Taller: Volumen sin fórmulas

Pablo Flores Martínez; Rafael Ramírez Uclés

email: pflores@ugr.es; rramirez@ugr.es

Departamento Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada

RESUMEN

La magnitud volumen no es fácil de enseñar y de aprender, no hay instrumentos específicos para medir volúmenes, y se identifica excesivamente con capacidad o con longitud. Generalmente la enseñanza enfatiza el cálculo de volúmenes utilizando fórmulas. Empleando tetraedros y pirámides cuadradas del mismo lado, y buscando relacionar estas formas con otros poliedros de los cuales es fácil obtener el volumen, este taller pretende ayudar a los asistentes a comparar volúmenes de pirámides a través de métodos directos, que lleven a obtener su medida sin emplear fórmulas. El proceso realizado pretende generalizar las apreciaciones y aplicarlas para construir un tetrabrick tetraédrico de medio litro.

Términos clave: volumen, medida, comparación, fórmulas, significado.

Taller: Volúmenes sin fórmulas

La magnitud volumen no es fácil de enseñar y aprender [1] . Sin embargo es necesario que los alumnos comprendan el volumen [2], pues de ello va a depender, tanto cómo llegarán a entender las formalizaciones que se hacen posteriormente en el bachillerato y la universidad, como la forma en que se interprete el volumen de agua empleada en casa, el de aire existente en una habitación, o el volumen que ocupan los muebles cuando queramos hacer un traslado.

De acuerdo con la didáctica de la magnitud, expresada a partir de la idea de sentido de medida [2], el aprendizaje del volumen debería cubrir tanto su apreciación como cualidad de objetos, como el desarrollo de ciertos hábitos de medida, lo que lleva a comprender que carecemos de instrumentos de medida del volumen. Sólo cuando estas ideas están aposentadas, se puede trabajar la estimación de volúmenes, completando el sentido de medida del volumen, con el cual se puedan afrontar los problemas prácticos relacionados con esta magnitud.

1. La comparación de cantidades de volumen

Si bien el volumen es una cualidad de objetos tanto sólidos, como líquidos y gaseosos, la comparación directa entre volúmenes no es sencilla, salvo en casos muy concretos, como los que se muestran en la figura 1.

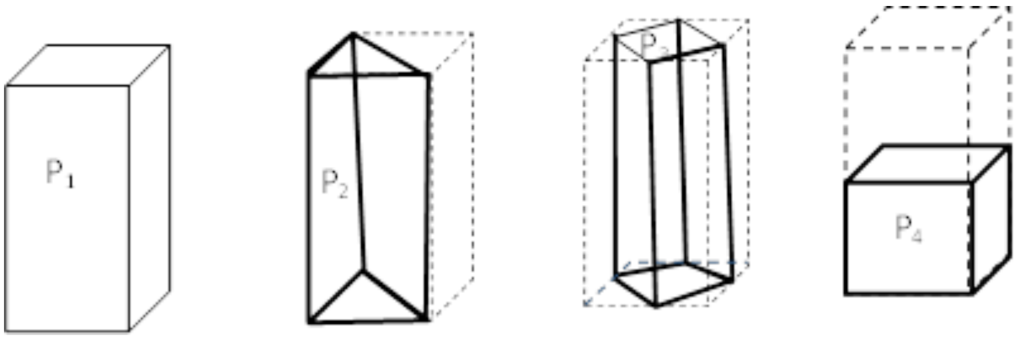

Figura 1: Comparación entre volúmenes de prismas

En esta figura se puede apreciar que el volumen de P1 es doble del P2, ya que se pueden formar dos P2 con el P1; que el volumen de P3 es doble de P1, ya que con las piezas restantes del P3 se puede formar otro de igual volumen, para rellenar el P1; que el prisma P4 tiene volumen mitad que P1, ya que se requieren dos P4 para formar un P1. De ello se pueden extraer apreciaciones sobre la proporcionalidad existente entre el volumen de un prisma, la superficie de la base y la longitud de la altura (a doble altura y misma base, el prisma tiene volumen doble; a doble base y misma altura, el prisma tiene volumen doble) [3].

Esta relación es posible generalizarla a prismas oblicuos, mediante descomposiciones y composiciones adecuadas. Si aplicamos la misma idea a pirámides, podemos encontrarnos con dificultades, tal como se muestra en la figura 2.

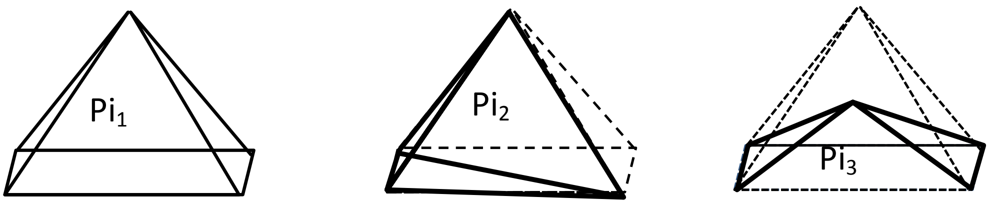

Figura 2: Comparación de volúmenes de pirámides

Apreciamos que el volumen de la Pi2 es mitad del de Pi1, pues se pueden formar dos Pi2 con una Pi1. Sin embargo, no es fácil formar dos Pi3 con Pi1. Si decimos que Pi3 tiene de volumen la tercera parte del volumen de Pi1, es aplicando una propiedad, no fácil de demostrar que indica que “dos pirámides rectas de igual base tienen sus volúmenes proporcionales a su alturas”.

2. Procedimientos para determinar el volumen de un cuerpo

Un procedimiento con el que salvamos la dificultad de comparación directa es a través del Principio de Arquímedes, que permite transformar el volumen de una pieza por medio del volumen de líquido desalojado (o desplazado), medible en un matraz aforado. Es una práctica poco corriente en clase, pero siempre podremos recurrir a ella, o al menos referir a ella los razonamientos.

Aparte de la comparación por el principio de Arquímedes, el Principio de Cavalieri nos da una forma para comparar figuras que determinen superficies de igual medida, al cortarlas por planos paralelos. El Principio de Cavalieri permite obtener volúmenes a partir de las proporcionalidades con medidas de longitud y superficie, dando lugar a las fórmulas conocidas ([3] y [4]).

Prescindiendo de estas dos técnicas para comparar volúmenes, en este taller nos basamos en la comparación directa, la descomposición y composición, en los casos en que es posible [3]. De esta forma llegamos a apreciar que las fórmulas pueden obtenerse a partir de otros procedimientos, apreciando la dificultad de medir el volumen. De esta forma esperamos comprender mejor la magnitud, lo que nos permite comprender algunos de los errores de aprendizaje de esta magnitud que suelen aparecer en los alumnos [2]

Estructura del taller

El principio de actuación en este taller es proceder por comparación, composición y descomposición, empleando las fórmulas sólo en los casos en que previamente se hayan justificado convenientemente [4]. Se fundamenta en otros trabajos realizados en cursos de matemáticas para alumnos con talento matemático [6], así como talleres planteados en otros ámbitos [6].

El esquema de funcionamiento del taller se recoge en las siguientes actividades:

Actividad 1: Comparar el volumen de una pirámide cuadrada de aristas iguales, y un tetraedro regular de la misma arista, mediante comparación directa, estimando la medida relativa.

Actividad 2: Emplear poliedros en los que sea fácil obtener el volumen, y que permitan relacionar directamente la pirámide cuadrada y el tetraedro, especialmente a partir de un cubo.

Actividad 3: Llevar a cabo procesos de comparación de las figuras que resultan de descomponer el cubo para que aparezcan las dos pirámides (la cuadrada y el tetraedro)

Actividad 4: Aplicar las comparaciones obtenidas para obtener la medida del volumen del tetraedro a partir de la longitud del lado del cubo en el que está inscrito, y construir un tetrabrik tetraédrico, de medio litro de capacidad (o de 500 cm^3 de volumen).

Actividad 5: Generalizar las apreciaciones anteriores, para mostrar que una pirámide cualquiera tiene como volumen la tercera parte del prisma (recto u oblicuo), en el que está inscrito.

Referencias bibliográficas.

[1] Vergnaud, G. (1983): “Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12-13 ans)”. In Vergnaud G. (Ed.), *Didactique et acquisition du concept de volume*. Numéro spécial de *Recherches en didactique des mathématiques*, 4 (1), 71-120.

[2] Moreno, F., Gil, F. y Montoro, A.B. (2015): "Sentido de la medida". En Flores, p. y Rico, L. (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, Pirámide, pp. 147-168, Madrid, (España).

[3] Puig Adam, P. (1986): “Geometría métrica”. Tomo 1. Euler editorial, Madrid.

[4] Janvier, C. (1997): “Grandeur et mesure: La place des formules et l’exemple de volumen. PLOT nº 83, 25-38.

[5] González, M.J. y Flores, P. (1999): “Conocimiento profesional del profesor de secundaria sobre las matemáticas: el caso del volumen”. Educación Matemática Vol.13 fasc.1. 94 - 106. México.

[6] Guerrero, S. (2014): “Obtención del volumen del tetraedro por alumnos con talento matemático, sin emplear fórmulas”. Trabajo Fin de Master de Didáctica de la Matemática, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.

[7] Flores, P. (2014): “Fórmulas, Volumen de la pirámide”.. Taller en IV Congreso provincial de matemáticas, de Nicoya. Nicoya, Costa Rica.

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto EDU2012-37259 «Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas» subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.