T-41

LA CAJA DE POLINOMIOS

Oscar Fernando Soto Ágreda – Saulo Mosquera López
fsoto@udenar.edu.co – samolo@udenar.edu.co
Universidad de Nariño – Colombia – Universidad de Nariño - Colombia

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.
Modalidad: T.
Nivel educativo: Medio o secundario; Formación y actualización docente
Palabras clave: Caja de Polinomios, algoritmos, enseñanza.

Resumen
La Caja de Polinomios es una herramienta didáctica resultado del trabajo colectivo de profesores, del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, Colombia, y sus orígenes se remontan a los trabajos de Euclides, de Tabit ibn Qurra al-Harani, de Pierre de Fermat y Renato Descartes. Es un material didáctico con esencia lúdica que estimula varias esferas de la inteligencia, como la lógico matemática y la corporal cinestésica. Sumar, restar, multiplicar, dividir, factorizar polinomios, se convierten en algoritmos divertidos que plasman el conocimiento en saberes significativos y derivan en procedimientos de mayor riqueza que al tratarlos en forma tradicional. El propósito del taller consiste en, utilizar la versión virtual de la Caja de Polinomios, para motivar e ilustrar a los participantes en su uso como una alternativa de enseñanza para los procesos operatorios descritos anteriormente, así como reconocer que contribuye al desarrollo cognitivo, dinamizando los procesos de aprendizaje de las Matemáticas en diferentes grados de la Educación básica y que su aplicación depende de la creatividad docente, y su grado de interés en la planeación y desarrollo de estrategias sirviendo de mediador de los conceptos desde lo concreto hasta lo simbólico y lo puramente abstracto y formal.

Introducción.

La Caja de Polinomios, es una herramienta didáctica cuya construcción está apoyada en hombros de gigantes: Euclides, de quien de sus Elementos se toma la proposición 43 del libro I que dice: "*En cada paralelogramo los complementos de dos cualesquiera paralelogramos construidos alrededor de una diagonal del primer paralelogramo son iguales (equiextensos)*.", y que permite la construcción exacta de las fichas del juego. Tabit ibn Qurra el Harani apoya la construcción al proponer la idea de *homogeneización* que permite la representación de objetos de cualquier dimensión en el mundo bidimensional. El último

ISBN 978-84-945722-3-4

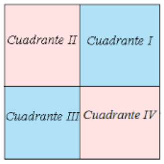
apoyo aparece con Descartes y Fermat, quienes desarrollaron la caracterización del plano cartesiano donde se conjugan los conceptos de espacio y tiempo para los objetos.

Este material didáctico permite desarrollar toda la operatoria algebraica con polinomios de una variable hasta de grado cuatro y dos variables hasta de grado dos en su versión tangible; en su versión digital, se presenta la operatoria con polinomios de una variable y hasta de grado tres. Algunos de los algoritmos que es posible tratar con la Caja de Polinomios y que se estudiarán en el desarrollo del taller son los siguientes: Sumar, restar, multiplicar, factorizar y dividir polinomios en una variable, así como sustituir variables.

El taller tiene como finalidad, capacitar a los participantes en la versión virtual de la caja de polinomios con el propósito de la construcción colaborativa de conocimiento para que esta herramienta pueda ser utilizada como un recurso adicional en el proceso enseñanza – aprendizaje. A continuación de disponen algunos ejemplos de cada una de las actividades que se ejecutarán en el taller.

Lectura y escritura de polinomios

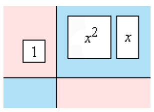
El contexto fundamental para utilizar *La Caja de Polinomios* es el plano cartesiano. Sus cuadrantes permiten escribir cualquier polinomio de coeficientes enteros, para ello, recordemos que el plano está dividido en cuatro cuadrantes.

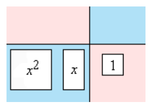


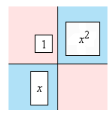
En el primer cuadrante las coordenadas (x, y) de cada punto son positivas y en el tercer cuadrante las coordenadas son negativas, por tanto, las fichas de la *Caja* que se ubiquen en estos cuadrantes corresponden a términos positivos del polinomio. En el segundo cuadrante, las coordenadas de un punto (x, y) muestran que su abscisa x es negativa y su ordenada y positiva, mientras que en el cuarto cuadrante, la abscisa es positiva y la ordenada es negativa, de donde se deduce que las fichas ubicadas en estos cuadrantes representen términos

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

negativos del polinomio. En consideración a lo explicado, algunas de las representaciones posibles del polinomio x^2+x-1 se muestran enseguida.





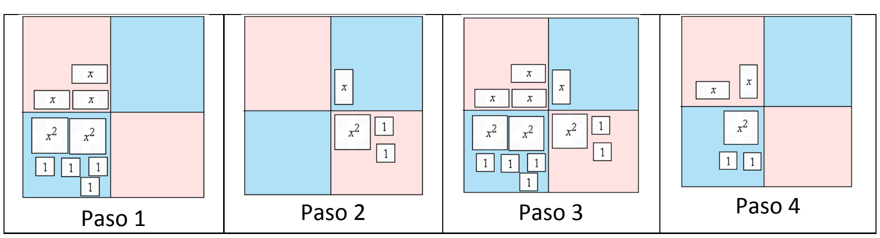


Adición de polinomios

Para calcular la suma de $p(x)$ y $q(x)$ es conveniente escribir el primer sumando $p(x)$ utilizando únicamente los cuadrantes SEGUNDO y TERCERO; el sumando $q(x)$ se escribe, en los cuadrantes PRIMERO y CUARTO. Sumar es sinónimo de AGREGAR, de modo que la suma se calcula leyendo el polinomio que queda escrito en TODO EL TABLERO (Plano Cartesiano). Recuerde que para leer un polinomio es aconsejable retirar del plano todos los CEROS que se produzcan, siendo cada cero todo par de fichas del mismo valor algebraico y cada ficha se ubica en un cuadrante de diferente color.

Ejemplo. Para efectuar la adición del polinomio $p(x)=2x^2-3x+4$ con $q(x)=-x^2+x-2$ se realizan los siguientes pasos.

1. Escribir el polinomio $p(x)=2x^2-3x+4$ en los cuadrantes segundo y tercero.
2. Escribir el polinomio $q(x)=-x^2+x-2$ en los cuadrantes primero y cuarto.
3. Retirar del plano, si las hubiere, los pares de fichas que equivalgan algebraicamente a cero; con lo que se obtiene lo que sigue.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

4. Leer el polinomio que queda escrito en TODO el tablero, tal y como se ve en el plano anterior; es decir, x^2-2x+2. De esta forma se obtiene que $\left(2x^2-3x+4\right)+\left(-x^2+x-2\right)=x^2-2x+2$

Sustracción de polinomios

Para calcular la diferencia entre $p(x)$ y $q(x)$, $p(x)-q(x)$ se procede de manera similar al cálculo de sumas y de acuerdo a los siguientes pasos.

1. Escribir el minuendo $p(x)$ en los cuadrantes SEGUNDO y TERCERO.
2. Escribir el sustraendo $q(x)$ en los cuadrantes PRIMERO y CUARTO.
3. Dado que *restar* es sinónimo de *quitar*, las fichas ubicadas en el primer cuadrante correspondientes a $q(x)$ deben cambiarse de signo, lo que equivale a trasladarlas al segundo cuadrante, de igual forma se procede con las fichas ubicadas en el cuarto cuadrante que deben trasladarse al tercer cuadrante.
4. Retirar del tablero, los ceros que se hayan configurado.
5. La diferencia está constituida por las fichas que finalmente quedan en el tablero.

Ejemplo. Para calcular la diferencia entre $p(x)=2x^2-3x+2$ y $q(x)=x^2-2x+1$, $p(x)-q(x)$ se realizan los siguientes pasos.

1. Escribir el polinomio $p(x)=2x^2-3x+2$ (minuendo) en los cuadrantes segundo y tercero.

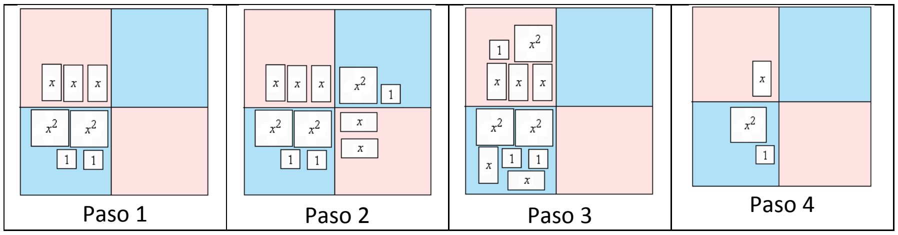
2. Escribir el polinomio $q(x)=x^2-2x+1$ (sustraendo) en los cuadrantes primero y cuarto.

3. Trasladar las fichas del sustraendo; las del primer cuadrante al segundo y las del cuarto cuadrante al tercero.

4. Retirar del plano las fichas que representen ceros.

5. Leer el polinomio resultante, en este caso $p(x)-q(x)=x^2-x+1$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



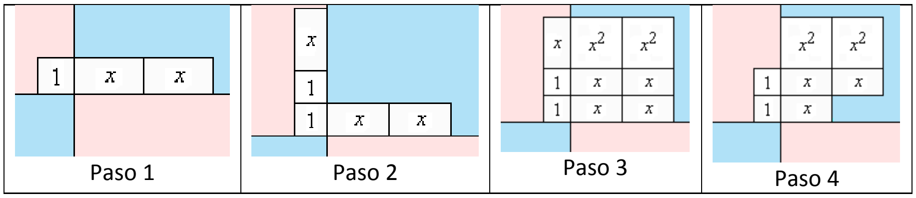
Multiplicación de polinomios de la forma $(ax+b)\cdot(cx+d)$

El plano cartesiano con sus ejes coordenados se constituye en una guía esencial para el cálculo de productos. El producto $p(x)\cdot q(x)$ corresponde al valor algebraico relativo de las fichas que configuran un rectángulo de base $p(x)$ y de altura $q(x)$ o viceversa. La lectura del producto se realiza, después de retirar los pares de fichas que algebraicamente equivalen a cero y que se ubican, para recordarlo, en cuadrantes de colores distintos, si es que los hubiere.

Ejemplo. El cálculo de productos de la forma $(ax+b)\cdot(cx+d)$ se ilustra con $(2x-1)(x+2)$.

1. Se toma como base el polinomio $p(x)=2x-1$, ubicando dicho polinomio a partir del origen y haciendo uso adecuado de los ejes coordenados, como se muestra en la siguiente figura.
2. Una vez hecho eso y utilizando la regla del juego de que fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común, se configura la altura del rectángulo cuya dimensión está dada por el factor $q(x)=x+2$.
3. Se arma completamente el rectángulo utilizando tantas fichas como sea necesario.
4. Finalmente se procede a retirar fichas que algebraicamente equivalen a cero; en este caso, un par de fichas rotuladas con x y se procede a leer la respuesta teniendo en cuenta la ubicación de las fichas en sus respectivos cuadrantes; el tablero se mira como sigue.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Y en consecuencia se tiene que $(2x-1)(x+2)=2x^2+3x-2$.

División de polinomios

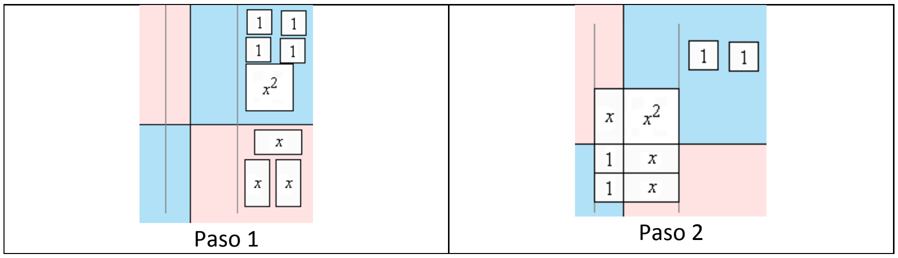
La división es sinónimo de distribuir y es lo que ocurre al calcular el cociente $p(x)\div q(x)$; en este caso se debe construir con el dividendo $p(x)$ un rectángulo de base $q(x)$ teniendo como recurso la agregación de pares de fichas que equivalen a cero. Si se efectúan divisiones del tipo $(ax^2+bx+c)\div(dx+e)$, el cociente es la altura del rectángulo, mientras que el residuo, si existe, está constituido por fichas que corresponden a polinomios de grado cero, El siguiente ejemplo ayuda a comprender la división de polinomios.

Ejemplo. Calcular el cociente y el residuo al efectuar $(x^2-3x+4)\div(x-1)$.

Paso 1. Escribir el polinomio dividendo x^2-3x+4 en el plano de *La Caja de Polinomios* y establecer sobre el plano unas guías imaginarias de anchura equivalente al divisor $x-1$ como se indica en la gráfica.

Paso 2. Ubicar las fichas que representan al polinomio sobre la banda imaginaria, teniendo en cuenta que se debe utilizar el menor número posible de pares de fichas que representen cero y respetando el color del cuadrante que les corresponde, es decir, el polinomio que se debe leer en el tablero, una vez efectuado el paso 2 se obliga a ser el dividendo $p(x)$, como se muestra a continuación.

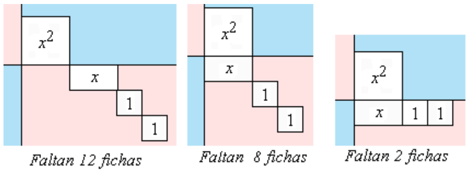
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



En este ejemplo no hubo necesidad de agregar ceros, y es claro que el cociente es $x-2$ y el residuo es 2.

Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio utilizando *La Caja de Polinomios* equivale a disponer una representación rectangular del mismo, siempre que esto sea posible. Para realizar esta tarea a veces es necesario la agregación de ceros. Para este efecto, se requiere disponer el menor número de fichas que representan al polinomio en cuestión, en un *encuadre minimal viable*. Un encuadre minimal, es aquella disposición de un polinomio $p(x)$ de forma que su transformación a rectángulo requiere del menor número de fichas (Ceros). En la siguiente gráfica se representan tres encuadres del polinomio $p(x)=x^2-x-2$; de los cuales el tercero corresponde a un encuadre minimal.



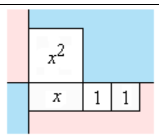
Un encuadre minimal viable es aquel encuadre minimal que requiere de un número par de fichas que equivalen algebraicamente a cero y que completan el rectángulo que representa al polinomio $p(x)$.

Ejemplo. En la siguiente gráfica se representan dos encuadres minimales de $p(x)=x^2-x-2$, el segundo de los cuales es viable, pues requiere de dos fichas x para

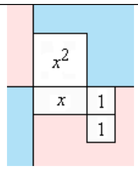
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

completar el rectángulo, pero algebraicamente, la agregación de estas fichas equivale a sumar cero.

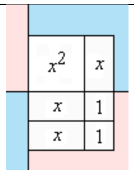
Al completar el rectángulo que representa al polinomio $p(x)$ a partir de un encuadre minimal viable, se ha factorizado; su factorización es el producto de las dimensiones de dos lados consecutivos del rectángulo; por ejemplo, a partir de la disposición minimal viable que representa a $p(x)=x^2-x-2$ se consigue la siguiente figura y puesto que las dimensiones de dos lados consecutivos de este rectángulo $x+1$ y $x-2$ se tiene que



Encuandre Minimal



Encuadre minimal viable



Factorización

$p(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$.

El significado didáctico de la caja de polinomios

El conocimiento matemático escolar, desde los niveles iniciales, se ha rodeado de conceptos desafortunados a su propia naturaleza, como un conocimiento excluyente e intimidatorio que solo está al alcance de unos pocos privilegiados y en cambio para muchos significa fracaso, frustración y ansiedad. Frente a este estado de cosas, los recursos para el trabajo en el aula de clase de matemáticas juegan un papel esencial para despertar sentimientos y actitudes positivas hacia las matemáticas, para desmitificarlas, y propiciar la participación y la integración y vencer los obstáculos emocionales responsables del aburrimiento, permitiendo ver que las matemáticas son una materia viva, llena de interés y útil dentro y fuera del aula.

La visualización o experimentación de imágenes visuales en secuencia llevan al estudiante a una comprensión profunda de los procesos matemáticos involucrados en una operación. Aquí resulta conveniente precisar que las operaciones constituyen un aspecto fundamental en la construcción y desarrollo de los conceptos matemáticos, y en esta toma de conciencia de la posibilidad de realizar operaciones, el sujeto desempeña un papel activo como es el caso de

ISBN 978-84-945722-3-4

La Caja de Polinomios en el que se hace un trabajo que va desde lo tangible, es decir, desde la manipulación, hasta el desarrollo operatorio simbólico que es el que finalmente interesa.

Referencias bibliográficas

Acevedo, D. & Folk de L., M. (1997). *Redescubriendo el Algebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Boyer, C. (2004). *Historia de la Matemáticas*. Madrid, Alianza Editorial.

Guzmán, Miguel de. (1984). *Juegos Matemáticos en la Enseñanza*. En: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/old/06juegomat/juegosmatensenanza/juemat.htm/ Consultado 21/07/2016.

Eves, H. (1965). *Estudio de las Geometrías,* tomo I. México. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.

Soto, F., Mosquera, S. & Gómez, C. (2005). *La Caja de Polinomios*. Matemáticas, Enseñanza Universitaria, 15, 83-97. Escuela Regional de Matemáticas. Universidad del Valle. Colombia.

ISBN 978-84-945722-3-4