T-71

PROBLEMAS MATEMÁTICOS SIN RESOLVER QUE CUALQUIER NIÑO PUEDE ENTENDER

David Orden
david.orden@uah.es
Universidad de Alcalá, España

Modalidad: T
Nivel educativo: 7
Núcleo temático: IX. Comunicación y divulgación matemática
Palabras clave: problemas abiertos, investigación, docencia, aula

Resumen
Un lastre que incide en el rechazo a las matemáticas es su imagen de ser una ciencia inerte, sin nada por descubrir y limitada a unos pocos expertos. Este taller pretende demostrar que la investigación en matemáticas también puede acercarse al aula. Para ello se tratarán algunos problemas muy sencillos de entender (comprensibles a partir de los 6 años) que los investigadores matemáticos siguen intentando resolver. Se propondrá a los asistentes que jueguen con estos problemas, se explicará cómo resolver algunos casos y se mostrará la trayectoria histórica de cada problema.

1. Introducción

La percepción social de las matemáticas está fuertemente influenciada por las vivencias acumuladas en la etapa estudiantil. Los contenidos matemáticos de esta etapa son, en su casi totalidad, conocimientos con cientos de años de antigüedad, y esto contribuye a crear la imagen de que las matemáticas son una ciencia inerte. En esta imagen abunda, además, el hecho de que la investigación matemática se realiza, casi por completo, en centros especializados cuyos miembros mantienen un contacto exiguo o nulo con los docentes de etapas anteriores.

El principal objetivo de este taller es demostrar que, con una adecuada selección de los problemas, es factible acercar la investigación matemática a estudiantes desde los 6 años y sin límite de edad. Para ello se propondrán diversos problemas que los investigadores matemáticos aún no han conseguido resolver, pese a ser extremadamente sencillos de entender y manipular. Se propondrá a los asistentes que jueguen a intentar resolver estos

ISBN 978-84-945722-3-4

problemas y se explicará cómo resolver algunos casos. Asimismo, se mostrará la trayectoria histórica de cada problema, con el objetivo de tomar conciencia sobre el tiempo que ha llevado desarrollar y asentar aquellos conocimientos antiguos que se tratan en la etapa estudiantil.

2. El problema del plegado de sellos (de cómo no tenemos fórmulas para todo)

Uno de los lugares comunes en las matemáticas pre-universitarias, cada vez más frecuente también en la universidad, es la reducción de las matemáticas a una sucesión de recetas y fórmulas (Houssart, 2002; Mora, 2003). Con este ejemplo se pretende mostrar que hay problemas sencillos para los que no se conoce una fórmula.

Imagina que te dan una tira de tres sellos (Figura 1) y te piden que los dobles, por las líneas de unión, hasta apilarlos en una pila cuya base tenga el tamaño de un sello. ¿Cuántas maneras tienes de hacerlo?

Figura 1: Tira de tres sellos.

Fuente: Wikimedia Commons File:B239 42b Stamp Day 1000.png

Para unificar resultados, conviene aclarar que cada columna de sellos se identificará por una tripleta ordenada, de modo que la pila 1-2-3 es distinta de la pila 3-2-1. De este modo, no lleva mucho tiempo comprobar que hay exactamente seis maneras de plegar la tira de tres sellos, que se corresponden con las seis maneras posibles de ordenar los números {1,2,3} (Figura 2).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

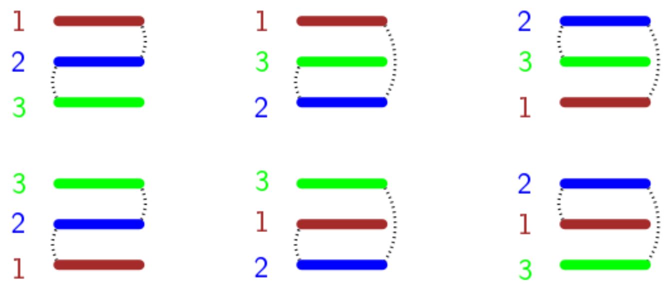


Figura 2: Las seis maneras de plegar una tira de tres sellos.

Para contar todas las posibles maneras de ordenar un conjunto de números {1,…,n} sí tenemos una fórmula, pues el resultado es el número factorial n! Como hemos avanzado que el del plegado de sellos es un problema para el que no se conoce fórmula, se intuye que nuestro problema no va a coincidir con el de la ordenación de un conjunto de números. Para comprobarlo, basta plantearse cuántas maneras hay de plegar una tira de cuatro sellos (Figura 3).

Figura 3: Tira de cuatro sellos.

Fuente: Wikimedia Commons File:B239 42b Stamp Day 1000.png

Si este problema no coincide con el de ordenar el conjunto de números {1,2,3,4}, deberá haber alguna ordenación que no se pueda conseguir con la tira de sellos. Efectivamente, por ejemplo la ordenación 1-3-2-4 es imposible de conseguir doblando la tira de sellos. Por ello,

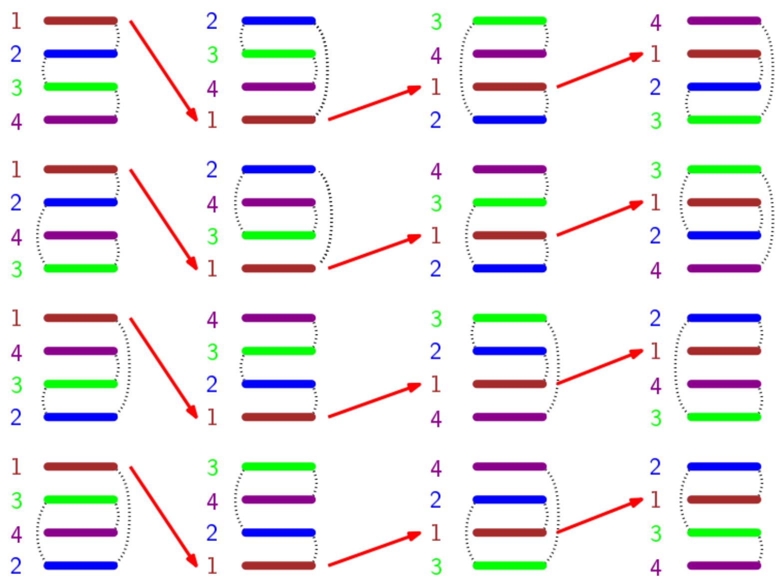
ISBN 978-84-945722-3-4

el número de maneras de doblar una tira de cuatro sellos será inferior a 4!=24, pero ¿cómo estar seguros de que hemos encontrado todas las posibilidades?

Una buena estrategia es contar cuántos plegados hay con el sello número 1 en lo alto de la pila, y luego tratar de utilizar esta información para contar el número total de plegados. De este modo, podemos convencernos de que hay solo cuatro maneras de plegar la tira de sellos manteniendo en lo alto el sello número 1 y, moviendo ese sello número 1 a cada una de las otras tres posibles posiciones, obtenemos un total de 16 posibles plegados (Figura 4).

Este "truco", que el lector o el asistente al taller habrán asimilado en unos pocos segundos, tardó mucho más en descubrirse en la historia de las matemáticas. Fue utilizado por Sainte-Laguë (1957) para, 66 años más tarde de que Édouard Lucas (1891) propusiera el problema, conseguir llegar a contar el número de plegados para una tira de diez sellos.

En la actualidad solo se conoce el número de plegados para tiras de hasta 45 sellos, que son 3738492924779393526420 0. La lista completa de plegados para cada número de sellos es la secuencia A000136 de (OEIS Foundation Inc., 2017). Puede consultarse más información sobre este problema en (Orden, 2014b).



ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 4: Posibles maneras de doblar una tira de cuatro sellos. En cada columna, el sello número 1 aparece en cada una de las cuatro posiciones posibles.

3. El problema de minimizar el número de cruces (de cómo lo que se tiene por cierto puede no serlo)

Imagina que tienes que diseñar el plano de una ciudad muy sencilla, en la que solo habrá casas y fábricas. Puedes colocarlas donde tú quieras y, una vez colocadas, tienes que unir cada casa con todas las fábricas mediante una carretera (el mercado laboral está complicado y los trabajadores no saben a cuál de las fábricas les mandarán ir cada día).

Los cruces de carreteras serán puntos peligrosos, donde los coches pueden chocar, así que para minimizar el peligro tendrás que intentar que el plano de tu ciudad tenga el menor número posible de cruces.

La Figura 5 muestra dos posibles planos para una ciudad con tres casas y dos fábricas, uno con tres cruces y otro sin ningún cruce. El siguiente paso será intentarlo para tres casas y tres fábricas.

Para este tipo de ciudad resulta imposible dibujar un plano como el que nos piden que no tenga ningún cruce (Kuratowski, 1930), algo que intuimos después de un rato dibujando posibilidades. Deberemos conformarnos con que nuestro dibujo tenga el menor número posible de cruces.

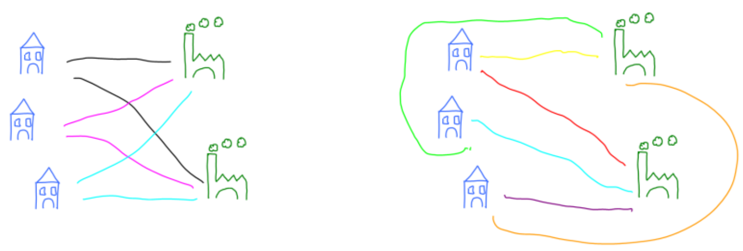


Figura 5: A la izquierda, un plano con tres cruces. A la derecha, un plano sin cruces.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Así podemos continuar para ciudades con cuatro casas y cuatro fábricas e incluso, si tenemos paciencia suficiente, para cinco casas y cinco fábricas. Lo interesante es que solo se conoce cómo dibujar el mejor plano para ciudades hasta ocho casas y ocho fábricas (Woodall, 1993). ¡No se conoce la manera de obtener el mínimo número de cruces para nueve casas y nueve fábricas!

Aún más interesante; todos los resultados que se conocen siguen una determinada fórmula (Zarankiewicz, 1955), pero a partir de los valores antes mencionados no se sabe si dicha fórmula sigue funcionando o no. Durante algún tiempo se dio por bueno que sí, hasta que se descubrió que la demostración de Zarankiewicz contenía errores (Guy, 1969). El lector interesado puede encontrar más información sobre este problema en (Orden, 2014a).

4. El problema de colocar cilindros que se toquen todos con todos (de cómo lo teórico puede tener utilidad)

El último de los problemas propuestos en este taller utiliza caramelos blandos con forma cilíndrica, por ejemplo los conocidos como Palotes. El objetivo es colocar cuantos más mejor, con la condición de que cada uno de ellos tiene que tocar a todos los demás, es decir, que se toquen todos con todos. La Figura 6 muestra un ejemplo con tres cilindros, en el que se puede comprobar que el verde toca al rojo y al naranja, el naranja toca al verde y al rojo, y el rojo toca al naranja y al verde.

Una vez visto que se puede hacer con tres, el objetivo será intentar hacerlo con cuatro, luego con cinco, y es de esperar que alguno de los asistentes lo consiga con seis o, incluso, con siete.

ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 6: Tres cilindros tocándose todos con todos.

Pero resulta que se desconoce si es posible para ocho cilindros, es decir, ¡no se sabe si se pueden colocar ocho cilindros de modo que todos se toquen con todos!

En esta versión inicial del problema no se ha puesto ninguna restricción, pero cabe plantearse el problema prohibiendo que los cilindros se toquen en sus extremos; por ejemplo, si los cilindros son infinitos y no tienen extremos. Esto es, los cilindros solo pueden tocarse en su parte intermedia, como en la Figura 6.

Para este problema, un poco más exigente, lo que se conoce también llega hasta solo siete cilindros (Bozóki et al., 2015). No se sabe si es posible colocar ocho cilindros infinitos tocándose todos con todos.

Lo más interesante de este problema es que está conectado con una interesante utilidad práctica, los materiales augéticos. Al estirar un material, lo habitual es que se estreche. Los materiales augéticos, por el contrario, se ensanchan al estirarlos. Un ejemplo de este tipo de materiales son las espumas Gore-Tex que se utilizan para impermeabilizar calzados y prendas de vestir, pero también aparecen en la naturaleza, por ejemplo en la piel de la ubre de la vaca.

La medida de cuánto adelgaza o engorda un material al estirarlo se llama coeficiente de Poisson, un número entre -1 y 0.5. Para una goma elástica (que adelgaza) ese coeficiente es positivo. Para un material augético (que engorda) ese coeficiente es negativo. Y resulta que las soluciones al problema de los cilindros infinitos son clave para conseguir una malla

ISBN 978-84-945722-3-4

metálica que alcance el coeficiente de Poisson -1, esto es, que se ensanche lo máximo posible al estirarla (Pikhitsa et al., 2009). Para más información, se recomienda leer (Orden, 2014c).

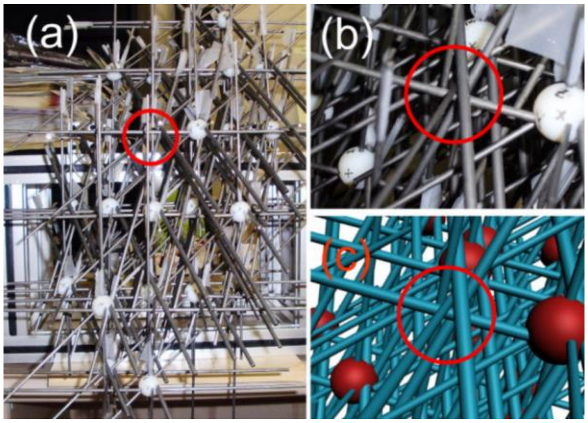


Figura 7: Malla augética Fuente: Pikhitsa et al., 2009.

5. Conclusiones

Este taller es una muestra de cómo es posible llevar la investigación matemática al aula. Existen múltiples problemas matemáticos que, pese a continuar abiertos, permiten ser explicados y manipulados por una audiencia muy extensa. Sería deseable potenciar y mejorar la comunicación entre investigadores y docentes de todas las etapas educativas, permitiendo que estos puedan motivar mejor a sus alumnos mediante ejemplos de matemáticas actuales y aplicadas, con un importante componente creativo y manipulativo. Por su parte, los investigadores mejoran de este modo sus habilidades comunicativas y, quizá más importante aún, proporcionan un servicio a la sociedad que los financia.

Referencias bibliográficas

ISBN 978-84-945722-3-4

Bozóki, S., Lee, T. L., & Rónyai, L. (2015). Seven mutually touching infinite cylinders. Computational Geometry, 48(2), 87-93.

Guy, R.K. (1969). The decline and fall of Zarankiewicz's theorem. In: Proof Techniques in Graph Theory (ed. F. Harary), New York: Academic Press, pages 63–69
Houssart, J. (2002). Simplification and repetition of mathematical tasks: a recipe for success or failure? The Journal of Mathematical Behavior, 21(2), 191-202. http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00116-5

Kuratowski, C. (1930). Sur le probleme des courbes gauches en topologie. Fundamenta mathematicae, 15(1), 271-283.

Mora, C.D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Revista de Pedagogía, 24(70), 181-272. Recuperado el 13 de diciembre de 2016 de http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922003000200002

OEIS Foundation Inc. (2017). The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.
Sainte-Laguë, A. (1957). *Avec des nombres et des lignes*. Librairie Vuibert.

Orden, D. (2014a). El problema matemático que nació en un campo de trabajo de la Segunda Guerra Mundial. http://cifrasyteclas.com/el-problema-matematico-que-nacio-en-un-campo-de-trabajo-de-la-segunda-guerra-mundial/ Consultado el 18/01/2017.

Orden, D. (2014b). In how many ways can you fold a strip of stamps? http://mappingignorance.org/2014/07/07/many-ways-can-fold-strip-stamps/ Consultado el 18/01/2017.

Orden, D. (2014c). Dos acertijos de Gardner para trolear y una sorprendente utilidad. http://cifrasyteclas.com/dos-acertijos-de-gardner-para-trolear-y-una-sorprendente-utilidad/ Consultado el 18/01/2017.

Pikhitsa, P. V., Choi, M., Kim, H. J., & Ahn, S. H. (2009). Auxetic lattice of multipods. physica status solidi (b), 246(9), 2098-2101.

Woodall, D. R. (1993). Cyclic- order graphs and Zarankiewicz's crossing- number conjecture. Journal of Graph Theory, 17(6), 657-671.

Zarankiewicz, C. (1955). On a problem of P. Turán concerning graphs. Fundamenta Mathematicae, 41(1), 137-145.

ISBN 978-84-945722-3-4