T-439

Una experiencia desde el Laboratorio de Matemáticas para la construcción de recursos pedagógicos en el aula

Wildebrando Miranda Vargas – Cristian Andrés Hurtado Moreno
brandowilder777@gmail.com – cristian.hurtado@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle, Cali, Colombia - Universidad del Valle, Cali, Colombia

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: Taller (T)
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: Laboratorio de matemáticas, matemáticas experimentales, Recurso pedagógico

Resumen

En este taller se comparte de manera vivencial una experiencia con el laboratorio de matemáticas de la Universidad del Valle, en Cali - Colombia, el cual ha tenido una trayectoria de más de 2 décadas, y cuyo propósito fundamental es reflexionar sobre la importancia de distintos recursos en la actividad de aula partiendo de una perspectiva denominada matemáticas experimentales, la cual puede ayudar a potenciar el desarrollo de pensamiento matemático en los estudiantes.

En la primera parte del taller se presentan algunos presupuestos conceptuales y metodológicos que han direccionado el trabajo en el Laboratorio de Matemáticas. En la segunda parte, se interactúa con los asistentes a partir del desarrollo de un taller compuesto de 2 actividades que pueden movilizar aspectos del pensamiento numérico y algebraico en estudiantes. Finalmente se muestran algunos resultados del laboratorio de matemáticas. Con todo esto, se espera generar con los participantes un espacio de reflexión sobre posibles limitaciones y potencialidades de la experiencia presentada.

El laboratorio de matemáticas

El Laboratorio de Matemáticas de la Universidad del Valle – en adelante LMUV - es una propuesta didáctica en la que se usan distintos tipos de materiales que evolucionan hacia la idea de recurso pedagógico y que favorecen la construcción de pensamiento matemático. El LMUV Se ubica en un espacio físico donde asisten estudiantes, profesores y comunidad educativa en general, para desarrollar diferentes tipos de actividades relacionadas con la idea de *Hacer Matemáticas* y que, grosso modo, se entiende desde 3 perspectivas: a) Matemáticas de investigación, b) Matemáticas realmente existente: se usan en la cotidianidad, y c)

ISBN 978-84-945722-3-4

Pedagogía de las matemáticas: tienen una orientación hacia la enseñanza-aprendizaje de las mismas.

El LMUV se ha venido consolidando como una propuesta transversal no sólo para las 3 perspectivas mencionadas anteriormente, sino para los distintos cursos universitarios de la Licenciaturas en Matemáticas de la Universidad del Valle que acuden al espacio para apoyar el trabajo académico con los estudiantes.

Algunos de los presupuestos básicos que fundamentan el trabajo en el LMUV son los siguientes:

- Un trabajo matemático tranquilo y no limitado en el tiempo: A pesar de que existen franjas de trabajo según las particularidades de cada población, se puede continuar en el estudio de una cuestión en cualquier momento, sin que exista una presión por una nota académica.
- Una función no amarrada exclusivamente a problemáticas sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Aunque al LMUV asisten muchos colegios de educación básica y media por un interés hacia el aprendizaje, también pueden asistir grupos de estudio distintos que tengan otro tipo de motivación: investigación, orientación lúdica, necesidad de divulgación, entre otras.
- Se proponen actividades matemáticas que permiten asumir una actitud investigadora, abordar la formulación y resolución de problemas, realizar procesos de experimentación y construir procesos de colaboración y socialización.
- La pregunta como eje primordial de la interacción sujeto-objeto.

En cuanto a la estructura del LMUV se basa en un sistema de fichas de trabajo clasificadas en Mesas y Secciones. Las Mesas corresponden a un eje de reflexión particular: Numérico, Geométrico, Variacional, etc. Las Secciones presentan la relación entre dos o más mesas de trabajo. En el anexo 1 se muestra la estructura organizacional del LMUV y en el anexo 2 se muestra un ejemplo de ficha de trabajo.

Algunos fundamentos conceptuales del Laboratorio de Matemáticas

ISBN 978-84-945722-3-4

El LMUV se sustenta en la posición filosófica que considera las Matemáticas como un constructo social, donde el contacto con la realidad tangible, las necesidades prácticas y los problemas alrededor del mundo físico, han sido decisivos en los procesos de elaboración teórica (Arce, 2005). Igualmente se sustenta en diversas conceptualizaciones, algunas de las cuales se sintetizan a continuación:

- *Comunidades de estudio:* Esta idea se basa en la TAD - Teoría Antropológica de lo Didáctico - que puede entenderse como un conjunto de personas que poseen el interés común de resolver una cuestión. La cuestión no es otra cosa que las preguntas problemáticas de una situación que no ha sido resuelta y que la comunidad decide abordar, propiciando un ambiente de colaboración, intercambio de ideas y diálogo permanente. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997)
- *Recursos pedagógicos:* Aunque la idea de recurso pedagógico tiene diferentes acepciones desde distintas posturas teóricas, retomamos la conceptualización desarrollada por Vega y Gascón (2011) quienes realizan un acercamiento provisional a dicha noción donde se entiende por recurso pedagógico "a lo que congrega en una sola unidad de análisis el uso de los materiales, artefactos educativos o documentos que los maestros traen a clase y los actos discursivos en los cuales aquellos toman un sentido y significación particulares" (p.4).

Estas conceptualizaciones hacen de este espacio un escenario con un fundamento conceptual que, tal y como ya se señaló, busca promover el pensamiento matemático en los sujetos que se apoyen de él, de acuerdo con el tipo de actividades que se promuevan según se tenga alguna intensión. Así, por ejemplo, las fichas de laboratorio que se proponen abordar en el desarrollo de este taller, aportan fundamentalmente al *pensamiento numérico,* el cual puede ser entendido como "la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones" (Mcintosh, citado por MEN, 1998, p.19); y al *pensamiento variacional*, entendido como la actividad intelectual mediante el cual el sujeto analiza,

ISBN 978-84-945722-3-4

comprender, representa y modela situaciones dinámicas, es decir, fenómenos de variación y cambio en los que las magnitudes estudiadas covarían de algún modo (MEN, 1998; Vasco, 2002).

Metodología y propósitos del taller

Este taller, cuyo propósito fundamental es socializar algunas experiencias del Laboratorio de Matemáticas de la Universidad del Valle, en Cali – Colombia, a partir de la interacción con sus asistentes mediante la puesta en escena de dos fichas creadas en este espacio, se desarrolla del siguiente modo: en los primeros 20 minutos se socializa el trabajo que se ha realizado al interior del LMUV, así como algunos presupuestos conceptuales que lo fundamentan. En los siguientes 30 minutos los asistentes desarrollan la actividad del laboratorio *La criba de Eratóstenes*, y seguidamente se realizan algunas conclusiones del trabajo matemático que es posible promover con la actividad propuesta en esta ficha, para lo cual se proponen 10 minutos más. De manera análoga a los dos momentos anteriores, se emplean 30 minutos para el desarrollo de una segunda actividad, *El salto de las ranas*, y se finaliza este trabajo con 10 minutos adicionales para realizar algunas conclusiones sobre su uso a propósito de la actividad matemática que genera. Por último, se presentan algunos resultados del trabajo realizado al interior del LMUV, con el propósito de analizar con el auditorio las potencialidades y posibles limitaciones que presenta esta propuesta.

Desarrollo del taller

A continuación se presentan las dos actividades que se han decidido abordar con los asistentes al taller.

Actividad 1: La Criba de Eratóstenes.

Se presenta aquí una actividad del Laboratorio de Matemáticas correspondiente a una sección entre las mesas de aritmética y álgebra. Mediante esta actividad, los participantes pueden observar cómo desde una etapa exploratoria, se pueden ir trabajando propiedades numéricas y si así se quiere, también se pueden obtener expresiones algebraicas para modelizar el problema e ir más lejos, y proponer algunas demostraciones con ayuda del instrumento algebraico.

ISBN 978-84-945722-3-4

La Criba de Eratóstenes es una configuración de números naturales consecutivos y organizados en filas y columnas que inicialmente se creó con la intención de obtener los números primos comprendidos entre el 1 y el 100, aunque se puede extender la configuración inicial para obtener números primos mayores que 100. Sin embargo, en la actividad que proponemos, la intención no es obtener números primos, sino encontrar una estrategia para hallar la suma de los números que conforman un cuadrado nxn, siendo n un número natural cualquiera excluyendo el cero.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 1. Criba de Eratóstenes

ISBN 978-84-945722-3-4

En la Criba de Eratóstenes un cuadrado nxn es una configuración de n filas y n columnas de tal suerte que el número total de elementos del cuadrado coincide con el producto nxn. La región sombreada en la Figura 1, por ejemplo, corresponde a un cuadrado nxn, para con $n = 3$, compuesto por $3x3 = 9$, y la figura completa con la criba de Eratóstenes corresponde a un cuadrado nxn, para $n = 10$.

Cada cuadrado se designa por el primeo de sus elementos, siendo este el menor número natural que hay en el cuadrado, o lo que es lo mismo, el que coincide con el cuadrado superior izquierdo. De acuerdo con esto, el cuadrado sombreado de la Figura 1, se designaría de la siguiente manera: Cuadrado $3x3$ número 14.

A continuación se realizan las preguntas que los participantes deben ir realizando en su respectivo orden con ayuda de una calculadora cuando sea necesario:

a) Escoge un cuadrado 2x2 cualquiera, y suma los 2 números de cada una de las diagonales del cuadrado. Haz esto con 5 cuadrados más. ¿Qué observas de especial en dichas sumas?

b) Encuentra un cuadrado 3x3 cualquiera donde la suma de los 3 números de cada una de sus diagonales no de lo mismo. ¿Qué puedes decir aquí?

c) Ahora escoge el cuadrado $3x3$ número 1 y suma con la calculadora rápidamente los 9 números que hay allí. Haz lo mismo con los siguientes cuadrados 3x3: número 77, 10, 125. ¿Qué puedes decir de cada una de las sumas que allí se sugieren?

d) Encuentra una estrategia para sumar los 9 números de un cuadrado por 3x3 cualquiera. La estrategia debe ser eficaz en el sentido de que permita encontrar un algoritmo, para sumar rápidamente los 9 números sin necesidad de tener que ir sumando número por número. Justifica la estrategia que encontraste y comprueba de que realmente funciona.

e) Intenta realizar una demostración de tu estrategia, introduciendo las restricciones que consideres necesarias.

f) Ahora haz lo mismo que hiciste en los puntos d y e, pero con un cuadrado $4x4$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

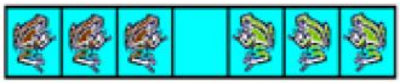
g) Encuentra una expresión que te permita calcular la suma de cualquier cuadrado nxn, realizando las restricciones necesarias. Prueba tu estrategia con el cuadrado $6x6$ número 13 y con el cuadrado $7x7$ número 22.

Reto: Encuentra una expresión que permita calcular una suma cualquiera en una configuración rectangular nxa.

Reflexión sobre la actividad: La actividad anterior permite evidenciar que además de trabajar con propiedades de los números naturales, se introducen ideas sobre las restricciones que se deben explicitar en las soluciones y la actividad puede ir evolucionando desde una etapa exploratoria, pasando a el establecimiento de conjeturas y teniendo la oportunidad de realizar demostraciones con ayuda de las propiedades que caracterizan el álgebra de números reales.

Actividad 2: El salto de las ranas

El *Salto de las ranas* es un juego que se propone para ser trabajado de manera individual, el cual necesita de una regleta compuesta de n casillas toda vez que se tengan $n-1$ ranas (o simplemente fichas) en juego, tal y como se ilustra a modo de ejemplo en la siguiente imagen para el caso de 7 casillas y 6 ranas.



El propósito del juego es pasar todas las ranas de un color ubicadas en uno de los extremos de la regleta a la posición que ocupan las ranas del otro color en el extremo opuesto, y viceversa. Para ello se deben tener en consideración las siguientes reglas de juego:

- ✓ Una rana puede avanzar si la casilla siguiente está vacía. También puede saltar a una rana de otro color siempre que la casilla siguiente esté vacía.
- ✓ Dos ranas no pueden ocupar una misma casilla.
- ✓ Las ranas no pueden retroceder.

De acuerdo con la descripción del juego, y tomando en consideración un número para de ranas (m), realiza lo siguiente:

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

a) Toma la regleta de 3 casillas y 2 ranas e indica el número mínimo de movimientos que se necesitan para acabar el juego.

b) Toma ahora la regleta de 5 casillas (y por tanto 4 ranas) e indica el número mínimo de movimientos que se necesitan para terminar el juego.

c) Juega *El salto de las ranas* tanto como sea necesario para completar la siguiente tabla:

Cantidad de ranas en juego	*Número mínimo de movimientos*
2	
4	
6	
8	
10	

d) Presenta una expresión general que te permita encontrar el número mínimo de movimientos necesarios para terminar el juego siempre que se tengan m ranas en juego, con m par.

e) Toma ahora en consideración el juego, pero en esta ocasión con una cantidad impar de ranas, por ejemplo, dos ranas de un color y una del otro para el primer caso (3 ranas en total), y completa la siguiente tabla:

Cantidad de ranas en juego	*Número mínimo de movimientos*
3	
5	
7	
9	
11	

f) Determina una expresión general que te permita encontrar el número mínimo de movimientos necesarios para terminar el juego siempre que se tengan m ranas en juego, con m impar.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Reflexión sobre la actividad: El desarrollo de esta actividad pone el acento en lo que en general diversos autores del campo han propuesto como una característica esencial del pensamiento algebraico, a saber: la generalización (Radford, 2003; Mason 1996, Godino, Castro, Ake & Wilhelmi, 2012). Particularmente es una actividad que se centra en la generalización de patrones numéricos, en donde analizar la forma como covarían las cantidades de las dos magnitudes puestas en consideración (cantidad de ranas y cantidad de movimientos mínimos) en fundamental para atenderla, por lo que el dinamismo de ella salta a la vista. Esta actividad permite la exploración de diversas estrategias de juego, la realización de conjeturas y su posterior comprobación, a fin de encontrar un patrón que pueda ser expresado en su forma más general.

Conclusiones

El uso correcto del material manipulativo juega un papel fundamental en los procesos de construcción y desarrollo del pensamiento matemático en los diferentes niveles educativos. Así, es posible establecer una estrecha relación entre los manipulativos y la actividad matemática que se puede desplegar con su uso conforme unos propósitos establecidos. Desde esta perspectiva aparece la idea del LMUV como un escenario que posibilita la dialéctica entre ambos a partir del desarrollo de actividades con carácter experimental, de modo tal que quienes las enfrentan pueden asumir un rol investigador, experimentar un interés por el "hacer matemáticas", abordar la resolución de problemas y asumir procesos de colaboración conjunta conformando así comunidades de estudio. Las dos actividades compartidas con los asistentes al taller son un reflejo de lo indicado.

Referencias bibliográficas

Arce, J. (2005). Laboratorio de Matemáticas para la educación matemática. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Chevallard, Y. Bosch, M. y Gascón, J. (1997): Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, ICE/Horsori: Barcelona

Garzón, D. & Vega M. (2011). Los recursos pedagógicos en la enseñanza de la geometría. XIII Comité Interamericano de Educación Matemática. Brasil: CIAEM.

ISBN 978-84-945722-3-4

Godino, J., Castro, W., Ake, L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elmental. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, 26, 483-511*.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran, y L. Lee (Eds.), *Approach to algebra: Perpectives for Research and Teaching*, (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

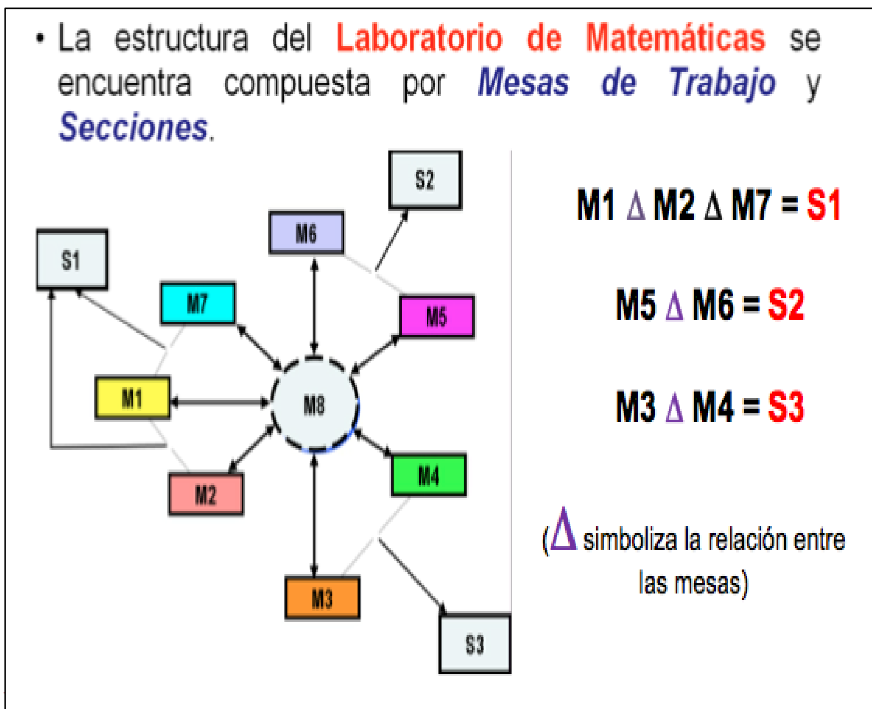
Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). Lineamientos Curriculares para Matemáticas. Bogotá: Editorial Magisterio.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to studentes" types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías., Bogotá: Editorial Magisterio.

ANEXOS

ANEXO 1: ESTRUCTURA DEL LMUV.



ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO 2: EJEMPLO DE UNA FICHA DE TRABAJO DEL LMUV.

Universidad del Valle

LABORATORIO
DE
MATEMÁTICAS

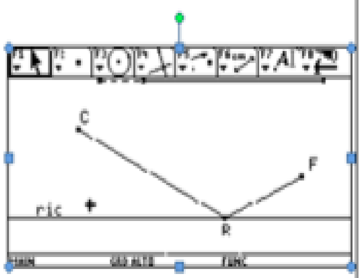
Instituto de educación y pedagogía

EL FUEGO

Distancia Mínima

Un excursionista que se encuentra en el punto C ha visto un incendio en su tienda de campaña localizada en el punto F. Para apagar el incendio, él debe buscar agua en el río.

¿Cuál es el camino más corto que debe seguir el excursionista?



F003

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4