ítem 6 cuestionarios A y B. «Haz un dibujo que muestre alguna diferencia entre el seno y el coseno de un mismo ángulo».
- Ítem 2 cuestionario A. «Explica verbalmente qué entiendes por *sen(45º)*».
- Ítem 2 cuestionario B. «Explica verbalmente qué entiendes por *cos(45º)*».

Los dos primeros ítems tenían como objetivo fundamentalmente detectar preferencias en las representaciones utilizadas y, en cierta medida, en la interpretación gráfica de las razones trigonométricas *sen(30º)* y *cos(30º)*, que establecimos según la variedad de representaciones puestas de manifiesto por los estudiantes.

El ítem número 6 se vincula a la discriminación de dos conceptos similares. Esta tarea vincula explícitamente diversos sistemas de representación, incluyendo el gráfico y el simbólico, que tratan de representar las razones trigonométricas mediante números, letras y otros caracteres cuya sintaxis viene descrita por unas reglas de procedimiento, al pedir a los sujetos que realicen un dibujo que muestre alguna diferencia entre el seno y el coseno de un mismo ángulo.

ANÁLISIS

El estudio se realiza mediante un análisis de contenido (Cohen, Manion y Morrison, 2011). Su finalidad consiste en descubrir la estructura interna del significado de este contenido interpretado en términos de categorías de análisis en un marco semántico previamente elegido (Rico, 2013). Se trata de un método que describe el significado de la información cualitativa usando diversos procedimientos para hacer inferencias válidas de un texto (Schreier, 2012).

Consideramos el análisis de contenido como proceso ordenado de análisis, codificación y clasificación, que permite descubrir e identificar temas y patrones, inferir significados, elaborar mapas conceptuales, conjeturar previamente y validar relaciones, buscando más allá de los datos y situando estos en estructuras interpretativas y explicativas, generando o validando una teoría (Hsieh y Shannon, 2005; Rico, 2013).

Procedimiento, organización e interpretación de datos

Analizamos las producciones de cada individuo; examinamos comparativamente las producciones; identificamos los conceptos que emergen de los datos; detectamos las ideas centrales y delimitamos unos temas principales (Strauss y Corbin, 1998). Dichos temas, en nuestro caso, fueron el triángulo y la circunferencia.

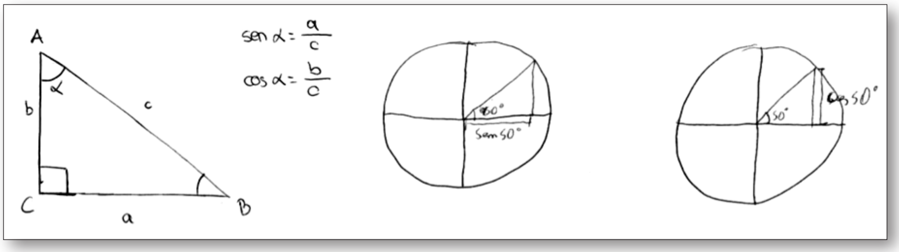

Fig. 1. Ejemplos de producciones de los estudiantes con los temas triángulo y circunferencia.

De modo más específico, si tenemos en cuenta las producciones del ítem número seis, surge otro tema: la función trigonométrica; si agregamos las respuestas del estudio piloto, aparece excepcionalmente el ángulo.

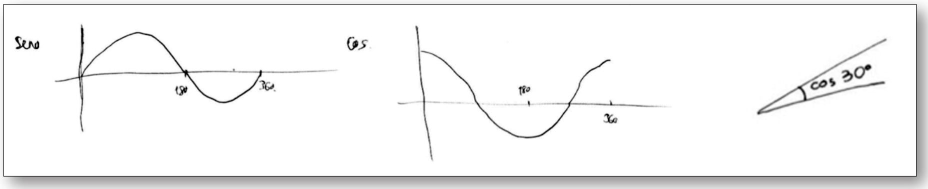

Fig. 2. Ejemplos de producciones de estudiantes con los temas ángulo y función trigonométrica.

Seguidamente, realizamos un análisis más detallado de las producciones asociadas a cada uno de los dos primeros temas encontrados y describimos todos los aspectos hallados en estas. En relación con este estudio, al organizar los datos relativos al tema «circunferencia» se encontraron tres unidades de información: los ejes, el radio y el diámetro. Cuando categorizamos, formulamos hipótesis y dedujimos que las categorías se adaptaban a los datos. A partir de ellas se identificaron las subcategorías «ejes» y «segmentos», para después determinar la categoría «elementos de división de la circunferencia». Ejemplos de esas interpretaciones se encuentran en las figuras 3, 4, 5 y 6.

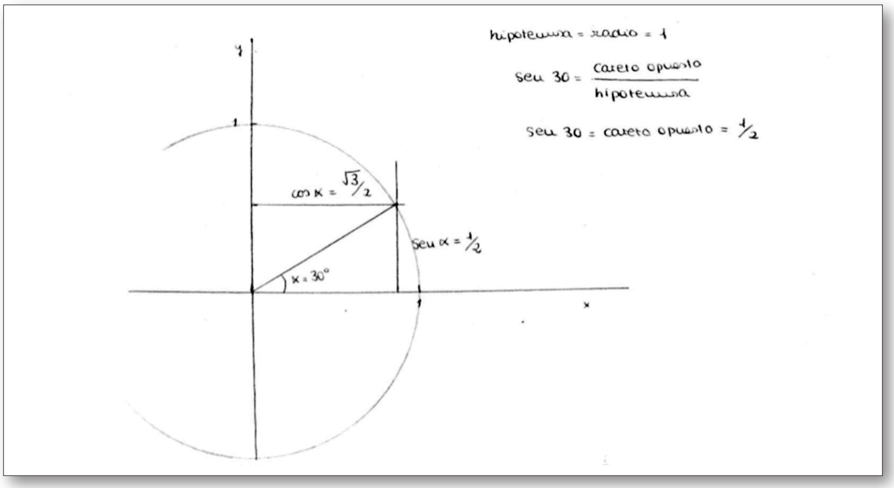

Fig. 3. Respuesta de estudiante utilizando ejes como elemento de división de la circunferencia.

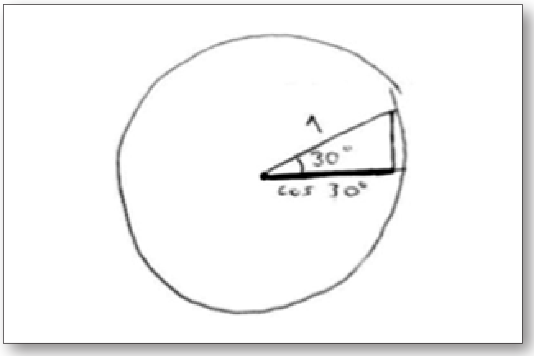

Fig. 4. Respuesta de estudiante utilizando radios como elemento de división de la circunferencia.

Más adelante, relacionamos aquellos datos que se habían fracturado en la etapa anterior. Esta fase no es disjunta con la codificación abierta. Así, se determinó otra unidad de información: el ángulo, a partir de la cual se reconocieron tres subcategorías: «ángulo central», «ángulo interior de un triángulo» y «punto en una circunferencia y un segmento», que permitieron identificar una segunda categoría para la circunferencia: «modo de indicar el ángulo».

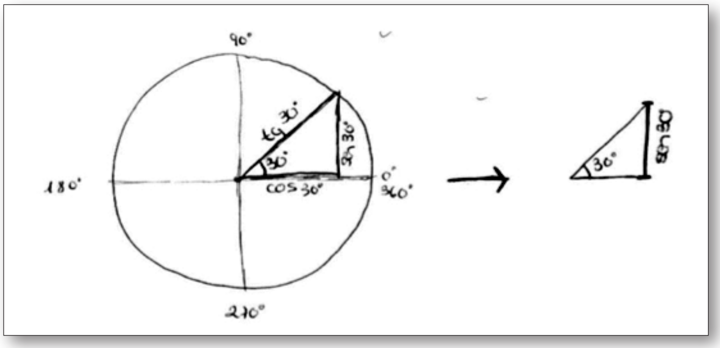

Fig. 5. Producción asociada a la categoría «ángulo interior de un triángulo».

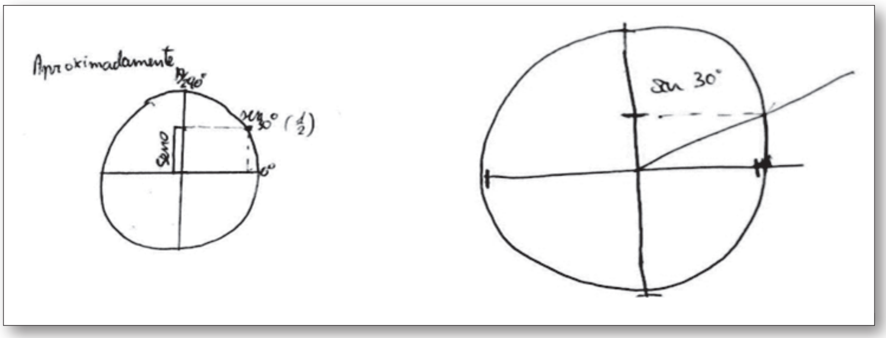

Fig. 6. Producción asociada a la subcategoría «punto en una circunferencia y un segmento» y «ángulo central».

A continuación, se identificaron las distintas interpretaciones que el alumnado había dado a las razones trigonométricas. Las subcategorías obtenidas fueron: «cociente» –siempre mediante cociente de cateto partido hipotenusa–, «longitud» y «coordenada cartesiana». A partir de dichas interpretaciones, se obtuvo la categoría «modo de indicar el valor de la razón trigonométrica». Por último, distinguimos aspectos sintácticos referidos a las unidades de análisis, como la forma en que eran señalizados cada uno de ellos.

Finalmente, los criterios para establecer las diferentes subcategorías y unidades de información en el tema «circunferencia» fueron la identificación y la señalización de los elementos de división de la circunferencia, el modo de indicar el ángulo y el modo de indicar el valor de la razón trigonométrica, como se resume en la tabla 1.

Tabla 1.
Categorización de las producciones para el tema circunferencia

	Circunferencia		
Categorías	Identificación		Señalización
Elementos de división de la circunferencia	Ejes		Con señalización X-Y Sin señalización
	Segmentos	Diámetros Radios Radios y diámetros	
Modo de indicar el ángulo	Ángulo central		Se indica amplitud
	Ángulo interior de un triángulo		Se indica o no la amplitud
	Un punto en una circunferencia y un segmento		
Modo de indicar el valor de la razón trigonométrica	Cociente	Cateto/hipotenusa	Indicación interna: color, subrayado y segmento
	Coordenada cartesiana		Indicación externa: flecha, corchete, segmento auxiliar y cota
	Longitud		

En relación con el tema «triángulo», se identificaron como subcategorías para organizar los datos las siguientes: «triángulo rectángulo» y «triángulo no rectángulo». A partir de ellas, se obtuvo como categoría el «tipo de triángulo utilizado». Análogamente se analizaron las interpretaciones que los alumnos dieron a las razones trigonométricas. Las subcategorías que se reconocieron fueron: «cociente» –mediante cateto partido hipotenusa o razón de lados–, «longitud» y «ángulo interior». Ejemplos de respuestas en esas categorías se encuentran en las figuras 7 y 8. Finalmente, se identificó la categoría «modo de indicar el valor de la razón trigonométrica», tal y como queda sintetizado en la tabla 2.

Tabla 2.
Categorización de producciones para el tema triángulo

	Triángulo		
Categorías	Identificación		Señalización
Tipo de triángulo	Rectángulo		Con o sin el símbolo del ángulo recto
	No rectángulo		
Modo de indicar el valor de la razón trigonométrica	Cociente	Cateto /hipotenusa Lados	Mediante vértices Mediante lados
	Longitud	Cateto Lado	Indicación interna: color, subrayado y segmento
	Ángulo interior		Indicación externa: flecha, corchete, segmento auxiliar y cota

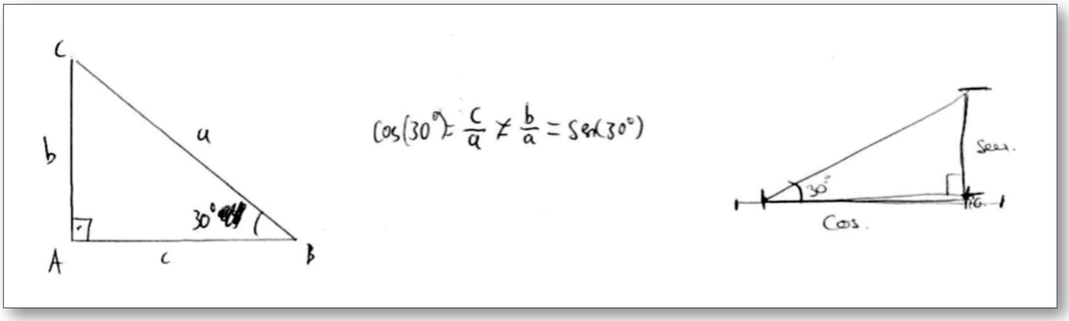

Fig. 7. Producciones de estudiantes utilizando un triángulo rectángulo.

Fig. 8. Producciones asociadas a las subcategorías «longitud» y «ángulo interior».

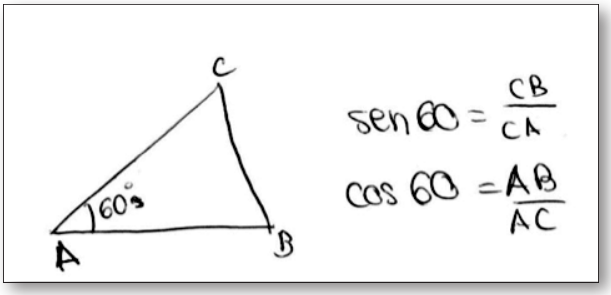

Fig. 9. Producción asociada a la subcategoría «cociente».

Finalmente, teniendo en cuenta los temas, categorías, subcategorías y relaciones, desarrollamos interpretaciones que muestran los resultados alrededor de las representaciones, conceptos y sentidos con que los estudiantes se expresan, en definitiva, los significados puestos de manifiesto por los estudiantes de bachillerato encuestados sobre los conceptos de seno y coseno de un ángulo.

RESULTADOS

Establecidas las categorías y subcategorías que organizan las nociones y representaciones obtenidas, observamos sus relaciones y vinculaciones, y elaboramos el siguiente mapa conceptual que muestra la estructura de las respuestas, sus porcentajes de uso y la interpretación de los estudiantes. Lo presentamos con cuatro niveles según su complejidad, con los que se muestra nuestra interpretación de la secuencia de conceptos utilizados según los significados inferidos.

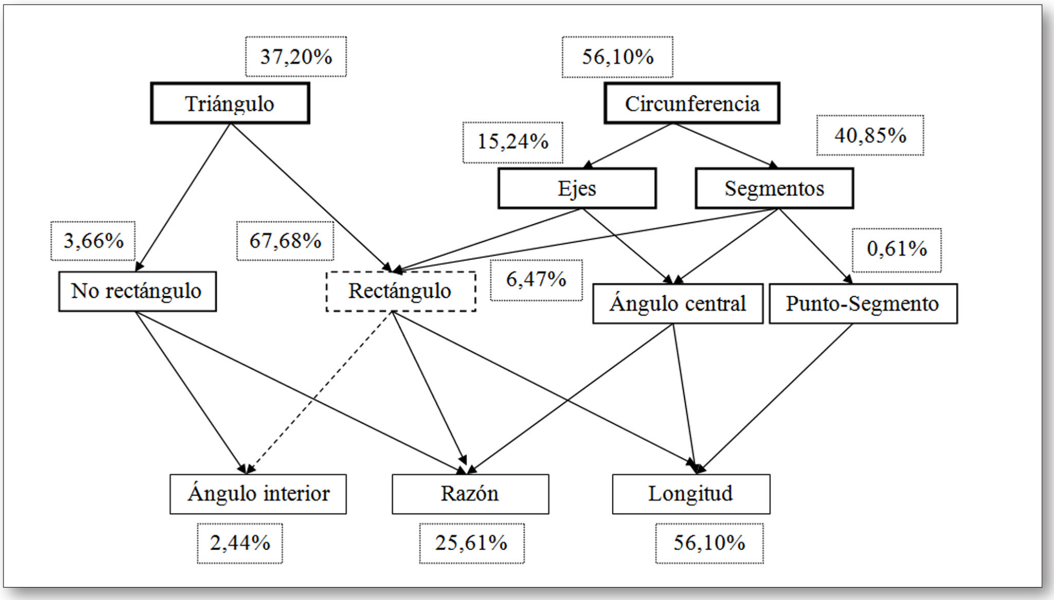

Fig. 10. Relación entre temas, categorías y subcategorías para las cuestiones 1 y 6.

En un primer nivel, se muestran los temas generales, identificados al inicio del análisis de contenido antes descrito, que fueron la circunferencia y el triángulo, los cuales proporcionaron una primera organización para la información recogida. Un segundo nivel surge al comparar las distintas representaciones, observando sus diferencias y semejanzas, incluyendo en el caso de la circunferencia los elementos geométricos que se utilizan para dividirla, ejes y segmentos. Cabe destacar que todas las producciones relacionadas con el tema «circunferencia» quedan incluidas en estas dos subcategorías. En un tercer nivel se recoge un nuevo paso en la secuencia de representación que, para el tema «circunferencia», es el modo de indicar un ángulo en la circunferencia inicialmente dibujada. Nos estamos refiriendo al ángulo interior de un triángulo rectángulo, al ángulo central y al punto-segmento. Si examinamos el tema «triángulo», situamos en este nivel la distinción entre triángulo rectángulo y no rectángulo, que se ejemplifica en la figura 8.

Finalmente, identificamos un cuarto nivel, el cual incluye los sentidos o interpretaciones y modos de uso que los alumnos hacen del seno y coseno de un ángulo: ángulo interior, razón y longitud. Resaltar que únicamente se llega a interpretar el seno de un ángulo como ángulo interior si se parte del triángulo, motivo por el cual dicha conexión se muestra discontinua.

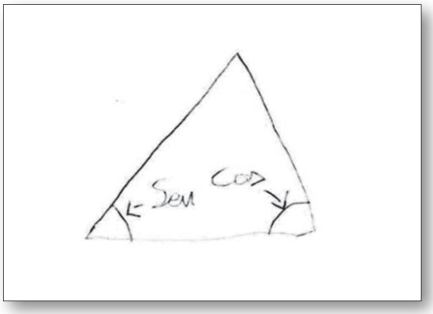

Fig. 11. Respuesta que identifica el seno y coseno de un ángulo como ángulo interior de un triángulo no rectángulo.

La figura 10 resume y sintetiza todas las representaciones realizadas por los alumnos, según las principales secuencias de conceptos con que se han construido. Se muestran así distintos sentidos del seno y del coseno de un ángulo considerados por el alumnado, en función de los conceptos y nociones en que se sustenta cada representación. También se incluyen los porcentajes de respuesta obtenidos en cada caso.

La información recogida se presenta y estructura con un nuevo mapa conceptual. Para ello, en primer lugar, consideramos el problema original por el cual surge la trigonometría: «Dado un arco de ángulo encuentra la longitud de la cuerda que conecta los puntos finales del arco» (Van Brummelen, 2009: 41).

Los alumnos utilizan para representar el seno y el coseno la circunferencia y el triángulo. Se observan así, en un primer nivel, las dos formas históricas de medir ángulos, que se presentan relacionadas con las formas de enseñar y entender la trigonometría. En primer lugar el «ratio system», que usa un triángulo e interpreta la medida de un ángulo como una razón, y el «line system», que utiliza la circunferencia y entiende la medida del ángulo como un segmento (Sickle, 2011).

En un segundo nivel aparece la subdivisión de los triángulos en rectángulos y no rectángulos y la subdivisión de la circunferencia, entre la circunferencia goniométrica y la circunferencia de radio R, como se presenta en la figura 12.

A partir de aquí y considerando solo la circunferencia, encontramos dos tipos de medidas del ángulo, mediante la longitud de un segmento y mediante la consideración de sus coordenadas en una circunferencia goniométrica.

En relación con el triángulo, este puede ser rectángulo y no rectángulo. En el caso del triángulo no rectángulo, para la medida del ángulo se transformaría en triángulo rectángulo. Entre las interpretaciones válidas para el seno o el coseno aparece la de razón. Otras interpretaciones que aparecen en las producciones con origen en el triángulo y consideradas errores de comprensión son, la identificación del seno o coseno con el ángulo interior y con una distancia en un triángulo rectángulo de hipotenusa diferente de uno.

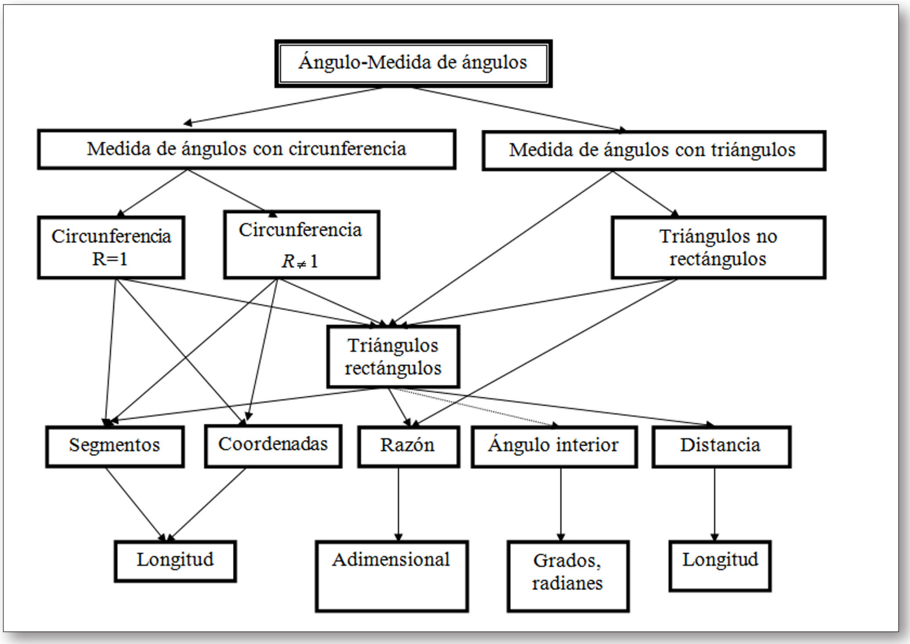

Fig. 12. Mapa conceptual de la medida de un ángulo.

Este mapa conceptual proporciona una organización de los datos que muestra los significados parciales alcanzados por los alumnos sobre las razones trigonométricas.

DISCUSIÓN Y LOGRO DE OBJETIVOS

Al comienzo de este trabajo expresamos nuestro propósito de indagar sobre las nociones y conceptos con los que los estudiantes de secundaria se expresan, los modos como los usan y los gráficos y notaciones simbólicas, es decir, sobre los componentes de significado que utilizan cuando comunican y manifiestan sus ideas acerca de las razones trigonométricas. Las tablas 1 y 2, con los sistemas de categorías de los temas detectados para representar el seno y el coseno de un ángulo, dan respuesta a este objetivo.

En consecuencia, nos propusimos avanzar en la identificación y caracterización de los significados que sobre el seno y el coseno de un ángulo alcanzaron un grupo de estudiantes de bachillerato. Las figuras 10 y 12 muestran las notaciones, conceptos y sentidos que dichos estudiantes utilizaron cuando se les pidió representar e interpretar el seno y el coseno. Es decir, proporcionan una primera descripción de los significados que los alumnos comunican mediante las representaciones aportadas.

Los sujetos expresaron gran riqueza y diversidad de nociones y de representaciones cuando comunicaron mediante un dibujo su noción sobre el seno y el coseno de un ángulo. Entre ellas destacan:

- Las relacionadas con la noción de ángulo: ángulo interior de un triángulo, razón entre los lados de un triángulo.
- Las relacionadas con la idea de longitud: ordenada de una función trigonométrica, coordenada cartesiana y distancia –lados de un triángulo y segmentos–.

Dentro de estas interpretaciones observamos que una mayoría de participantes interpretaron el seno y el coseno como una longitud (56,10 %) (Martín-Fernández, 2014).

Los alumnos mostraron escaso conocimiento sobre la razón trigonométrica como coordenada. En la mayoría de las producciones relacionadas con la circunferencia (56,10 %), sus elementos de división fueron segmentos (40,85 %). Se observó una incorrecta expresión de los ejes de coordenadas por parte del alumnado, al utilizar segmentos en vez de rectas o semirrectas. Además, se puso de manifiesto el carácter incidental de la circunferencia en la mayor parte de las representaciones. En general, aunque parten de una circunferencia (56,10 %), en más de la mitad de los casos los alumnos construyen un triángulo rectángulo para identificar el seno y el coseno, como se expresa en la siguiente figura.

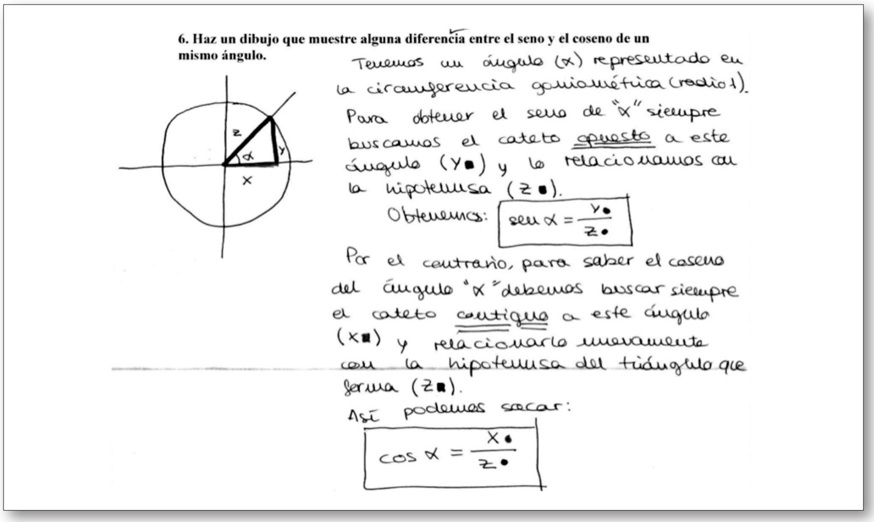

Fig. 13. Producción asociada a la subcategoría «cociente».

Se evidenciaron de este modo conexiones incorrectas entre los sistemas «line system» y «ratio system» porque, aunque las nociones trigonométricas de seno y coseno como segmentos están asociadas en sus orígenes al «line system» y deberían surgir fundamentalmente del tema circunferencia, también surgieron del tema triángulo. Es decir, en la mayor parte de las producciones los alumnos utilizaron una circunferencia de radio R1 para indicar el seno y el coseno, los cuales identificaron con segmentos, obviando que, en ese caso, tales valores son incorrectos ya que han de considerarse como una razón.

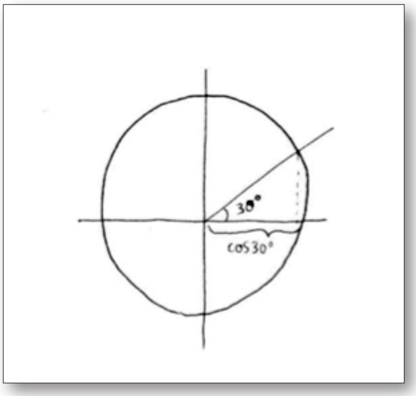

Fig. 14. Producción asociada a la subcategoría longitud.

En relación con la circunferencia goniométrica, un alto porcentaje de los alumnos revelaron una comprensión deficiente de esta; esos estudiantes dibujaron la circunferencia sin indicar el valor de su radio, lo cual los llevó a incurrir en errores. Esto advierte, además, que algunos alumnos carecen de conocimiento sobre el rango de posibles valores del seno o coseno de un ángulo.

Los estudiantes conectaron por lo general las razones trigonométricas con el triángulo rectángulo. De la mayoría de los sujetos que optaron por la representación basada en el triángulo (37,20 %), solamente un 3,66 % relacionaron las razones trigonométricas con triángulos no rectángulos.

Gran parte del alumnado no identificó las razones trigonométricas ni con la noción de proporción ni con los valores de una función trigonométrica. La idea de proporción y la ordenada de la función sinusoidal aparecieron de modo incidental.

Además, se confirmaron algunas representaciones documentadas por investigaciones anteriores, tales como su interpretación como cociente (Weber, 2005), distancias horizontales y verticales respecto a unos ejes y, también, como cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo (Brown, 2005). Sin embargo, detectamos nuevas representaciones, como son las de ángulo, ángulo interior de un triángulo y cociente entre lados de un triángulo, ejemplificadas en las figuras 3, 11 y 9 respectivamente.

Finalmente, se observa en las producciones que el número de respuestas en blanco a las tres preguntas analizadas fue muy bajo (6,10 %), por lo que se puede concluir que el alumnado estaba familiarizado con dichas nociones y no encontró extrañas las preguntas propuestas. Además, los estudiantes manifestaron destreza en la representación de ángulos en la circunferencia, apareciendo solo un error de este tipo.

CONCLUSIONES

Reiterando que el objetivo propuesto para este estudio consiste en indagar sobre las nociones y conceptos con que los estudiantes de secundaria se expresan, los modos como los usan y los gráficos y notaciones mediante los que los representan cuando comunican sus ideas y manifiestan sus significados acerca de las razones trigonométricas seno y coseno, afirmamos su logro conforme a las siguientes conclusiones.

- El análisis realizado muestra las maneras en que los estudiantes utilizan una serie de nociones y conceptos para representar y dar sentido al seno y coseno, que son fundamentales para determinar el significado escolar de dichas ideas. Entre las nociones utilizadas se encuentran la circunferencia, los ejes coordenados, el triángulo rectángulo, el ángulo central y otros.
- Las categorías, subcategorías y unidades de análisis del estudio han puesto de manifiesto no solo las nociones, conceptos y relaciones que los estudiantes utilizan, sino también sus modos de uso. Los estudiantes manejan una diversidad de sentidos no triviales para estos dos conceptos, los cuales revelan la pluralidad de significados con que los estudiantes abordan e interpretan estas nociones trigonométricas. Es más, una coincidencia en las nociones utilizadas no impide que comuniquen sentidos diferentes. Así, un modo de representación similar puede dar lugar a significados distintos. Factores como el contexto de presentación, la forma de aproximarse a los conceptos y las nociones subyacentes en las representaciones juegan un papel relevante en el significado considerado por los estudiantes.
- Los alumnos emplean una variedad de signos, gráficos y notaciones para expresar sus ideas, desarrollando de este modo sus significados. Estas representaciones están mediadas no solo por la forma en que el tópico ha sido presentado por el profesor, sino también por el modo en que las hemos requerido. Cuando los estudiantes comunican conceptos matemáticos mediante signos, que son fundamentales para su dominio y comprensión, estos le proporcionan un conjunto de herramientas que mejoran su capacidad para modelar e interpretar fenómenos. A través de su utilización, estas representaciones e ideas, se convierten en objetos de reflexión, que permiten desarrollar el significado de un concepto.

El reconocimiento del lenguaje matemático, el uso de conceptos y nociones matemáticas, la utilización de representaciones, la interpretación y planteamiento de problemas, contribuye al desarrollo de significados por parte del alumnado.

Los resultados obtenidos sugieren la necesidad de profundizar en el tema diseñando y poniendo en práctica situaciones variadas que abarquen las diferentes componentes del significado de un concepto matemático escolar. Futuras investigaciones podrán explorar actividades que se adapten a mostrar la flexibilidad entre representaciones y sus ventajas y limitaciones. Esperamos así contribuir a dotar de mayor coherencia la enseñanza de la trigonometría.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado para contribuir a la tesis de D. Enrique Martín Fernández, con la ayuda del proyecto «Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación» (EDU2015-70565-P) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del grupo FQM-193 (Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico) del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N., Laurentiev, M.A. *et al*. (1981). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid: Alianza Editorial.

Arias, J.M. y Maza, I. (2008). *Matemáticas 1.º Bachillerato*. Grupo Editorial Bruño.

Army, P.D. (1991). *An approach to teaching college course in trigonometry using applications and a graphing calculator*. Unpublished doctoral dissertation, Rutgers University, New Brunswick, NJ.

Bell A., Costello J. y Küchemann D. (1983). *Research on learning and teaching. A Review of Research in Mathematical Education*. Windsor: NFER- Nelson.

Bescós, E. y Pena, Z. (2010). *Matemáticas 1.º* Bachillerato (Ciencias y Tecnología). Oxford University Press.

Blancket, N. y Tall D.O. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. En Furinguetti, F. (Ed), *Proceedings of the 15th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 144-151). Assisi, Italy: PME.

Blok J.V. (2014). On the use of questionnaires in semantic field work: A case study in modality. En A. Belkadi, K. Chatsiou, y K. Rowan (Eds.). *ProceedingsofConferenceonLanguageDocumentationand-LinguisticTheory, 4*. London: SOAS.

Brown, S.A. (2005). *The trigonometric connections: Students' understanding of sine and cosine*. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Illinois.

Byers, P. (2010). Investigating trigonometric representations in the transition to college mathematics. *College Quarterly*, 13, 2, 1-10.

Castro, E. y Castro. E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Eds.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-122). Barcelona: Horsori.

Castro-Rodríguez, E. (2010). *Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación*. Máster Universitario de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education (7th edition)*. London: Routledge.

De Kee, S., Mura, R. y Dionne J. (1996). La comprensión des notions de sinus et de cosineschez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics*, 16, 2, 19-22.

Dominic, J.M. (2012). *A study of student understanding of the sine function through representations and the process and object perspectives*. Unpublished doctoral dissertation, The Ohio University, Ohio.

Fernández-Plaza, J.A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto*. Máster Universitario de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Fi, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy*. Unpublished doctoral dissertation, University of Iowa, Iowa.

Frege, G. (1998). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de Semántica y Lógica* (pp. 84-111). Madrid: Tecnos.

Gelfand, I.M. y Saul, M. (2001). *Trigonometry*. New York, NY: Birkhäuser http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0149-6

Hsieh, H.F., y Shannon, S.E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research*, 15(9), 1277-1288. http://dx.doi.org/10.1177/1049732305276687

Ibañes, M., Ortega, T. y Piñeiro, M. (1998). *Trigonometría*. Madrid: Síntesis.

Kaput, J.J. (1987). Representational systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kendal, M. y Stacey, K. (1997). Teaching trigonometry. *Vinculum*, 34, 1, 1-8.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 707-762. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lesh, R. y Doerr, H. (2000). Symbolizing, Communicating and Mathematizing: Key Components of Models and Modelling. En: P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. London: LEA.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Martín-Fernández, E. (2013). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Estudio exploratorio*. Máster Universitario de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J.F., y Rico, L. (2014*a*). Concepciones del seno y coseno puestas de manifiesto por estudiantes de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 455-464). Salamanca: SEIEM

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J.F. y Rico, L. (2014*b*). Meanings of sine and cosine as expressed by non-compulsory secondary school students. En S. Oesterle, C. Nicol, P. Liljedahl y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vol. 6, p. 168. Vancouver, Canada: PME.

Mathematical Association of England (1950). *The teaching of trigonometry in schools: A report prepared for the Mathematical Association*. London: G. Bell y Sons, Ltd.

Montiel, E.G. (2007). Proporcionalidad y anticipación, un nuevo enfoque para la didáctica de la trigonometría. *Acta Latinoamericana de matemática educativa*, 20, 590-595.

Moore, K.C. (2012). *Coherence, quantitative reasoning and the trigonometry of students. Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context*, 75-92.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática, *PNA*, 4(1), 1-14.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. Revista iberoamericana de educación matemática, *Unión*, 33, 11-27.

Rico, L., Flores, P. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2015). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 70, 48-54.

Schreier, M. (2012). *Qualitative content analysis in practice*. Thousand Oaks, C.A.: Sage Publications.

Sickle, J.V. (2011). *A history of trigonometry Education in the United States 1776-1990*. Unpublished doctoral dissertation, Columbia University, Nueva York, NY.

Strauss, A. y Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research (2nd Ed.)*. Thousand Oaks, C.A.: Sage Publications.

Thompson, K. (2007). *Student's understanding of trigonometry enhanced through the use of a real world problem: improving the instructional sequence*. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Illinois, IL.

Van Brummelem, G. (2009). *The mathematics of the Heaven and the Earth. The early history of trigonometry*.Princeton, NY: Princeton University Press.

Vizmanos, J.R., Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas 1ºBachillerato (Ciencias y Tecnología)*. S.M.

Weber, K. (2005). Student's understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 102, 2, 144-147.

Weber, K. (2008). Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. *Mathematics Teacher*, 17, 3, 91-112.

Zengin, Y., Furkan, H. y Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 31, 183-187.
http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.12.038

Students’ notions of elementary trigonometric ratios

Enrique Martín Fernández
Universidad de Granada
enrique_martin_f@hotmail.com

Juan Francisco Ruiz Hidalgo
Departamento de Didáctica de la Matemática.
Universidad de Granada
jfruiz@ugr.es

Luis Rico
Grupo de Investigación: Didáctica de la Matemática Pensamiento Numérico.
Universidad de Granada
lrico@ugr.es

Trigonometry is an exciting, significant, and unifying topic of the subject of mathematics at secondary school that links geometry, arithmetic mechanic, and that has multiple connections with other areas and disciplines. Although some topics related to trigonometry have been thoroughly studied –such as the history of its teaching–, not only there is little research on what makes trigonometry hard to understand, but neither about the intuitive ideas which students possess of trigonometric concepts.

This paper presents the results from an exploratory study concerning students’ notions about elementary trigonometric ratios within a group of non-compulsory secondary school students.

The chosen theoretical framework is based on Fregue’s semiotic triangle based on reference, sign, and sense. It adopts the notion of meaning of a school mathematic concept developed by Rico (2012). Indeed, this study belongs to the tradition that considers the notion of representation developed by Kaput (1987). Moreover, it is considered the notion of sense associated with Rico, Flores and Ruiz-Hidalgo (2015). Finally, we assume that the history is useful to determine the origin of some notions, to compare different representation systems, to discover basic problems, and to create frameworks.

The goal of the study was to identify and characterize the meanings handled by students when describing the sine and the cosine of an angle using a rising complexity sequence of contents, the structure of the responses, the interpretations made by the students and the history of the trigonometry.

The research was conducted with 74 students in the first year of non-compulsory secondary school (Bachillerato), following a Science and Technology track. The data sources were two questionnaires presented as two different options. The survey was administered in the middle of the academic year 2012/2013; the items were adopted from various researches which were analysed, revised and modified so as to achieve our goals; the subjects had received prior instruction on trigonometry. The survey was conducted in an ordinary lesson. The selected method is the content analysis, which defines a set of strict and systematic procedures in order to analyse documents.

The analysis contemplates how to categorize the students’ answers and what relationships may be found between the different categories of response in the global result of production by the participants. The study revealed that students have a diversity of meanings for sine and cosine. Firstly, related with the notion of angle: angle, angle interior of a triangle, ratio between side of a triangle, and secondly related with the notion of length: ordinate of a trigonometry function, Cartesian coordinates and sides of a triangle *and segments in the unit circle.* Most students in the study gave priority to representations such as length (51,22 %). In addition, several cognitive obstacles were identified: wrong connection between the «line system» and the «ratio system», poor understanding of the unit circle, and little knowledge about the notions of sine and cosine as a coordinate and as a proportion.

Other characteristics of the responses were: use of segments instead of axis to divide the circumference; incidental character of the circumference in most answers: although they use the circumference, more than the fifty percent of the students built the triangle to identify the sine and cosine.

The results obtained show the need to introduce different activities that relate the different components of the meaning of a school mathematical concept.