T-682

RESIGNIFICACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL A TRAVÉS DEL USO DE GEOGEBRA Y LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS LINEALES

Alberto Sánchez Fernández

bogoaltur@gmail.com

Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Colombia

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Transformación, matriz, función lineal

Resumen

Las transformaciones lineales son aquellas funciones que respetan la suma vectorial y el producto por escalar. A cada transformación se asocia una matriz donde es posible visualizar elementos para el trabajo y abordaje de la función lineal en matemáticas y su enseñanza en el aula. Se parte desde reconocer las diferentes transformaciones geométricas lineales que se pueden representar en el plano cartesiano con ayuda de una matriz, aplicadas a diferentes objetos geométricos. Sera un momento de interacción, retroalimentación e interlocución entre los ponentes y los asistentes con amplia participación de los mismos. Las reflexiones del taller giran en torno en reconocer la representación y visualización de las transformaciones geométricas lineales a través de Geogebra que permite conocer y descubrir los efectos que genera la matriz a diferentes objetos y figuras geométricas, así como identificar qué se preserva, muta o cambia de los objetos a los que se le ha aplicado la matriz. Finalmente se desea generar un concepto diferente en la manera que se representa una función lineal, que no necesariamente se expresa como una línea recta, que pasa por el origen.

Transformaciones lineales

Una función $T: R^n \rightarrow R^m$ es una transformación lineal si se cumple:

a) Para todo $X, Y \in R^n$, $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$;

b) Para todo $X \in R^n y\ \alpha \epsilon R, f(\alpha X) = \alpha f(X)$.

ISBN 978-84-945722-3-4

La notación $T: R^n \rightarrow R^m$ indica que el dominio de T es R^n y el codominio es R^m. Para cualquier elemento x que $\in a\ R^n$, el vector $T(x)\ en\ R^m$ es la imagen de x bajo la acción de T. El conjunto de todas las imágenes T(x) es el rango de T.

MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Sea $T: R^n \rightarrow R^m$ una transformación lineal. Existe una única matriz A tal que

$T(X) = Ax$ para toda x en R^n

Para la transformación T, la matriz A será:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ . \ . \ . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ . \ . \ . & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} . \ . \ . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Que tiene m filas y n columnas, Siendo $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se puede escribir como vector columna y se denota:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Entonces se define el producto de la matriz A por la columna X como el valor de $T(x)$, colocado como columna. Ecuación que se escribe:

$$T(X) = AX$$

Esta asociación (a cada transformación lineal de una matriz) es biunívoca pues recíprocamente, si A es una matriz de orden $m\ x\ n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ . \ . \ . & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{22} \ . \ . \ . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces A define una transformación lineal T_A así:

$$T_A: R^n \rightarrow R^m$$

Definida por:

$$T_A(X) = AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \dots + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \dots + & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

La matriz A_{mxn} denota la familia la familia de todas las matrices de orden $m\ x\ n$ con componentes reales.

ISBN 978-84-945722-3-4

Esta asociación como lo dice Isaacs y Sabogal (2009) da una interpretación al problema de hallar todas las soluciones a un sistema de ecuaciones lineales, en donde resolver un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones con n incógnitas es encontrar todos los $X \in R^n$ tales que:

$$T(X) = B$$

Donde $T: R^n \rightarrow R^m$ es una transformación lineal cuya matriz es la matriz del sistema y B es un vector columna de R^m formado por los términos constantes de las ecuaciones. En términos de matrices, si A es la matriz de T, resolver el sistema es resolver la ecuación matricial:

$$AX = B$$

Para el caso particular de transformaciones en el plano en si mismo, es útil e interesante, interpretar el efecto geométrico de la transformación, es decir, describir que les hace la transformación a determinados objetos en el plano.

Ejemplo de uso del software Geogebra

La intención del taller es reconocer las diferentes transformaciones geométricas lineales que se pueden representar en el plano cartesiano con una matriz, con el uso y ayuda de geogebra se puede visualizar representar de una manera diferente, al aplicar distintas matrices a diferentes objetos geométricos, figuras, polígonos y construcciones.

Veamos un ejemplo de una transformación geométrica lineal

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$ax + by = y$

$cx + dy = x$

Los valores para las que estas dos ecuaciones sean ciertas son

$(0)x + (1)y = y$

$(1)x + (0)y = x$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora para ingresar esta matriz en el software Geogebra. Primero, se inserta en la bandeja de entrada entre doble paréntesis y separado por una coma los valores de la matriz, como se ve en la ilustración 1.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

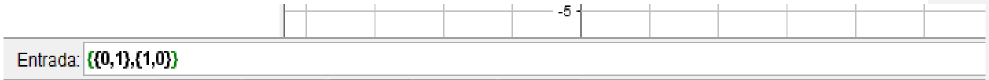

Ilustración 8

Luego se oprime enter, y la matriz se presenta en la parte superior izquierda en vista algebraica.

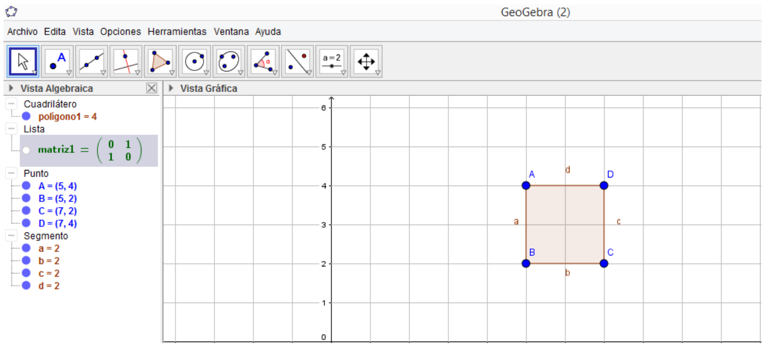

Ilustración 9

Ahora para aplicar la matriz a un objeto, en este caso un cuadrado, se escribe en la bandeja de entrada aplica matriz, en donde se escribe la matriz y el objeto al que se desea aplicar (ilustración 3)

Ilustración 10

Para distinguir el objeto al que se aplica la matriz, se debe escribir entre paréntesis y separados por una coma los puntos que conforman el polígono.

Ilustración 11

ISBN 978-84-945722-3-4

Generando el polígono 2 establecido como la aplicación de la matriz 1 al polígono {A, B, C, D} como se aprecia en la ilustración 4.

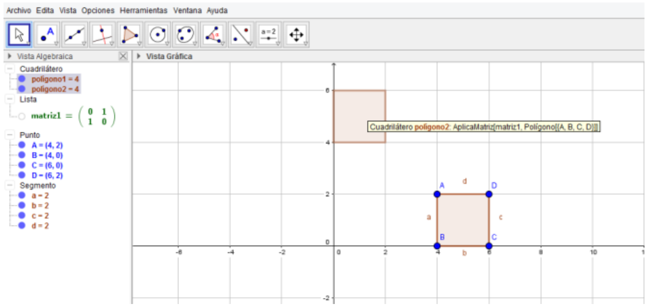

Ilustración 12

Los dos cuadrados son congruentes. Preservan el área y la forma. Al mover y desplazar con el mouse el polígono 1, es decir el primer cuadrado, se mueve y desplaza el polígono 2 (ilustración 5)

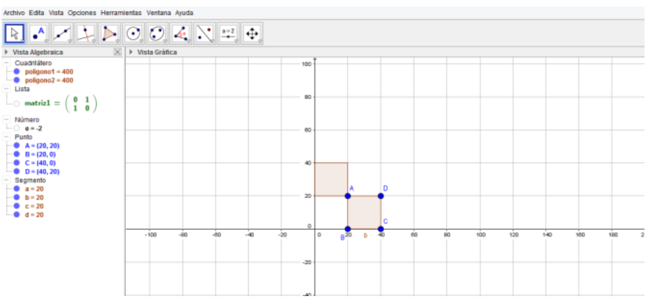

Ilustración 13

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ahora al acercar el polígono 1 al origen, el polígono 2 también se acercará al origen sobreponiéndose uno al otro, como se muestra en la ilustración 7 y 8.

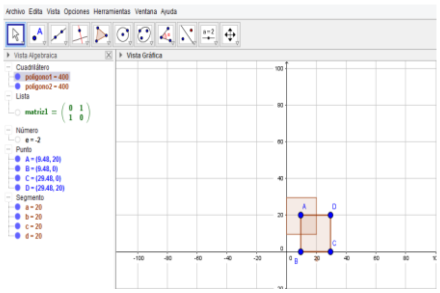

Ilustración 15

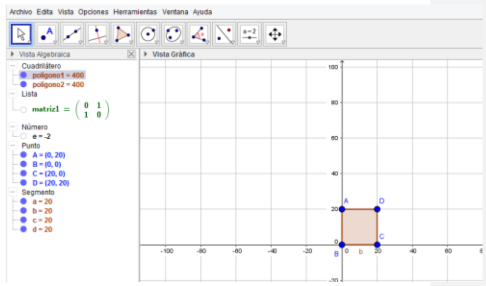

Ilustración 14

La transformación genera una reflexión sobre la recta $y = x$

$T(x, y) = (y, x)$

$T(0,6) = (6,0)$

$T(6,0) = (0,6)$

$T(6 + 0) = T(6) + T(0)$

ACTIVIDADES PROPUESTAS PARA EL TALLER

1) Determina la matriz asociada a cada transformación, y aplica esa matriz a un polígono. Identifica el efecto geométrico que genera.

$a)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$

$b)\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$

c)$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$

$d)\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}$

2) Determina la matriz $\begin{pmatrix} k & r \\ r & k \end{pmatrix}$ en donde k y r sean dos deslizadores que estén en el intervalo intervalo $[-3,3]$. Aplica la matriz a un polígono y activa el rastro de tal manera que se pueda

ISBN 978-84-945722-3-4

visualizar lo que pasa al mover los dos deslizadores y el polígono. ¿Qué sucede cuando k y r tienen el mismo valor o su reciproco?, ¿Qué sucede cuando $k = 0\ y\ r \neq 0$?

3) Qué efecto geométrico producen las matrices de la forma $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ cuando:

a) $q < -1$ b) $q = -1$ c) $-1 < q < 0$ d) $0 < k < 1$	e) $q = 0$ f) $q = 1$ g) $q > 1$

4) Sea $f: R^3 \to R^3$ la transformación dada por la matriz A. Describa la transformación f en términos geométricos:

a) A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) A= $\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$

5) ¿Qué otros objetos matemáticos, surgen con este trabajo? ¿Qué procesos matemáticos se desarrollan con este tipo de actividad?

ISBN 978-84-945722-3-4

Bibliografía

Hoffman, K. y R. Kunze (1971).*Álgebra Lineal.* Pretince Hall.

Lay, D (2012) Álgebra lineal y sus aplicaciones. Pearson., 4ª. Ed.,

Isaacs, R y Sabogal,S (2009). Aproximación al algebra lineal: un enfoque geométrico. Edición UIS.

ISBN 978-84-945722-3-4