T-859

SITUACIONES PROBLEMA DE LA VIDA COTIDIANA, LA MATEMÁTICA ESCOLAR Y LA MODELACIÓN MATEMÁTICA: EL CASO DEL CHORRO DE AGUA

Rafael Pantoja Rangel, [1]María Inés Ortega Árcega, Elena Nesterova
rpantoja@prodigy.net.mx, maijua9@hotmail.com
Universidad de Guadalajara, [1]Universidad Autónoma de Nayarit, México

Núcleo temático: Matemáticas y su integración con otras áreas.
Modalidad: T.
Nivel educativo: Medio superior.
Palabras clave: Modelación, Fotografia, Tracker, Parábola.

Resumo

El taller se centra sobre la relación existente entre los elementos de la parábola y la forma de un chorro de agua, con el propósito de que el alumno vincule los elementos que intervienen en la modelación matemática de la situación problema. Previo estudio de videos en la red de la parábola, se observa que los ejes coordenados se mantienen estáticos, se ubica al objeto parábola en cualquier lugar del plano y se determinan los parámetros. En el taller se plantea, que el alumno, a partir del video o de la fotografía de un chorro de agua, determine, en primera instancia con las rutinas del Tracker, la ecuación cuadrática asociada y con GeoGebra se auxilia para ubicar el vértice, el foco y la directriz. En la segunda parte, se aprovecha la versatilidad del Tracker para mover y rotar los ejes coordenados y que el alumno se dé cuenta del efecto que se propicia sobre los coeficientes de la cuadrática y los parámetros de la parábola. Se plantean cuestiones como: Ubica los ejes coordenados de tal forma que b=0 en la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c$*, o bien, ¿Qué efecto tiene sobre los coeficientes que los ejes coordenados se roten 90°?*

Introducción

Una forma de enseñanza y aprendizaje es situar al estudiante en un contexto de su vida cotidiana (Téllez, López, Mora, 2013), porque le permite integrar nuevos conocimientos mediante el desarrollo de un proceso de investigación y aplicación de una situación problema (Hitt y González, 2014), así como en la presentación de alternativas de solución, en este caso, de la modelación matemática de la forma de un chorro de agua.

El flujo de un chorro de agua en caída libre ha sido tratado en distintos estudios (Balukovic, *et al*, 2015; Castro, *et al*, 2013), en donde se supone la forma de su trayectoria idealmente parabólica, tal y como se plantea en este trabajo, pues sólo se busca relacionar la forma del

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

chorro de agua con la ecuación de segundo grado, la parábola y sus parámetros con apoyo del Tacker y GeoGebra.

En la enseñanza tradicional, el hecho de saber matemáticas significa que el alumno solucione problemas planteados por el profesor o en el libro de texto, con enunciados como "desarrolla en fracciones parciales", "soluciona la ecuación" o "deriva la función", ejercicios sin relación con las actividades cotidianas y a la pregunta del alumno "¿por qué tengo que aprender esto?" y a la respuesta del profesor, "bueno, ya lo verás, pero ahora mismo, lo necesitas debido al examen", Pollak (2007, p. 111) lo critica como que "la gratificación siempre se retrasa y pienso que no se puede incentivar la motivación por la belleza de la matemática por si sola sin ver la utilidad".

En la figura 1, se señala que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se orienta a la solución de ejercicios o de problemas que genera conocimiento dentro de la misma matemática, omitiendo la relación del saber matemáticas con la vida cotidiana, que favorezca la generación de las competencias como trabajo colaborativo, elaboración de un reporte, la discusión de los resultados ante el grupo y la interpretación de las diferentes representaciones semióticas en función de la situación problema.

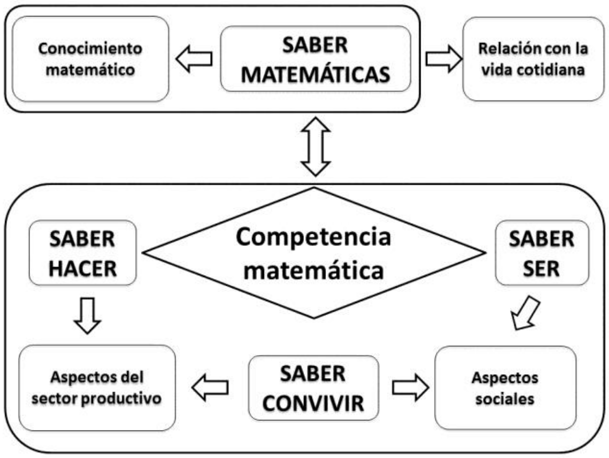


Figura 1. Elementos a considerar en la enseñanza de las matemáticas.

De acuerdo con Hitt y González (2014), una situación problema debe ser simple, fácil de entender (no implica que sea fácil de resolver), que propicie la reflexión y la interacción de los estudiantes, con la diferencia que la manipulación de la fotografía o video con el software

ISBN 978-84-945722-3-4

Tracker genera registros semióticos, que los miembros del equipo colaborativo relacionan y les oferta la posibilidad de construir, discutir y comprender, en sus diferentes formas de representación, el modelo matemático (Pantoja, Guerrero, Ulloa, Nesterova, 2016; Arrieta y Díaz, 2015) de forma del chorro de agua.

En el estudio los alumnos enfrentaron el reto de diseñar colaborativamente el escenario de grabación, a manipular la cámara de video, ya sea de su dispositivo móvil o estándar, a discutir e interpretar lo presentado por Tracker en la pantalla, a determinar con el empleo de GeoGebra, los parámetros de la parábola que modela la forma idealizada del chorro de agua, entre otras actividades.

Teoría de las representaciones semióticas

El sistema de representación semiótica (Duval, 2004) se empleó como sustento teórico, pues una vez que se procesa la fotografía o el video con el Tracker, se muestra en la pantalla de la computadora, diversas representaciones matemáticas relacionadas con la forma del chorro de agua, que el alumno tiene que interpretar y relacionar, con la finalidad interpretar la trayectoria del chorro del agua en función de los coeficientes de la ecuación de segundo grado, comparar las ecuaciones que calcula Tracker para describir la trayectoria del chorro del agua, cuando se desplazan los ejes coordenados a distintas posiciones y analizar los cambios en los coeficientes de la ecuación de segundo grado al girar los ejes coordenados 90°, 180° y 270° grados.

Los registros y representaciones semióticas (Figura 2) que emergen una vez que la fotografía o el video son tratadas con el Tracker son: visual correspondiente a la fotografía o al video; analítico con la ecuación de segundo grado; gráfico correspondiente a tres gráficas; numérico en tablas que señalan las coordenadas del chorro de agua; verbal en descripción que hacen los estudiantes sobre relacionar las distintas representaciones y presentación grupal; escrita indicada por el informe y elaboración de la presentación.

ISBN 978-84-945722-3-4

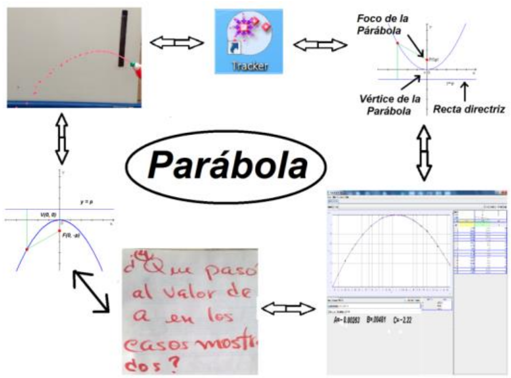
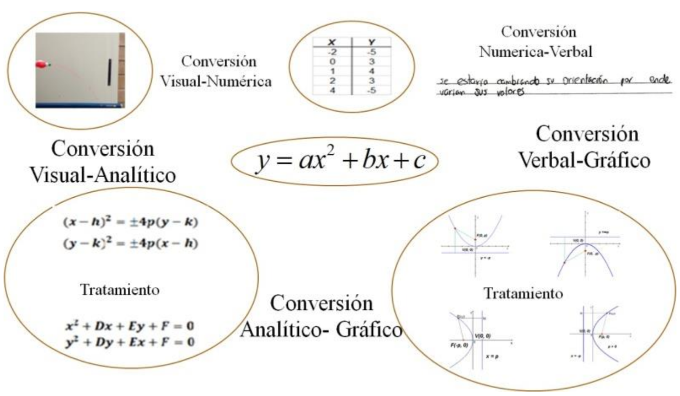


Figura 2. Un Esquema representativo de la construcción de la Parábola mediante la modelación matemática

Todas estas representaciones semióticas no se obtienen de manera natural (Figura 3), ya que es el profesor quien debe diseñar actividades para que el alumno logre apropiarse de ellos, es decir, con propósitos comunicativos, en los que se detecte tanto los distintos tratamientos y como las conversiones. Las actividades que se diseñaron y que se pretende replicar en el taller, se integraron en una secuencia didáctica, que los alumnos en trabajo individual y colaborativo, desarrollan a lápiz y papel y con la computadora.

Para Duval (2004) la actividad intelectual consiste esencialmente en la transformación de las representaciones semióticas, las cuales son de dos tipos: tratamiento y conversión. El tratamiento sucede cuando una transformación produce otra al interior de un mismo registro y hace relevante la elección del “mejor” cambio de registro para resolver el problema dado, al transformar internamente el registro.



ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 3. Registros semióticos del objeto parábola

Se realizan diferentes transformaciones dentro de un mismo registro, por ejemplo, si se considera el registro analítico, se puede aplicar el tratamiento del polinomio $f(x) = -.002651x^2 + 1.607x - 197.8$ obtenido con Tracker e identificar con ayuda de GeoGebra los parámetros de la parábola asociada V(288.38, 232.07) y F(193.16, 286.66) para determinar la forma $y - 288.38 = 4p(x - 232.07)^2$.

La conversión se refiere a la transformación de una representación de un registro en otra representación de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial, así por ejemplo del registro analítico al registro gráfico (Figura 4) o del registro verbal hacer la conversión al registro gráfico, numérico o analítico, para que el estudiante pueda interiorizar el conocimiento emergente.

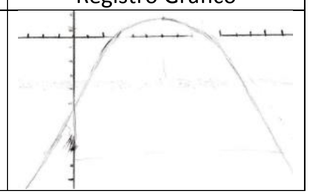
Registro Analítico	Registro Gráfico
a = -2.651×10^{-3} b = 1.607 c = $-1,978 \times 10^{2}$ f(x) = $(-2.651 \times 10^{-3})x^2 + (1.607)x - 1.978 \times 10^{2}$	

Figura 4. Conversión del registro analítico al gráfico.

La conversión cognitiva rápida y espontánea de la coordinación de al menos dos registros de representación, es la base de la comprensión (integral) de un contenido conceptual, situación que el alumno tuvo que enfrentar cuando en la pantalla del computador se muestra la fotografía o el video del chorro de agua, la gráfica que modela la forma del chorro de agua y los datos numéricos de la posición. Con otra rutina, se presenta la opción de seleccionar la función que más se apega a los datos, en suma, los estudiantes en trabajo colaborativo tuvieron que interpretar las distintas conversiones y los tratamientos entre los registros del objeto parábola con la situación problema empleada.

Metodología

Se trabajaron cuatro fotografías del lanzamiento de un chorro de agua, una de internet con la que se realizó la tarea de manejo de Tracker y GeoGebra, y tres inéditas que se tomaron como base para el trabajo en el aula y responder la secuencia didáctica, en tres tiempos: obtención

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de la ecuación de la forma del chorro; luego se desplaza el plano cartesiano, sin girar los ejes, a distintas posiciones; por último, se gira 90°, 180° y 270°.

Se organizó al grupo en equipos de cuatro integrantes para el trabajo colaborativo, que analizaron la fotografía con el Tracker para obtener las gráficas, la tablas de datos y la ecuación de segundo grado, para al final, discutir el modelo matemático en función de la situación problema.

En un segundo momento, se solicitó a los estudiantes que observaran los efectos causados por la traslación de los ejes coordenados sobre los coeficientes de la ecuación de segundo grado que arroja el Tracker. Esta situación se registró en video y en las hojas de trabajo de las actividades incluidas en la secuencia didáctica.

En la tercera sesión, se presenta en sesión grupal los reportes de cada equipo de trabajo y se entrega el reporte elaborado. Se grabaron todas las presentaciones en video para su posterior análisis.

Finalmente se entrevistó a cinco estudiantes sobre el desarrollo de la propuesta, para conocer de primera voz sus impresiones sobre esta alternativa de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Resultados

La secuencia didáctica, se integró de tres secciones y de la revisión de la primera sección, se evidencia que los alumnos tienen un nivel aceptable de manipulación algebraica, logran identificar los parámetros y los señalan sobre la gráfica que se les pide trazar en el cuaderno, aunque con sus acepciones, porque no logran identificar algunos parámetros (Figura 5), por ejemplo en el reporte del alumno 4, el desarrollo algebraico tiene una equivocación de signo, pero la gráfica la representa bien.

Otro aspecto que se trató en esta sección, fue que el alumno visualizara el efecto de los coeficientes a, b y c del polinomio $y = ax^2 + bx + c$, con la ayuda de los deslizadores de GeoGebra y no tuvieron problemas de interpretación, pero se nota un pobre dominio en la redacción de sus observaciones, pero en general logran identificar los diferentes desplazamientos de la parábola. No se manifiesta algún problema extremo sobre los conocimientos previos, como para plantear actividades remediales sobre el manejo algebraico requerido para la actividad.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

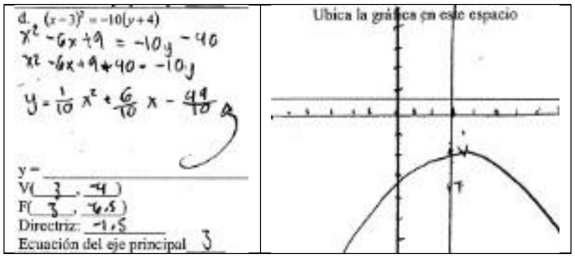
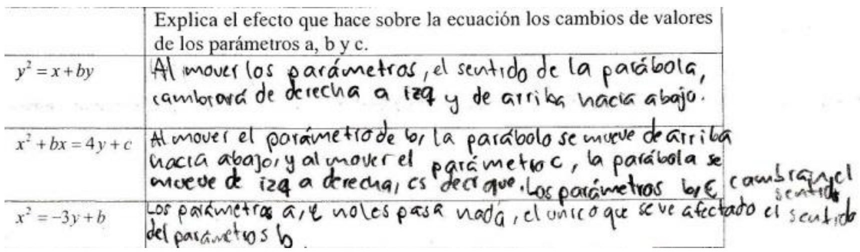


Figura 5. Extracto de la respondido por los alumnos en el cuaderno de trabajo.

En la figura 6, al hacer un análisis detallado de lo escrito, señala de manera correcta lo solicitado en este apartado de la secuencia didáctica.



	Explica el efecto que hace sobre la ecuación los cambios de valores de los parámetros a, b y c.
$y^2 = x + by$	Al mover los parámetros, el sentido de la parábola, cambiará de derecha a izq y de arriba hacia abajo.
$x^2 + bx = 4y + c$	Al mover el parámetro de b, la parábola se mueve de arriba hacia abajo, y al mover el parámetro c, la parábola se mueve de izq a derecha, es decir que. Los parámetros b, c cambian el sentido
$x^2 = -3y + b$	Los parámetros a, c no les pasa nada, el único que se ve afectado el sentido del parámetros b

Figura 6. Redacción no clara del estudiante con ideas correctas.

En la sección relacionada con la rotación del plano cartesiano de 90°, 180° y 270° fue en la que los alumnos tuvieron más dificultades, pues como Tracker no manifiesta en la pantalla alguna seña visible de tal acción, los alumnos no lograron desarrollar las actividades, manifestado en la secuencia y en las entrevistas.

Análisis de la entrevista realizada a los estudiantes

La entrevista refleja la opinión de los alumnos que han desarrollado las distintas actividades durante la fase experimental, y se muestra una actitud positiva, un gusto por haber sido partícipes activos en esta propuesta. Se entrevistó a cinco estudiantes sobre aspectos cualitativos, con un guion integrado por siete preguntas orientadas a conocer la opinión sobre esta alternativa didáctica para aprender, su experiencia anterior con este tipo de propuestas y el gusto y el efecto por la inclusión de las TIC en el aula; sólo una pregunta se orientó a la identificación de la trayectoria del chorro de agua con la ecuación que la describe. A continuación se presentan algunas respuestas de los estudiantes:

Profesor: ¿Cómo te pareció esta forma de aprender matemáticas?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A1: Me pareció padre porque siempre nos daban la ecuación y hacíamos la gráfica, sabíamos que era una parábola, pero no sabíamos que la podíamos aplicar a la vida real. Relacionábamos cosas que veíamos todos los días con cuestiones matemáticas.

Profesor: ¿Cómo ha sido la enseñanza de las matemáticas en tu vida escolar?

A4: Ha sido de una manera yo digo interesante, porque los maestros que he tenido de matemáticas, son buenos maestros, tienen su grado en maestría y doctorado, únicamente que entran mucho en la teoría, conceptualizan mucho, es poco atractivo la forma de aprender.

Conclusiones

Respecto de la modelación de la forma del chorro de agua, los alumnos logran determinar la ecuación, identificar sus parámetros y ubicarlos en la gráfica.

Los programas Tracker y GeoGebra ayudaron a visualizar la fotografía de la trayectoria idealizada del chorro de agua con la parábola: su gráfica, su ecuación y sus parámetros.

Cuando se desplazaron los ejes coordenados, lograron relacionar el movimiento con los coeficientes de la ecuación cuadrática. Donde se reflejó una falta de comprensión, fue en el momento de la rotación de los ejes coordenados y el efecto sobre los coeficientes de la ecuación de segundo grado, y una de las causas fue que al cambiar el ángulo de giro en Tracker, no se visualiza explícitamente la rotación (al pasar el ratón por encima del eje x cambia su forma) y pareciera que los ejes están donde mismo pues no se manifiesta ninguna acción, pero al ajustar el polinomio, difiere del que se calculó antes de la rotación.

Referencias

Arrieta, J., y Díaz, M. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *RELIME*, 18 (1), 19-48. DOI: 10.12802/relime.13.1811.

Balukovic, J., Slisko, J., Corona, A. (2015). ¿Cómo deja de fluir un chorro de agua de un recipiente en caída libre?. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias,* 593-600. ISNN: 1697-011X.

Castro, L., Campos J., Manzanares, B., Gomez, O., Figueroa C. (2013). Prototipo didáctico para visualizar la trayectoria parabólica de un chorro de agua. *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 7, No.3. 429-432* ISSN 1870-9095.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Santiago de Cali, Colombia:

Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.

Hitt, F., y González, A. (2014). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. USA: Springer Science+Business Media, 201-219.

Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016*).* Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development,* Vol. 5, No. 1, pp. 62-76. Published by American Research Institute. Recuperado el 23 de Mayo de 2016 de http://jehdnet.com/. Electronic Version. DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. IS**SN**: 2334-2978.

Pollak, H. (2007). Mathematical Modelling- A conversation with Henry Pollak. En W. Blum, G. Galbraith, H. Henn, M. Niss (Eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. (pp. 109-120). USA: Springer.

Téllez, A., López, A., Mora, C. (2013). Secuencias didácticas ABP para principios de la Dinámica y leyes de Newton en bachillerato *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 7, No.1. 47-57* ISSN 1870-9095.