T-1.136

INICIACIÓN ENTORNO AL INFINITO

Juan Antonio Prieto Sánchez - Antonio Ángel Guerrero Bey - Francisco Manuel Moreno Pino
juanantonio.prieto@uca.es - antonio.bey@uca.es - franciscomanuel.moreno@uca.es
Universidad de Cádiz (UCA), España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: Taller (T)
Nivel educativo: Nivel Medio o Secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: Infinito potencial, Infinito actual, Espejos, Material didáctico

Resumen

La intención general de un taller es formalizar conocimientos a través de la construcción, manipulación y estudio de objetos. Por todo ello, nuestro propósito es mostrar la relación entre una experiencia física con el infinito matemático en el ámbito educativo. Se piensa implementar cuatro sesiones experimentales: Finito -Infinito mediante las concepciones de Russell, Infinito Potencial- Infinito Actual: intuitivo- contraintuitivo, Infinito actual siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano y, por último, Infinito actual siguiendo esta vez el modelo de exclusión de Cantor.

Tras la finalización de las sesiones programadas se pretende terminar con una puesta en común donde se recogerán resultados y conclusiones de los participantes, enfatizando no sólo la naturaleza propia del infinito sino además su enfoque didáctico.

Introducción

La intención general en un auténtico taller, es acentuar los aspectos de trabajo activo que necesita todo aprendizaje y de trabajo útil, en el que se construyen, esclarecen o ratifican conocimientos a través de la construcción, manipulación y estudio de objetos.

Se refuerzan la capacidad de trabajar en equipo, el gusto por el trabajo bien hecho, el diseño y realización reflexiva de modelos materiales, el fomento de la imaginación y de la creatividad.

El tema tratado es el concepto matemático del infinito, es un aspecto que revierte gran dificultad. Para Hilbert citada en D'Amore (1996): *"¡el infinito! Ningún otro problema ha turbado tan profundamente el espíritu humano: ninguna idea ha estimulado tan profundamente su intelecto; y sin embargo ningún otro concepto tiene mayor necesidad de clarificación que el del infinito"* (p.345), y que llega a ser de gran importancia para la

ISBN 978-84-945722-3-4

construcción matemática y didáctica de otros conceptos. Mencionemos una frase dada por Dalessert citada también en D'Amore (1996): "*La enseñanza de la matemática debe perseguir dos objetivos que son propios de ella: el sentido de rigor lógico y la noción del infinito*" (p.345).

Para amenizar, entre sesiones se proyectaran cortos de videos de las experiencias realizadas con alumnos de secundaria, universitarios y profesores de matemáticas.

Al finalizar, reflexionaremos en grupo todo el proceso seguido. Se trata de establecer un diálogo[28] entre todos los miembros del taller para intentar conseguir una serie de conclusiones generales.

Material

Con el aparataje de los espejos paralelos (expuesto, también, en la Feria Matemática de este Congreso) y los fenómenos de reflexión:

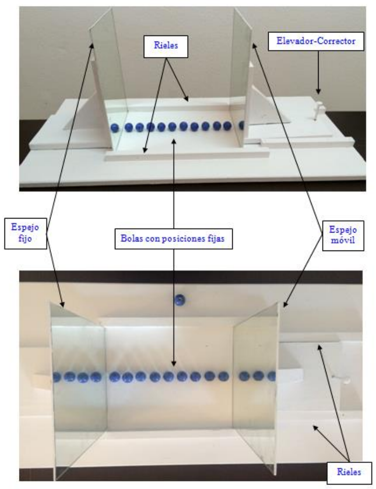

Figura 1. Aparataje

SESIÓN 1: *Finito -Infinito mediante las concepciones de Russell*

Nos basaremos para ello en la definición de Finito e Infinito de Bertrand Russell (1903). Parte de la teoría de los números cardinales, definiendo los números finitos para alcanzar la

[28] El diálogo como investigación trata de clarificar, indagar y profundizar en nuestras ideas y pensamientos, provocando un avance colectivo. (Quesada, 2017)

ISBN 978-84-945722-3-4

definición del concepto matemático que queremos tratar bajo una comparación entre finito e infinito.

Inicia el estudio comparando clases finitas con clases infinitas:

> Sea u cualquier clase y u' una clase formada quitando un término x de u. Entonces puede suceder o no suceder que u sea semejante a u'. Por ejemplo, si u es la clase de todos los números finitos y u' la clase de todos los números finitos excepto el 0, los términos de u' se obtienen sumando 1 a cada uno de los términos de u; esto pone en correspondencia un término de u con uno de u' y viceversa, no omitiéndose ningún número de ninguna de las dos clases ni tomándolo dos veces. De modo que u' es semejante a u. Pero si u está formada por todos los números finitos hasta n, donde n es algún número finito, y u' está formado por todos ellos excepto 0, entonces u' no es semejante a u... (Russell, 1903/1995, p.223)

Para ello, sean: u = 0, 1, 2, 3, 4,... y u'= u - $\{0\}$= 1, 2, 3, 4, 5, ... dónde se observan que u y u' son semejantes.

Ahora: u = 0, 1, 2, 3, 4,..., n y u'= u - $\{0\}$= 1, 2, 3, 4, 5, ...n+1 ; u y u' no son semejantes.

"Cuando es posible quitar un término de u y dejar una clase u' semejante a u, decimos que es una clase infinita. Cuando no es posible decimos que u es una clase finita" (Russell, 1903/1995, pp. 223-224).

De acuerdo con esto último, se llega a que si u es una clase finita, la clase formada agregando un término a u es finita, y recíprocamente. Con respecto a clases y sus partes diferencia las clases finitas de las infinitas, Rusell (1903/1995) puntualiza:

"En las clases finitas, si una es parte propia de otra, la una tiene un número menor de términos que la otra. (Parte propia es una parte y no el todo). Pero en las clases infinitas esto deja de ser válido" (p. 224).

Esta última diferencia hace que sea esencial para diferenciar finitud de infinitud.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Procedimiento 1

Con un solo espejo, se le coloca un número determinado de bolas que se le pedirá que cuenten, éstas y las reflejadas en el único espejo.

Figura 2. Cardinal finito

Se le pedirá que quite una bola y que las vuelva a contar. Finalmente se le hace la pregunta si tienen la misma cantidad de bolas antes y después de quitar esa bola.

A continuación, con los dos espejos ya enfrentados y paralelos, se le coloca un número determinado de bolas que se le pedirá que las cuenten, éstas y las reflejadas en los dos espejos.

Figura 3. Cardinal Infinito

De la misma forma, se le pedirá que quite una bola y que las vuelva a contar. Finalmente se le hace la pregunta si tienen la misma cantidad de bolas antes y después de quitar esa bola.

Momento 1

Se proyectaran entrevistas de alumnos de secundaria realizando y aclarando sus respuestas.

Figura 4. Entrevistas alumnos 1º Ciclo Secundaria

ISBN 978-84-945722-3-4

SESIÓN 2: ***Infinito Potencial- Infinito Actual: intuitivo- contraintuitivo***

Entendemos como *infinito potencial* lo que no tiene fin, lo que siempre, en término temporal; continúa, en término espacial. Asociada a la ausencia total de frontera o de límites, falta total de conclusión, como proceso que se repite, o progresa, indefinidamente. En cambio, el *infinito actual* lo asociamos a la idea de totalidad, a la idea de completez, el de unidad. Mientras que la primera connotación lo asociamos como un proceso la segunda, la consideramos como alcanzado y con los límites adquiridos. Consideramos el infinito actual como identidad cardinal cuando se trate de un conjunto de infinitos elementos numéricos, (Prieto, 2015).

Del mismo marco teórico de Prieto (2015), la aceptación del infinito potencial se podría concretar con los siguientes puntos:

- El concepto potencial del infinito responde a una interpretación natural intuitiva del infinito (Fischbein, 1982 citado en Garbin & Azcárate, 2001).
- La aceptación o no del infinito potencial puede presentar un obstáculo para la aceptación del actual (Turégano, 1996).

Y la aceptación del infinito actual, en los siguientes:

- El concepto del infinito actual responde a una interpretación contraintuitiva (Garbin & Azcárate, 2001).
- El infinito actual se acepta de menor grado y con una cierta indeterminación, Turégano (1996).
- El infinito actual no tiene un significado conductual, por tanto no es congruente con una interpretación intuitiva, Fischbein (1982, citado en Garbin & Azcárate, 2001).

ISBN 978-84-945722-3-4

- El estudiante crea sus propios argumentos, acertadas o no, para poder dar respuestas en la aceptación del infinito actual, Sierpinska (1994, citado en Penalva, 2001).
- "El desarrollo conceptual del infinito actual es bastante diferente, se manifiesta muy tardíamente y aparece siempre inmerso en situaciones de en conflictos" (Waldegg, 1996, p.108).
- Se podría pensar "en una especia de anterioridad lógica del infinito actual sobre el potencial, lo que tiene como consecuencia que su aparición sea inevitable en los procesos de creación y re-creación de las matemáticas en donde se presenta el infinito potencial" (Waldegg, 1996, p.108).

Procedimiento 2

Se trata de reflexionar sobre estos dos tipos de infinito con el aparataje y en la disposición de la figura 3.

Momento 2

Se proyectaran entrevistas realizadas a alumnos de secundaria.

Figura 4. Entrevistas alumnos 4º ESO

SESIÓN 3: *Infinito actual siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano (1991)*

Se trata de establecer como criterio la comparación parte/todo, comparación elegida por Bolzano basadas en la relación de inclusión.

Procedimiento 3

En la disposición de la figura 3, dispondremos un número de bolas de forma lineal facilitando la tarea las muecas de la plataforma. Les pediremos que nos diga y reflexiones cuántas bolas

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

hay entre los espejos. A continuación, les indicaremos que quite una bola (les recomendaremos la primera más cercana a ellos, y que acerquen posteriormente los espejos para que no se reflejen huecos). Se trata de reflexionar a la pregunta que tienen la misma cantidad antes que después una vez substraído esa bola y por qué.

Momento 3

Se proyectaran entrevistas realizadas a alumnos de secundaria.

Figura 5. Entrevistas alumnos 4º ESO-1ºBach

SESIÓN 4: *Infinito actual siguiendo esta vez el modelo de exclusión de Cantor (1983)*

En este caso, establecer como criterio de comparación uno-a-uno, comparación elegida por Cantor basada en la biyección entre conjuntos.

Figura 6. Montaje y disposición Cantor

Procedimiento 4

En una disposición no lineal pondremos dos conjuntos de cantidades diferentes de bolas. De nuevo se trata de reflexionar si tienen las mimas cantidades teniendo en cuenta las reflejadas.

Momento 4

Se proyectaran entrevistas realizadas a alumnos universitarios y profesores de matemáticas.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

 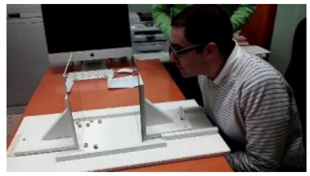

Figura 7. Entrevista Universitarios

SESIÓN 5: Conclusiones

En pequeños grupos reflexionaremos todo el proceso seguido. Relacionaremos la epistemología del infinito actual con la cognición.

Por otro lado, la progresión conceptual del infinito actual lo intentamos ajustar a las etapas establecidas por Piaget y García en *Psicogénesis e historia de la ciencia* (1982). De esa forma justifica la validez de una comparación entre la psicogénesis de un concepto y el de su historia. Para ello relacionaremos el proceso establecido en el taller con el trabajo realizado por Moreno & Waldegg (1991), donde analizaron las diferentes etapas en la evolución conceptual del término. Ellos evidenciaron cómo el trabajo de Bolzano en *Las paradojas del infinito* se ajustaba a la etapa intra-objetal y los de Cantor a la etapa inter-objetal, además de mostrar las dificultades encontradas por los estudiantes para lograr estas etapas dadas en la estructura curricular.

Referencias bibliográficas

Bolzano, B. (1851). *Paradoxien Des Unendlichen,* Leipzig (publicación póstuma). Las paradojas del infinito (trad. L.F. Segura), 1991, México: Mathema.

Cantor, G. (1983). *Fundamentos de una teoría general de las multiplicidades: una investigación matemático filosófica en la teoría del infinito* (J. Bares y J.Climent, trad.). (1895).Recuperado de internet http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Cantor83.pc.pdf.

D'Amore, B. (1996). El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. Un capo fértil para la investigación en didáctica de la matemática. *Epsilon, 36*, 341-359.

Garbin, S. & Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *SUMA, 38,* 53-67.

ISBN 978-84-945722-3-4

Moreno, A., & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 211–231.

Penalva, M. C. (2001). Implicaciones didácticas de las dificultades en el aprendizaje de conjuntos infinitos: representaciones de conjuntos numéricos en textos matemáticos escolares. En Ortiz, M. (Ed.), *V Reunión Científica Nacional de PNA (SEIEM)*. Palencia: Universidad de Valladolid.

Piaget, J., & R. García (1982), *Psicogénesis e historia de la ciencia,* México: Siglo XXI Editores.

Prieto, J.A. (2015). *Estudio del infinito actual como identidad cardinal en estudiantes de educación secundaria de 13 a 16* años. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga. España.

Quesada, M. A. (2017). *¿Qué es un diálogo socrático?* Recuperado de internet http://equanima.org/equanima/dialogo-socratico.

Turégano, P. (1996). Intuición del infinito en estudiantes de primero de BUP, *Epsilon*, *34*, 11-46.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. *1*(1)

ISBN 978-84-945722-3-4