

T-399

## TALLER TEOREMAS DE LA GEOMETRÍA MODERNA: INCLUSIÓN EN EL AULA A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA

Eduardo Orellana

[eorellana@ucsc.cl](mailto:eorellana@ucsc.cl)

Universidad de la Américas, Concepción - Chile

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos

Modalidad: T

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Enseñanza, geometría dinámica, geometría clásica, geometría moderna, construcciones.

### Resumen

*El propósito de este taller es atraer a los participantes en la reflexión y el trabajo en el aula que un profesor debe considerar al momento de enseñar geometría. Se presentarán tareas desarrolladas en el marco de propuestas e investigaciones, las cuales serán analizadas desde la construcción con uso de la geometría dinámica por medio del software Geogebra y se considerará la conexión entre el trabajo personal de cada participante y el trabajo en la enseñanza de algunos teoremas de la geometría Euclidiana entre el siglo XII y XVIII. Específicamente, serán analizadas las bases conceptuales previas necesarias para la construcción de estos teoremas y esas conexiones que dará la geometría dinámica presentes en las tareas propuestas. El taller contempla una puesta en común donde los participantes podrán discutir los alcances e implicancias entre los distintos tipos de trabajo, lo que permitirá reflexionar desde un enfoque teórico aspectos que muchas veces no son abordados ni cuestionados, provocándose vacíos en el aprendizaje y la enseñanza de la Geometría clásica tanto en la formación del profesor como en la enseñanza escolar.*

**Palabras clave:** *Teoremas clásicos, teoremas modernos, geometría, construcciones..*

### 1. Introducción

El siguiente taller tiene como referente los trabajos de investigaciones que tratan problemas tanto en las aulas de educación secundaria como en las aulas de formación de profesores en las universidades. Se ha podido detectar que se repite una ausencia de la construcción de teoremas considerando la geometría dinámica, en especial como es el caso de las aulas

286

escolares, pero se ha tratado de fortalecer lo contrario a su desarrollo (García & López 2008; Alsina, C. & Fortuny, J. 1997; Bressan, A. & Bogisic, B. 2000; entre otros).

Respecto de estos trabajos, cabe señalar al menos dos puntos. Primero, en su mayoría, estos trabajos no tienen como objetivo específico enseñar a construir algún teorema en particular, y en general no tienen a los teoremas de la geometría moderna como foco de sus propósitos. Las excepciones respecto de estos trabajos, esto es, propuestas dedicadas explícitamente a la enseñanza de la geometría clásica con uso de softwares son el trabajo de Moriena, S. & Scaglia, S. (2003) y la investigación de Alsina (1997).

El propósito del taller es poner en práctica el trabajo personal de cada participante y contrastarlo con el trabajo que se realiza hoy en día en la enseñanza de las matemáticas, particularmente, en situaciones que han surgido desde la investigación. Este trabajo da cuenta que en geometría, el profesor trabaja una geometría sin conexiones entre una y otra junto a la falta de trabajo que considere la necesidad de elementos básicos de ella para la inclusión de esta misma en el aula para los logros, por ejemplo, de los objetivos de enseñanza escolar.

## **2. Dimensión de la enseñanza de algunos teoremas entre los siglos XII al XVIII**

Para el desarrollo de este taller, utilizamos como constructo teórico algunos de los teoremas desarrollados entre los siglos XII y XVIII por Feuerbach (1822), Miquel (1838), Steiner (1856) inspirados en el trabajo de Poncelet (1820). Un primer problema, de índole general, se refiere a la enseñanza de la geometría, independiente del tipo de teorema que se intente enseñar a producir. Diversos estudios (por ejemplo Gamboa, 2010, Ballester, et al., 2010) han demostrado las dificultades que supone el transformar a un estudiante en un geómetra “maduro”. Pero este primer problema se agudiza en un segundo problema de carácter específico más específico, esto es, cuando el o los teoremas que se pretende enseñar son de la geometría c Además de los estudios anteriores de índole conceptual, existen otros estudios empíricos que han documentado una serie de dificultades que enfrentan los sujetos que deben usar un teorema de la geometría clásica. Van (1986) presenta algunos problemas que enfrentan los estudiantes frente a la geometría clásica:

- a) La falta de revisión de textos de geometría

- b) El mal manejo de los teoremas básicos necesarios para el desarrollo de posteriores que son consecuencia de estos primeros.
- c) Inconsistencia entre el uso de la construcción con regla y compás y software de geometría frente a los teoremas clásicos.
- d) Escasa jerarquización de la información
- e) La sobre exageración de contenidos presentados en el currículo (aspectos que se prometen pero no se cumplen o viceversa).

lásica.

Para describir el trabajo en los teoremas de la geometría clásica y los posteriores al siglo XII, se considera la inclusión de la geometría dinámica para la construcción de dichos teoremas (Feurbach & Poncelet, 1822), los cuales permiten analizar una situación de enseñanza y aprendizaje, estos tienen consecuencias y repercusiones para otros como se muestra en la siguiente figura (1).

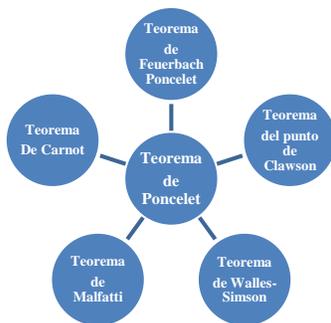


Figura 1: Teoremas principales bajo construcciones con uso de la geometría dinámica.

En el taller, la reflexión en conjunto que se realizará con los participantes sobre las situaciones de construcciones, nos permitirá favorecer la conexión entre los conceptos previos considerados de la geometría clásica como base para la construcción de los teoremas establecidos entre los siglos XII y XVIII (Levy, 1983) para así responder a la tarea de la transposición de los saberes en juego y reflexionar sobre sus alcances en el aula.

### **3. Estudio previo a a partir de la misma tarea**

Para realizar un análisis de las construcciones con uso de la geometría dinámica a partir de esta misma tarea es necesario identificar qué elementos aparecen en cada una de las construcciones como por ejemplo, los elementos secundarios en el triángulo o teoremas que consideran estos elementos para la construcción de circunferencias específicas. Como se ha señalado, el objetivo es identificar teoremas básicos previos y considerarlos desde ellos en la construcción de otros posteriores existentes desde su aparición, y las respectivas consecuencias.

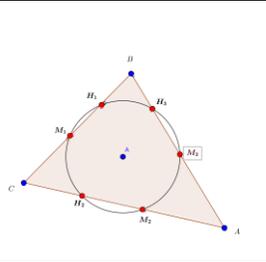
En este taller se presentan tareas que provienen de trabajos desarrollados en investigaciones de quien los propone, las cuales dan sentido a cada conexión. También, se mostrarán como estas tareas pueden ser abordadas en la formación inicial de profesores o en las aulas de la educación secundaria con la finalidad de estudiar las consecuencias en el aprendizaje del saber geométrico presente. El asistente, discutirá temas enmarcados en los dominios de la geometría. En este sentido, se han identificado necesidades de concepciones geométricas clásicas que están implícitamente abordados en los teoremas del siglo XII al XVIII: el paso de construcciones de iniciales clásicas a la consecuencia de ellos en las construcciones posteriores, el análisis del teorema, y la transición entre los diferentes teoremas finales.

### **4. Tareas propuestas en el taller**

A continuación, se presentan algunas actividades que se trabajarán en el taller. El participante obtendrá sus conclusiones al comparar el cómo se establece la geometría presentada en el currículo escolar o la formación de profesores y el uso de esos contenidos para la construcciones de los teoremas considerados para este taller y reflexionará como los primeros influyen sobre el otro. Se cree necesario, por quien realiza el taller, el estudio de tareas de referencia como las que siguen, con el propósito de analizar y discutir su efecto en la enseñanza de la geometría.

#### **Tarea 1**

Dado un triángulo ABC, los pies de altura y los puntos medios a sus lados. ¿Existirá una circunferencia que contenga dichos puntos?, y si consideramos adicionalmente los tres puntos de Euler, ¿contendrá a los nueve puntos ahora esta circunferencia?. ¿Cómo obtener el centro de ella?. Explicar la respuesta y construir.



*Observación.* Se pueden extender las conclusiones y construcciones anteriores a nuevas conjeturas que llevan a nuevas consecuencias que terminan en nuevos teoremas para comprobarlas en sus construcciones.

### Cuestionamientos

¿Es posible conectar, con uso de la geometría dinámica, los elementos básicos de la geometría clásica con los teoremas de Feuerbach y Euler por parte del profesor, para fundamentar su respuesta?, ¿qué propuestas son utilizadas por el profesor para resolver el problema?, ¿qué aprendizaje se extiende?, ¿qué se privilegia con esta tarea?. En la tarea es posible resolver en una dimensión geométrica y su análisis así como en instituciones tales como la escuela o la universidad. En efecto, la tarea involucra en su enunciado una figura geométrica (triángulo), puntos medios, alturas, circunferencia así como concepciones nuevas como los segmentos y puntos de Euler. Luego, es posible abordar la pregunta desde un dominio geométrico (encontrando la solución mediante la construcción), o en un dominio intuitivo desde el uso del software Geogebra, mediante la formulación del teorema de Poncelet que cumple con la hipótesis del teorema de Euler.

### Tarea 2

Dado un triángulo ABC, su triángulo ex-tangencial y su triángulo ortico. ¿Existirá un punto que sea centro de homotecia de estos dos últimos?, y si consideramos adicionalmente las tres circunferencias ex-inscritas al triángulo dado, ¿cómo son los lados



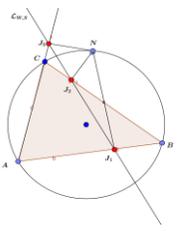
del triángulo ex-tangencial respecto a las circunferencias ex-inscritas ?. Explicar la respuesta y construir.	
---	--

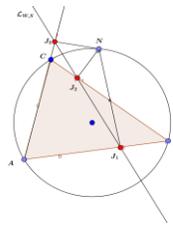
*Observación.* Al igual que en la tarea 1, se pueden extender las conclusiones y construcciones a nuevas conjeturas que llevan a nuevas consecuencias que terminan en nuevos teoremas comprobables en sus construcciones.

### Cuestionamientos

En este caso, los cuestionamientos consideran distinguir entre homotecia, y luego, reflexionar sobre las construcciones secundarias necesarias. Parte 1: ¿Qué caracteriza el trabajo en cada caso?, ¿Cómo se garantiza que la construcción realizada es correcta en cada caso? Identifique propiedades que aparecen en la veracidad de su trabajo. Parte 2: Identifique dos niveles escolares en que sería posible realizar este trabajo, atendiendo a las distintas formas de abordar la tarea en parte 1. Justificar la respuesta. ¿Cómo plantear la tarea en cada caso?, ¿qué elementos distingue y/o diferencia en cada una (definiciones, teoremas, trabajo de construcciones, uso de TIC, etc.)?. La situación es abordada desde un dominio con preguntas de la primera parte, las respuestas permiten evidenciar la necesidad de considerar los elementos básicos previos de la geometría clásica. Mientras que, en las preguntas de la parte 2, la idea es mostrar el rol de las respuestas a partir de la posición del profesor, y con esto, justificar validando los teoremas con la construcción. Estas cuestiones esenciales permiten analizar las implicancias en la formación de profesores.

### Tarea 3

Dado un triángulo ABC y la circunferencia circunscrita a él, ¿es posible obtener perpendiculares a los lados del triángulo desde un punto de la circunferencia?, y si ahora se tienen los tres puntos en el triángulo que son los pies de esas tres perpendiculares respectivas, ¿serán ellos no-colineales?. Explicar la respuesta y construir.	
--	--



### **Cuestionamientos**

¿En qué nivel escolar es posible tratar este problema?, ¿por qué?, ¿qué sucede con el punto encontrado?, ¿qué implicancias tiene el “determinar los puntos” para construir con Geogebra?. En esta situación se introduce el triángulo Pedal, y se presentan las consecuencias del teorema. Se espera hacer un cuestionamiento cuando el punto no pertenece a la circunferencia circunscrita; cómo se enseña la circunferencia circunscrita, a pesar de la insistencia por introducir la geometría dinámica en el currículo escolar. También, nos cuestionamos si la construcción continua es abordada en la formación inicial de profesores y los posibles paradigmas que esto puede producir.

### **5. Conclusiones**

Para finalizar, se espera que los participantes reflexionen sobre la geometría dinámica personal puesta en juego a la hora de resolver tareas considerando los teoremas de la geometría clásica entre los siglos XII y XVIII, analizando ambas dimensiones con el propósito de pensar en los estudiantes y en el éxito del aprendizaje de los saberes geométricos en juego. Además, reflexionar sobre la importancia de proponer a los estudiantes actividades en las cuales deban recurrir a diversas construcciones para su resolución, articulando las componentes geométricas clásicas previas y aprovechando la riqueza que significa usar esos contenidos clásicos en teoremas nuevos conocidos de la geometría y su implicancia en la construcción del conocimiento. Esta propuesta de la geometría dinámica para la geometría clásica nos proporciona una herramienta útil para analizar los aprendizajes y al proceso de transposición; en particular, es conveniente que sea considerado en la formación inicial de un profesor y lo que pone en juego en su enseñanza. Asimismo, gracias a la evidencia de lo que se quiere discutir en el taller, existen fenómenos ligados a la enseñanza del análisis de la geometría que no siempre son aprovechados. También es de interés enfrentar la transposición didáctica para una construcción que potencie el aprendizaje y posteriormente la enseñanza de la geometría. En una dimensión teórica se espera que los profesores articulen la construcción adecuada en sus alumnos.

### **Referencias bibliográficas**

Alsina, C., & Fortuny, J. (1997), *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*, Madrid: Síntesis.

Gamboa, R. & Ballester, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare* Vol. XIV, 2, 125-142.

Bressan, A. & Bogisic, B. (2000), *Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar...* Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

García, S. & López, O. (2008). La enseñanza de la geometría. Colección: Materiales para apoyar la práctica educativa. Instituto nacional para la evaluación de la educación, pag 41.

Levy, S. (1983). *Introducción a la geometría moderna*, Nueva York, Libros continental.

Moriena, S. & S. Scaglia (2003), "Efectos de las representaciones gráficas estereotipada en la enseñanza de la Geometría", *Educación Matemática*, vol. 15, núm. 1.

Van, P. (1986). El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Tesis doctoral, Universidad Real de Utrecht.