

PROBABILIDADES GEOMÉTRICAS: EJEMPLOS Y REFLEXIONES DIDÁCTICAS

Gabriela Patricia Net – Mariana Andrea Aragón
gabriela_net@hotmail.com – mandrearagon@gmail.com
Universidad de Buenos Aires, Argentina. Goethe Schule – Buenos Aires, Argentina.

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Modalidad: T.

Nivel educativo: Secundario, Bachillerato, Formación y actualización docente.

Palabras clave: Probabilidad, Geometría, Didáctica, Problemas.

Resumen

El taller está destinado a docentes de Matemática del Secundario o Bachillerato, interesados en revisar o adquirir conocimientos sobre Probabilidades Geométricas. Desde el punto de vista didáctico, la enseñanza del concepto de probabilidad puede integrarse con conceptos geométricos elementales y familiares, con problemas históricos y paradojas clásicas. Se propondrá integrar conocimientos de Geometría y Probabilidades, con una breve exposición introductoria, y la resolución de algunos problemas geométricos relacionados con procesos aleatorios en contextos significativos. En las construcciones geométricas, la posibilidad o no de poder ser realizadas son ejemplos naturales de cuestiones de probabilidad. Se mostrarán algunos ejemplos de probabilidades que pueden materializarse con papel, tijeras y plegados, con diferentes niveles de complejidad. Se propondrán situaciones problemáticas que propicien la utilización y el desarrollo de diferentes formas de representación y favorezcan la reflexión y la comunicación. La variedad de representaciones de los problemas se apoyará en el empleo de algunas herramientas informáticas conocidas y de sencilla implementación en las aulas escolares (Geogebra, planilla de cálculo Excel). Se realizará también un análisis didáctico de las distintas posibilidades de formalización y justificación de los resultados en relación con los aprendizajes adquiridos, y los recursos conceptuales disponibles.

Introducción.

Hace ya más de dos décadas, el Dr. Miguel de Guzmán (1993) señaló una profunda depresión del pensamiento geométrico en la enseñanza matemática. En muchos ámbitos escolares este problema persiste aún: los contenidos de geometría están presentes en los currículos vigentes, pero en la práctica muchas veces quedan relegados, en tanto que contenidos numéricos, de álgebra pura o de geometría analítica adquieren mayor grado de desarrollo.

Existen investigaciones, como la de Báez e Iglesias (2007), que señalan dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, debidas a que los docentes no desarrollan contenidos establecidos en los programas, por falta de conocimientos académicos, o por desconocer su importancia. Por otra parte, como señala Tejada (2001), el docente es un mediador más entre el currículo y la situación real en la que se desarrolla, dado que interpreta y redefine la enseñanza en función de su conocimiento práctico, de su manera de pensar y entender la acción educativa. En este sentido la capacitación docente permanente opera como una herramienta necesaria para la revalorización de los contenidos de geometría y sus conexiones con otras áreas del saber, propiciando una comprensión más completa del mundo que nos rodea.

La lógica pedagógica que se pretende transmitir está basada en el aprendizaje del alumno, posicionado en un rol central como actor proactivo, creativo e investigador, que trabaja con modelos geométricos dentro de un marco de razonamiento espacial como dispositivo para descubrir la geometría que subyace en el entorno.

Referencias teóricas y orientaciones iniciales

Fouz (1994) señala entre los objetivos de la enseñanza de la geometría la conexión con otras áreas de la matemática u otras disciplinas técnicas, y con el proceso histórico seguido en su evolución que permite apreciar su aporte a la creación y el desarrollo de otras áreas del conocimiento.

Si se considera el experimento aleatorio que consiste en tomar al azar un punto de un cuadrado, y se quiere calcular la probabilidad de que tal punto pertenezca al círculo inscripto en dicho cuadrado, no es factible utilizar la definición clásica de Laplace, contando casos favorables y posibles. El problema se resuelve mediante la definición de probabilidad geométrica, como relación de medidas, efectuando el cociente entre el área del círculo inscripto y el área del cuadrado. Así, desde el punto de vista didáctico, para lograr un aprendizaje significativo, el abordaje del concepto de probabilidad puede integrarse con conceptos geométricos elementales y familiares, por medio de problemas que favorecen el establecimiento de conexiones entre áreas matemáticas, y de relaciones conceptuales significativas entre contenidos. La probabilidad geométrica está estrechamente relacionada

con un enfoque “a priori” de la probabilidad que permite el cálculo antes de realizar pruebas aleatorias. Pero, en definitiva, como indica Sáenz de Castro (s. f.):

... [H]ay muchos caminos para introducir los conceptos probabilísticos. Por ejemplo, el modelo de frecuencia relativa trata con datos discretos mientras el modelo de proporción, especialmente la probabilidad geométrica, puede tratar con datos continuos. Si adoptamos una perspectiva de modelización para la enseñanza de la probabilidad, los conflictos entre un enfoque clásico de equiprobabilidad, un enfoque de frecuencia relativa o un enfoque subjetivista, no tienen por qué ser un obstáculo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por el contrario, se debe equipar a profesores y alumnos con representaciones múltiples de probabilidad; es lo que Steinbring (1991) llama situaciones significativas.

Se plantea una perspectiva didáctica alineada con la Educación Matemática Realista, Bressan (2016), teoría que considera que partir de contextos y situaciones problemáticas realistas, en el sentido de representables, razonables, imaginables para los alumnos, resulta una acción generadora de su actividad matematizadora.

El presente cursillo pretende ser un aporte que permita a los participantes:

- Asumir un rol activo para resolver y analizar problemas aptos para ser desarrollados en cursos escolares, realizar un análisis conceptual y didáctico de los mismos y establecer líneas de trabajo para un futuro próximo en sus ámbitos de trabajo.
- Destacar el rol interdisciplinario e integrador de las probabilidades geométricas y conocer algunas de sus aplicaciones reales, con distintos grados de complejidad: problemas de agrimensura, cartografía, la geometría integral y la estereología, la tomografía computada, etc.

Temas por tratar.

Las probabilidades geométricas como fuente de ejemplos para la enseñanza de las probabilidades en la escuela. Síntesis histórica; la aguja de Buffon, paradoja de Bertrand. Azar y construcción de triángulos. Problemas de encuentro. Simulaciones y visualizaciones. El rol de la tecnología.

Algunos ejemplos.

La posibilidad o imposibilidad de realizar construcciones geométricas proporciona ejemplos naturales de cuestiones de probabilidad. Como problemas iniciales básicos se mostrarán algunos ejemplos de probabilidades relacionados con triángulos y otras figuras geométricas simples, que pueden materializarse con papel, tijeras y plegados, entre los que citamos:

- Un vértice de un triángulo isósceles se toma al azar, y se dobla el triángulo hasta hacer coincidir ese vértice con el punto medio del lado opuesto. ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un trapecio? ¿Y un trapecoide? ¿Y si el triángulo es equilátero?
- Un vértice de un cuadrado de papel se hace coincidir con otro vértice tomado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un triángulo?
- Si se toma al azar un vértice de un triángulo isósceles, y se dobla el triángulo haciendo coincidir ese vértice con cualquier punto del lado opuesto, ¿cuál es la probabilidad de que se forme un trapecio?

El documento del *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) destaca la importancia de la representación como un proceso matemático, que implica el uso de recursos verbales, simbólicos y gráficos, traducción y conversión entre los mismos. Se propondrán situaciones problemáticas que propicien la utilización y el desarrollo de diferentes formas de representación y favorezcan la reflexión y la comunicación:

- En el interior de un cuadrado $ABCD$ se elige un punto P al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el triángulo ABP sea obtusángulo? ¿Acutángulo? ¿Rectángulo?
- Dos números x e y se eligen al azar, con $0 < x < 4$, $0 < y < 4$. Calcular la probabilidad de que la suma de ambos números sea mayor que el producto.

La variedad de representaciones de estos problemas se apoyará en el empleo de algunas herramientas informáticas conocidas y de sencilla implementación (Geogebra, planilla de cálculo Excel), y de recursos de Internet para la realización de simulaciones, tablas y gráficos. Se propiciará también el análisis didáctico de las distintas posibilidades de formalización y justificación de los resultados en relación con los aprendizajes adquiridos y los recursos conceptuales disponibles.

Referencias bibliográficas.

Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL “El Mácaro”. *Enseñanza de la Matemática* 12-16, (número extraordinario), 67-87.

Bressan, A.; Gallego, M.; Pérez, S.; Zolkower, B. Educación Matemática Realista Bases teóricas. Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Enero 2016.

http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoría_EMER-Final.pdf.

Consultado 17/03/2017

De Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. <http://www.oei.es/edumat.htm>. Consultado 17/03/2017.

Fouz, F. (1994). Reflexiones en torno a la didáctica de la geometría. *Aula de Innovación Educativa*, 22, 11-16.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Sáenz de Castro, C. (s. f.) Probabilidad. Capítulo 5: La enseñanza de la probabilidad. Un problema pendiente.

<https://www.uam.es/servicios/apoyodocencia/ice/cesar/Capitulo%205.doc> Consultado 17/03/17.

Tejada, J. (2001) Función docente y formación para la innovación. EDUCAME, *Revista de la Academia Mexicana de la Educación*, 4(4), 111-138.