Vivencia matemática: creatividad, competencia y comprensión

Miquel Albertí Palmer

email: miquel.alberti@uab.cat

INS Vallès (Sabadell); UAB

RESUMEN

El carácter competencial del aprendizaje matemático se asocia al llamado mundo real y a las situaciones que en el se producen, pero no debe reducirse a él. Este trabajo pretende mostrar cómo pasar del nivel competencial más elemental del aprendizaje como es el vinculado a situaciones reales del entorno a niveles superiores en los que la actividad matemática se ha liberado del mundo real que la inspiró. Para ello son fundamentales la creatividad y la competencia matemáticas porque el objetivo último es la comprensión. El tránsito pondrá de manifiesto cómo el enfoque matemático cambia el mundo real de la persona convirtiendo su experiencia en vivencia matemática.

Palabras clave: competencia matemática, *constructivismo, aprendizaje situado, vivencia matemática.*

Competencia y vivencia matemáticas

Todos hemos aprendido a caminar y a hablar fuera y mucho antes de los ámbitos académicos institucionalizados, pero que caminemos y hablemos no significa que comprendamos el movimiento o el habla.

Jean Piaget y Lev Vygotsky han sido las personalidades más influyentes en la concepción constructivista del aprendizaje. El sistema de Piaget [9] se basa en estructuras cognitivas correspondientes a cuatro estadios de desarrollo, desde el más elemental (la etapa sensomotriz) hasta el más abstracto (el de las operaciones formales). Los procesos de asimilación y acomodación fundamentan el aprendizaje. La asimilación supone interpretar los acontecimientos mediante estructuras cognitivas ya existentes; la acomodación significa cambiar una estructura para dar sentido al entorno. El desarrollo cognitivo consiste en una constante adaptación al entorno, en una sucesión de asimilaciones y acomodaciones que, pese a corresponderse con determinados intervalos de edad del niño, pueden variar entre individuos. La piagetiana es pues una perspectiva constructivista del aprendizaje que puede facilitarse proporcionando actividades y situaciones que pongan a los aprendices ante retos que requieran asimilación y acomodación. Cada una de estas actividades deberá tener en cuenta el estadio de desarrollo cognitivo del niño con relación a su madurez.

Sin embargo, Piaget no otorga un papel relevante a qué o a quienes forman parte del entorno del niño y se ocupa más del individuo. En cambio, para Vygotsky [12], la interacción social juega un papel fundamental en el desarrollo cognitivo. El grado de habilidad que el niño puede desarrollar con la ayuda o guía amplía el alcance de lo que puede conseguir por sí solo dando lugar a la llamada *Zona de Desarrollo Próximo* (ZDP) según la cual un completo desarrollo cognitivo no puede lograrse sin interacción social.

Según Vygotsky, los conceptos científicos se construyen de arriba abajo. Al principio son abstractos, pero mediante la aplicación a fenómenos concretos adquieren significación. En este sentido, su desarrollo es descendente. Los conceptos espontáneos, en cambio, se crean de abajo hacia arriba, están ligados a las situaciones y son ricos en significado, pero demasiado locales y desligados unos de otros. En Vygotsky coexisten una idea formal de la enseñanza y el aprendizaje (mediante definiciones y teoremas que luego se aplicarán a situaciones contextualizadas) y una concepción espontánea (planteados por la vida y los entornos físico y sociocultural de la persona). Si Piaget estudió al niño como si estuviese en un laboratorio; Vygotsky lo vinculó al contexto socio cultura.

Jean Lave relaciona el aprendizaje directamente con la práctica: en situaciones reales y cotidianas, el pensamiento está al servicio de la acción y la gente se las ingenia para encontrar soluciones oportunas y satisfactorias [8]. El pensamiento cotidiano no es ilógico o poco riguroso, sino que es sensible y efectivo en el contexto práctico en el que se produce. El aprendizaje es “situado” y no debería presentarse de manera abstracta desligándolo de sus componentes decisivos como solía hacerse hasta hace poco en las aulas.

Otro aspecto primordial de la cognición en la práctica de Lave es el papel que juegan los artefactos o herramientas en el aprendizaje. El ordenador está a medio camino entre la práctica real y el mundo ideal platónico. Las construcciones reales y directas no las hace el ordenador, sino la mano que maneja una herramienta. El ordenador permite realizaciones imposibles para la mano y su función es a menudo más creativa de lo que parece al convertirse en trampolín de nuevas ideas y preguntas. Su uso amplia la ZDP del usuario y éste, aprende.

En este trabajo veremos como el aprendizaje espontáneo (utilizando el término de Vygotsky) a partir de situaciones reales y tangibles creamos conceptos abstractos y científicos y como el manejo de software facilita otras conexiones. De todo ello se obtendrán actividades cuyo diseño y planteamiento no obedecerán únicamente a la belleza, curiosidad o capricho, sino porque de su realización se derivará un aprendizaje. Y si esto es así es porque quien las ha diseñado las ha vivido en primera persona. El profesor de matemáticas no debe acudir solo a las típicas fuentes de bancos de actividades y libros de texto y seleccionar las que considere más adecuadas para sus objetivos, sino que debe atreverse a crearlas y vivirlas por sí mismo.

El diseño, por parte de un profesor de matemáticas, de cualquier actividad cuyo objetivo sea la competencia matemática de las personas debe pasar por su vivencia previa. Merece la pena observar aquí que la expresión “vivencia matemática” [1] no es sinónima de “experiencia matemática”, una idea expuesta por Davis y Hersh [4]. La vivencia, término creado por el filósofo Ortega y Gasset, trasciende la experiencia porque cambia a la persona. Es una idea que debemos vincular a la de competencia, pues ser competente supone un cambio substancial en la persona, aunque no hasta el punto de modificar al personalidad. Quizá no la personalidad psicológica, pero sí aquellos aspectos de la personalidad que tienen que ver con el modo en que afrontamos las situaciones y problemas, sean éstos académicos o no.

En una vivencia matemática no solo se experimentan o ponen en práctica las matemáticas, sino que aprendemos matemáticas. Hasta qué punto impacta esto en nuestra vida depende de cada uno de nosotros. Pero ese cambio o su ausencia es lo que marca la diferencia entre quienes se sienten competentes o no en el ámbito matemático, o competentes hasta cierto punto o nivel.

Con la educación por competencias se ha extendido al idea de que ser competente significa serlo en al vida real y cotidiana. Sin embargo, ser competente no significa únicamente serlo en situaciones de contexto. La educación matemática debería ir cambiando el mundo que una persona considera como real a medida que crece. Lo que a los 12 años no forma parte de la cotidianidad de una persona, sí debe hacerlo a los 16 o a los 18. El punto de partida es el entorno más próximo (relacionado con la ZPD de Vygotsky). A los 12 años, uno debe ser matemáticamente competente para ir a comprar, siendo la del comercio cotidiano una situación a la que debe enfrentarse a diario. Pero a los 16 o 18 años, las funciones cuadráticas y exponenciales deben formar parte ya de la vida de una persona competente matemáticamente.

Los diferentes tipos de competencia se han representado de muchas formas. La mostrada en la imagen 1 se incluye en un folleto que resume el nuevo cambio curricular en Cataluña:

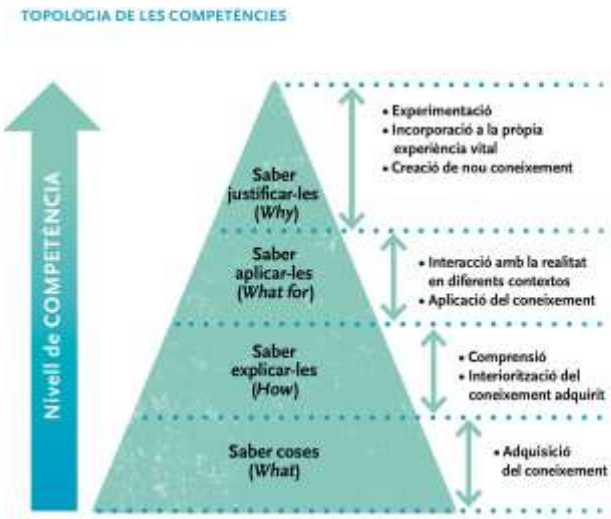

Imagen 1. Niveles de competencia según [1].

Para interpretar y explicar esos cuatro niveles podría tomarse como referente el teorema de Pitágoras. El nivel 1 (saber cosas) correspondería a aquella persona que conoce el teorema. El nivel 2 (saber explicarlas), sería el de una persona que, además de conocer el teorema, fuese capaz de comunicarlo, de transmitirlo. En el nivel 3, el teorema sabría aplicarse en diferentes contextos, abstractos o realistas y cotidianos. En el nivel 4, la persona sería capaz de demostrar y comprender el teorema.

Observemos que el cuarto nivel incluye el aspecto creativo. Sin embargo, éste debería estar por encima y constituir el nivel 5, ya que una persona puede ser perfectamente capaz de justificar el por qué y ser incapaz de crear nuevo conocimiento. A este nivel creativo se superpondría el último y definitivo nivel 6 correspondiente al de vivencia matemática. Es entonces cuando la persona se convierte en verdaderamente matemática, pues experimenta una transformación con cierto arraigo psicológico por el que su mirada e interpretación del mundo, tanto el real y tangible como abstracto, incorporarán el carácter matemático. A ese nivel se hallan la mayoría de los profesionales de las matemáticas y de la educación matemática.

A continuación todo esto se pondrá en juego mediante el planteamiento de una sencilla pregunta acerca de una situación real, tangible y cotidiana que dará lugar a un aprendizaje matemático mucho más profundo de lo previsto y cuyos aspectos competenciales tocan a la educación matemática de todos los niveles, desde primaria hasta la universitaria. Lo que haremos es convertir una experiencia cotidiana en una auténtica “vivencia matemática”.

Ahorro pitagórico en el cableado urbano

Veamos a continuación un ejemplo sobre el teorema de Pitágoras que tiene implicaciones prácticas y académicas.

Desde la perspectiva precedente a la educación por competencias se trataría de que el alumno conociese el teorema y lo aplicase para resolver problemas en los que resultase útil, como para calcular la longitud de la diagonal de un rectángulo o el perímetro de un triángulo isósceles de base y altura determinadas. En un nivel superior, se vería que gracias a los teoremas de Tales y de Pitágoras se obtienen las definiciones y relaciones entre las seis razones trigonométricas de un ángulo: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Todos esos problemas ocurren en contextos puramente matemáticos que, evidentemente, hay que conocer. Pero lo que demanda la educación por competencias es más que eso, ya que pretende que las personas sean capaces de relacionar, recuperar y aplicar esos conocimientos en situaciones y problemas distintos de aquellos en los que los aprendieron. De lo contrario, ¿de qué les va a servir?

Por eso, lo que hace verdaderamente competente a un alumno que conoce el teorema de Pitágoras es qué piensa o qué puede pensar al pasearse por la calle y toparse al doblar una esquina con la situación siguiente (imagen 2):

Imagen 2. Cableado en una calle de La Fresneda, Teruel (Foto: MAP)

La figura 1 muestra un tramo de calle de 18 m con una serie de cables entorchados que recorren la fachada en zigzag. La pregunta salta a la vista: ¿no habríamos ahorrado mucho dinero si el cableado hubiese seguido la línea recta de la pendiente de la calle? Sin duda, la respuesta es afirmativa. Pero la perspectiva matemática se topa aquí con el mundo real en el que las normas que lo rigen no son solamente las de la lógica ni las de la geometría, pues hay que considerar otros aspectos entre los que se incluyen las normas de seguridad, los riesgos de incidentes de las vías públicas y el hecho de tener que evitar puertas y ventanas de ángulos rectos. Pese a ello, en el tramo de calle mostrado en la imagen 2 no hay ningún obstáculo a salvar en la fachada. Nada impide seguir la línea recta. Todo ello plantea limitaciones en las resoluciones de los problemas que no se dan en el ámbito académico y que la mayor parte del profesorado desconoce.

Se pone de manifiesto así, una vez más, que la solución teórica de un problema práctico no suele ser la mejor solución práctica del problema. Pese a todo, vamos a utilizar el conocimiento matemático para realizar una estimación del ahorro que supondría llevar el cableado por senderos rectilíneos. O, dicho de otro modo, una estimación del coste que supone adoptar ciertas medidas estéticas y de seguridad.

Desde una perspectiva práctica, la tarea sería fútil, pues las normas imperantes deben acatarse y no habría mucho más de qué hablar. Al fin y al cabo, ¿para qué vamos a calcular el coste del ahorro si no podemos ahorrárnoslo? Sin embargo, veremos que gracias al planteamiento y resolución de este problema práctico un tanto inútil desarrollaremos nuevo conocimiento matemático. Será un conocimiento matemático inspirado por una situación real y práctica.

Tomando una fotografía desde otro ángulo de la calle, podemos responder la pregunta del ahorro sin utilizar siquiera el teorema de Pitágoras, valiéndonos del programa *GeoGebra* (imagen 3).

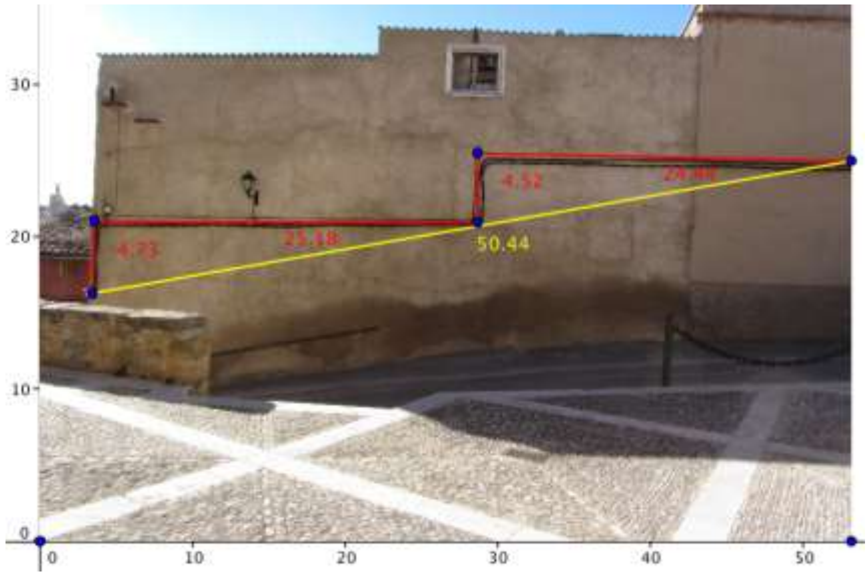

Imagen 3. Ahorro pitagórico con ayuda de *GeoGebra*

Teniendo en cuenta que cada unidad en la imagen representa unos 25 cm en la realidad, la longitud de la diagonal rectilínea es, aproximadamente, de unos:

$$50{,}44 \cdot 0{,}25 \text{ m} = 12{,}61 \text{ m}$$

La longitud del cableado alcanza unos:

$$(4{,}73 + 25{,}18 + 4{,}52 + 24{,}44) \cdot 0{,}25 \text{ m} = 14{,}72 \text{ m}$$

Puesto que la madeja del cableado consta de 8 cables, los metros de cable extra utilizados para la línea en zigzag son:

$$8 \cdot (14{,}72 - 12{,}61) = 16{,}88 \text{ m}$$

Si añadimos a esto que cada metro de cable cuesta algo más de un euro, el ahorro que habría supuesto seguir la línea recta de la pendiente del suelo rondaría los 17 €, solo en este tramo de unos 13,4 m de calle. Más de un euro y cuarto el metro de calle. El ahorro total en el cableado de una localidad, aunque sea pequeña, puede llegar a ser realmente considerable y ascender a centenares o miles de euros. Pese a las normas estéticas y de seguridad, no hay duda de que la resolución matemática del problema aportaría un considerable ahorro económico.

¿Significa esto que no hacía falta el teorema de Pitágoras? ¿Significa esto que ser competente matemáticamente se reduce a hacer la foto, formularse la pregunta del ahorro posible y responderla mediante la ayuda del programa GeoGebra como se ha hecho aquí? De ningún modo. El teorema de Pitágoras nos ayudará a comprender mejor la situación a la que nos estamos enfrentando. Dicho de otro modo: deberemos asumir la responsabilidad que supone su aplicación a una situación como esta.

Pero antes, comencemos por el aspecto competencial primordial relacionado con esta situación y que consiste en observar y justificar el hecho de que la suma de diagonales no tiene por qué ser igual a la diagonal de la suma. Las diagonales de los diferentes zigzagueos rectangulares que llevan de un punto P a otro punto Q siguiendo los lados de una serie de rectángulos no tienen todas la misma longitud. Todos los zigzagueos, sí que poseen la misma longitud, pues todos recorren la misma distancia en vertical que en horizontal. La única diferencia entre ellos es que combinan los tramos horizontales y verticales en distinto orden. Pero sus diagonales son más cortas, siendo la más corta de todas la diagonal del rectángulo total resultante (imagen 4) i que proporciona la distancia entre los dos puntos P y Q.

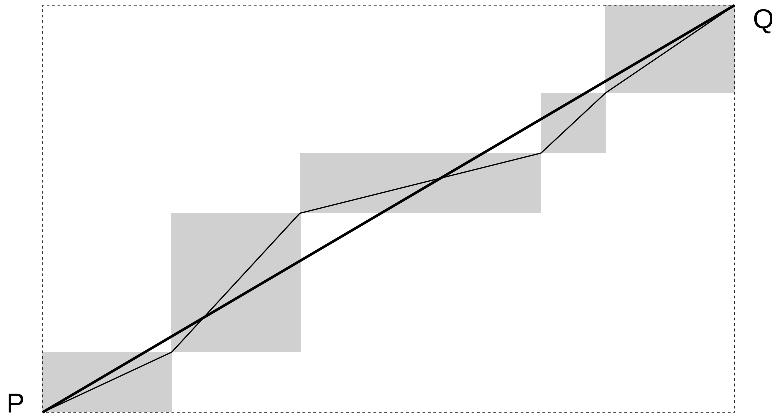

Imagen 4. Cualquier zigzagueo rectangular entre dos puntos P y Q es más largo que el trayecto por las diagonales y éste, a su vez, mayor que la diagonal PQ

La observación anterior profundiza en la cuestión fundamental del fenómeno. De ahí se desprende la posibilidad de ahorro en la longitud del cableado. Un problema adicional sería plantearse cuántos zigzagueos rectangulares distintos llevan desde P hasta Q en la imagen 3, pero esto es algo que en el fenómeno que estamos estudiando tal vez no venga a cuento.

En un contexto matemático y puramente geométrico, el problema se convierte en determinar cuánto nos ahorramos yendo por la diagonal de un vértice a su opuesto en lugar de recorrer los dos lados a y b:

$$Ahorro = (a+b) - \sqrt{a^2+b^2}$$

Una consecuencia matemática relevante de este enfoque es la siguiente desigualdad, cuya importancia trasciende el contexto y situación que la inspiró:

$$\forall a,b \geq 0:\ a+b \geq \sqrt{a^2+b^2}$$

Para hacernos una idea más clara, podemos tomar b=1, como si trabajásemos con la proporción entre los lados en lugar de con sus longitudes. Tal y como muestra al imagen 5, ahora los lados del rectángulo serían 1 y *x* en lugar de *a* y *b*.

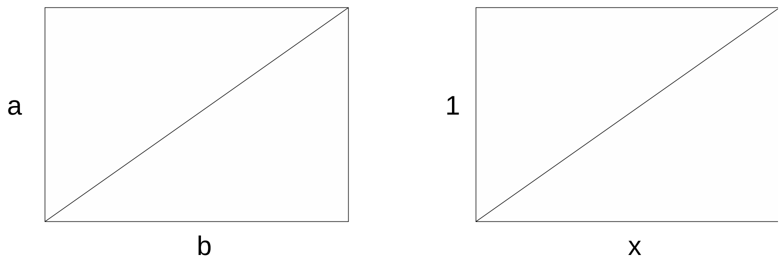

Imagen 5. Del rectángulo de lados *a* y *b* al rectángulo de lados 1 y *x* sin pérdida de generalidad

Con ello que esa función de ahorro pasa a depender de una única variable a la que llamaremos x para relacionarla con la forma corriente de expresar una función de una única variable:

$$Ab(x) = (1+x) - \sqrt{1+x^2}$$

Esta función resulta útil para una cuestión muy relevante, ya que pone de manifiesto que la raíz cuadrada de una suma no es la suma de las raíces cuadradas. De lo contrario, Ah(x)=0 para cualquier valor de x. Un error de cálculo que muchos de nuestros alumnos, incluso los más competentes cometen con demasiada frecuencia.

Para x=0, no habría ahorro posible, ya que la calle sería horizontal: A(0)=1–1=0. Para x=1, el rectángulo sería un cuadrado. Yendo por su diagonal nos ahorraríamos más de la mitad de un lado:

$$Ah(1)=\left(1+1\right)-\sqrt{1+1^2}=2-\sqrt{2}=0{,}5857864\ldots$$

Cuanto mayor sea x, ¿más ahorraremos? Llevando las cosas a su extremo, esto es, haciendo que x tienda a infinito:

$$\underset{x\to+\infty}{Lim}\ \left(1+x\right)-\sqrt{1+x^2}=\infty-\infty=\text{Indeterminación}$$

Esta indeterminación se resuelve fácilmente multiplicando y dividiendo la expresión por su conjugada:

$$\underset{x\to+\infty}{Lim}\ \left(1+x\right)-\sqrt{1+x^2}=\underset{x\to+\infty}{Lim}\ \frac{\left(\left(1+x\right)-\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\left(\left(1+x\right)+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\underset{x\to+\infty}{Lim}\ \frac{2x}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=\underset{x\to+\infty}{Lim}\ \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}}=\frac{2}{1+1}=1$$

¿Qué significa ese 1? Quiere decir que el ahorro de recorrido si el rectángulo tuviese una altura infinita sería igual a la longitud de su base. La diagonal sería vertical y el vértice opuesto estaría en la vertical del vértice original, por lo que recorrer ese rectángulo hipotético de altura infinita por sus lados sería recorrer la base hacia la derecha y ascender por la diagonal que sería la misma que el lado izquierdo. Una situación absurda, pero que explica el significado del valor –1 del límite y que nos haría ver el rectángulo de altura infinita en la que se confunden sus dos vértices superiores (imagen 6), un triángulo isósceles de la geometría proyectiva cuyo vértice superior es el punto del infinito.

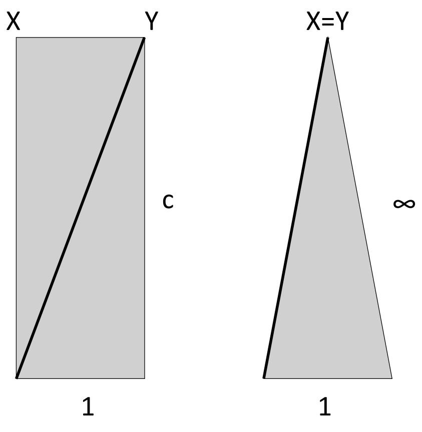

Imagen 6. La hipotenusa infinita

Por último, ¿podemos afirmar que cuanto mayor sea la altura x del rectángulo, más ahorraremos? En caso afirmativo, ¿será ilimitado el ahorro? Podemos usar aquí el signo de la derivada para saber si la función es creciente o no:

$$Ah'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Pero esta derivada es siempre positiva, ya que el denominador de la fracción es mayor que el numerador y, por consiguiente, el cociente es inferior a 1. Luego, el ahorro es creciente. Sin embargo, no es ilimitado, pues sabemos que está acotado superiormente por 1.

La función *Ah(x)* posee dos asíntotas (imagen 7): una horizontal (y=–1), determinada por el límite en +∞; y otra oblicua (y=–2x–1), determinada por el límite en –∞.

$$m_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{Ah(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{x}{x} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 0+1-1=0$$

$$m_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{Ah(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + \frac{x}{x} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 0+1-1=0$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to-\infty} Ah(x) - m\cdot x = \lim_{x\to-\infty} \left(1+x\right) - \sqrt{1+x^2} - 2x = \\ &= \lim_{x\to-\infty} 1 - \left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = 1-0=1 \end{aligned}$$

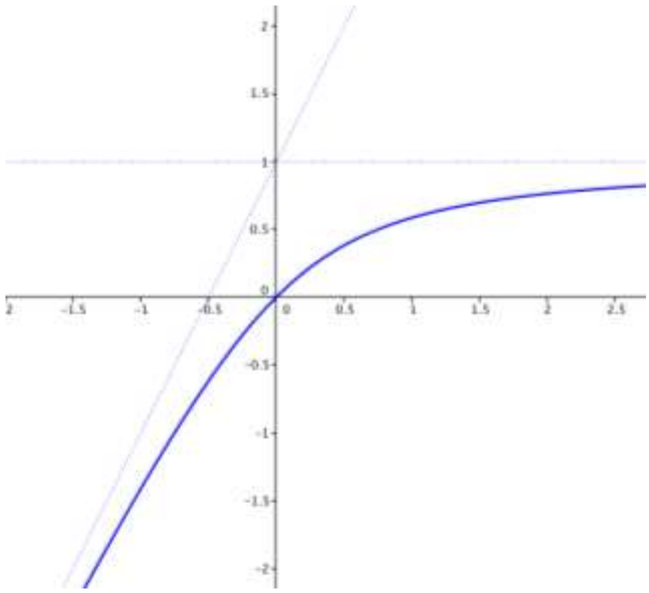

Imagen 7. La función *Ah(x)* con sus asíntotas

Un modo de ilustrar la relación entre la parte geométrica y la funcional de la función ahorro es la representada en la imagen 8.

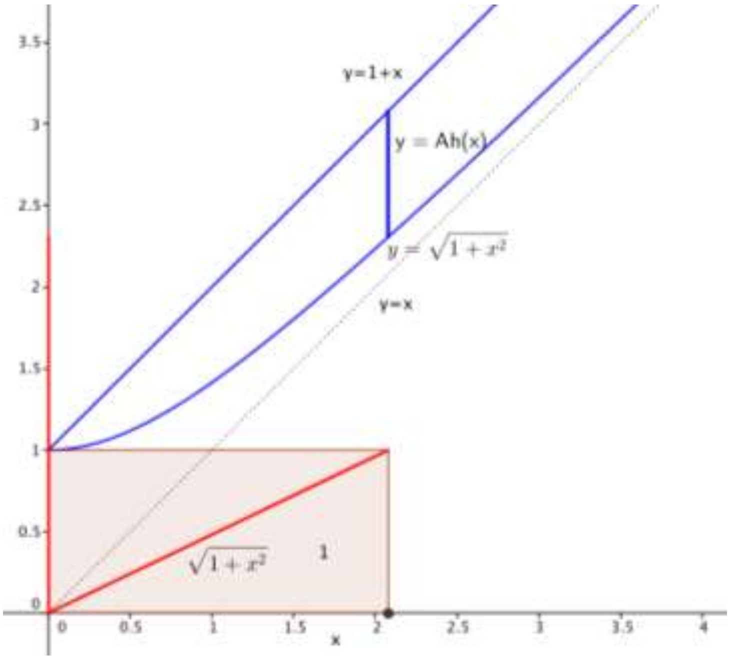

Imagen 8. Relación de la función ahorro con el rectángulo de lados 1 y x

En la imagen 8 se relaciona el rectángulo inicial del problema, de lados 1 y x, con la función ahorro Ah(x). Es una interpretación matemática mixta del fenómeno, funcional y geométrica. Pero sabemos que Ah(x) es una hipérbola como lo es el sustraendo que contiene su expresión algebraica: $(1+x^2)$^(1/2). Sin embargo, eso no proporciona la comprensión definitiva del fenómeno. Esa comprensión definitiva pasa por relacionar la hipérbola Ah(x) con la situación inicial que la inspiró, aspecto que va más allá de la relación funcional y geométrica ilustrada en la imagen 8. Mientras no sepamos cuáles son los focos de la hipérbola Ah(x) y qué relación guardan éstos con el rectángulo de longitud x y anchura 1 no acabaremos de comprender el fenómeno por completo. Si el fenómeno nos condujo hasta la hipérbola, comprenderlo significa dar sentido a ésta en el contexto del fenómeno. Para ello no nos vale saber cuáles son las coordenadas de los focos ni los valores de los parámetros de la hipérbola, sino su significado con relación al rectángulo inicial.

Este nivel de comprensión sobrepasa el del ámbito de la educación secundaria y el del bachillerato. Corresponde a un nivel competencial muy difícilmente alcanzable en etapas educativas previas a la universitario e, incluso, al ámbito profesional. Se trata de un nivel competencial propio de matemáticos que se mueven con soltura entre diferentes contextos.

El hecho de que posea estas dos asíntotas hace pensar que *Ah(x)* tal vez sea una cónica, concretamente una hipérbola. Para ver cuál es su ecuación, realizamos operaciones en su expresión algebraica:

$$y=\left(1+x\right)-\sqrt{1+x^2} \Rightarrow y^2+2x-2y-2xy=0$$

Hemos escrito *Ah(x)* como una ecuación no lineal de segundo grado. El estudio de las cónicas asegura que esta ecuación corresponde a la hipérbola de centro (0, 1), el punto donde se cortan las asíntotas, y una de cuyas ramas es la función Ah(x), tal y como muestra la imagen 9.

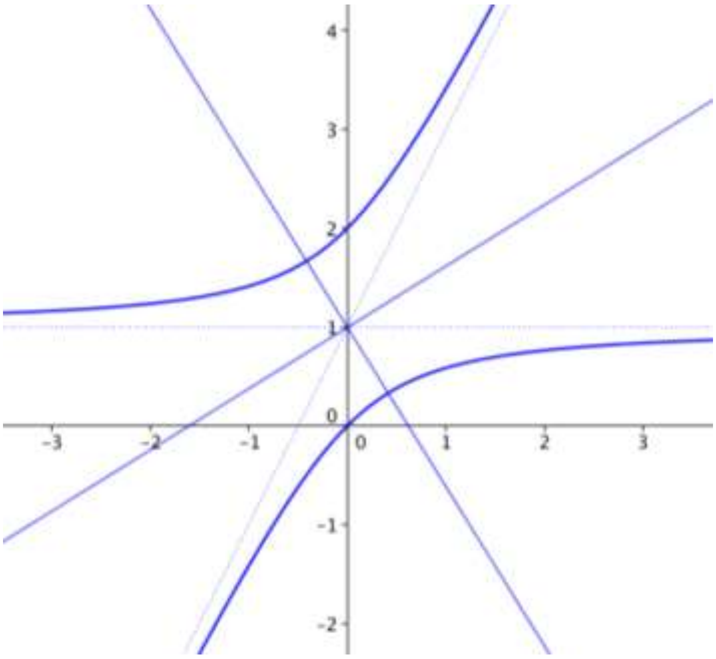

Imagen 9. La hipérbola una de cuyas ramas es la función Ah(x)

Siendo $\Phi=(1+\sqrt{5})/2$, pueden obtenerse algunos detalles de esta hipérbola. Sus ejes son las bisectrices de las asíntotas:

$$e_1 : y=\left(\Phi-1\right)\cdot x+1 \ , \ \mathrm{e}_2 : y=-\Phi\cdot x+1$$

Sus vértices se hallan en la intersección de ella misma con los ejes y que proporcionan las soluciones del sistema de ecuaciones compuesto por la hipérbola y el eje e_2:

$$V_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3\Phi+1}},1-\frac{\Phi}{\sqrt{3\Phi+1}}\right)$$
$$V_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{3\Phi+1}},1+\frac{\Phi}{\sqrt{3\Phi+1}}\right)$$

Tomando como sistema de referencia los ejes de la hipérbola *Ah(x)* en el que su centro pasa a ser el origen de coordenadas, los valores *2a* y *2b* son precisamente las longitudes de los lados del rectángulo determinado entre los vértices y las asíntotas de la hipérbola (imagen 10):

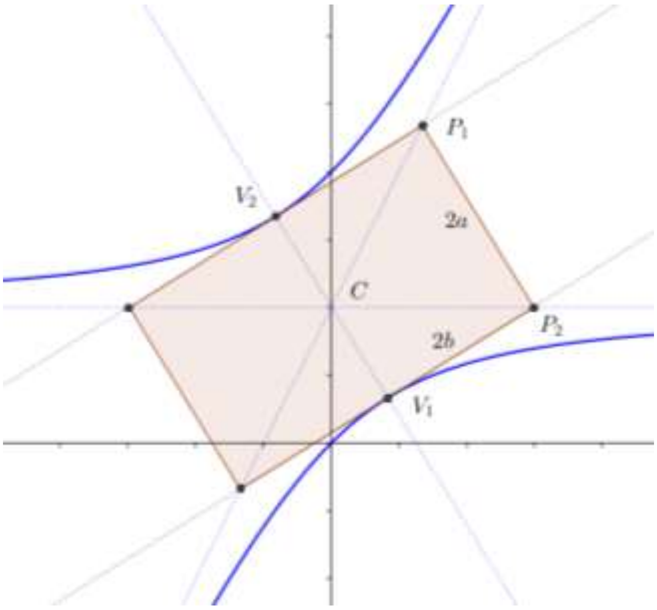

Imagen 10. El rectángulo de la hipérbola

La cuestión será ahora averiguar qué relación tiene dicho rectángulo con nuestro rectángulo inicial. Calculemos los valores de *a* y *b*:

$$a = \overline{CV_1} = \frac{1}{\sqrt{\Phi}} = \sqrt{\Phi - 1} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

$$b = \overline{V_1 P_2} = \sqrt{\Phi} \Rightarrow b^2 = \Phi$$

Se trata de valores extraordinarios vinculados a la sección áurea y que permiten expresar la hipérbola en forma cartesiana e implícita:

$$\frac{x^2}{\Phi - 1} - \frac{y^2}{\Phi} = 1 \qquad y = \sqrt{(\Phi + 1)x^2 - \Phi}$$

La distancia focal *c* de la hipérbola es:

$$c^2 = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{\Phi - 1}\right)^2 + \left(\sqrt{\Phi}\right)^2 = \Phi - 1 + \Phi = 2\Phi - 1 \Rightarrow c = \sqrt{2\Phi - 1}$$

Ya conocemos todos los parámetros, pero ¿obtenemos de ellos la comprensión anhelada? La comprensión definitiva del fenómeno sería entender qué relación guarda esta hipérbola con el fenómeno o situación inicial de la fachada. La relación entre los parámetros remite al teorema de Pitágoras, pues precisamente la distancia focal *c* es la hipotenusa del rectángulo de lados *a* y *b* encerrado entre las ramas, las asíntotas y los ejes de la hipérbola (imagen 11).

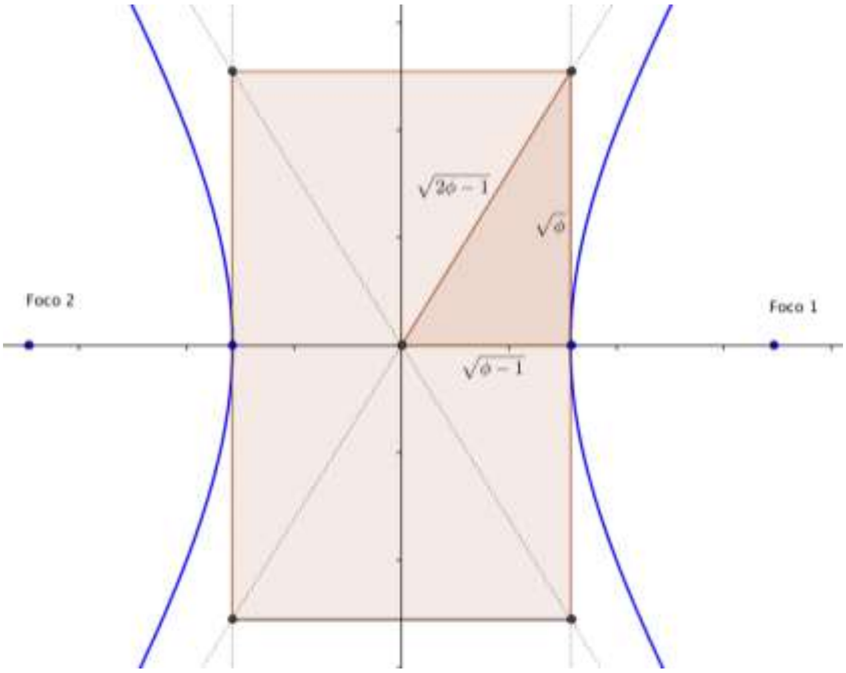

Imagen 11.

La definición clásica de hipérbola caracteriza esa curva como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a otros dos llamados focos se mantiene constante (de color rojo en la imagen 12).

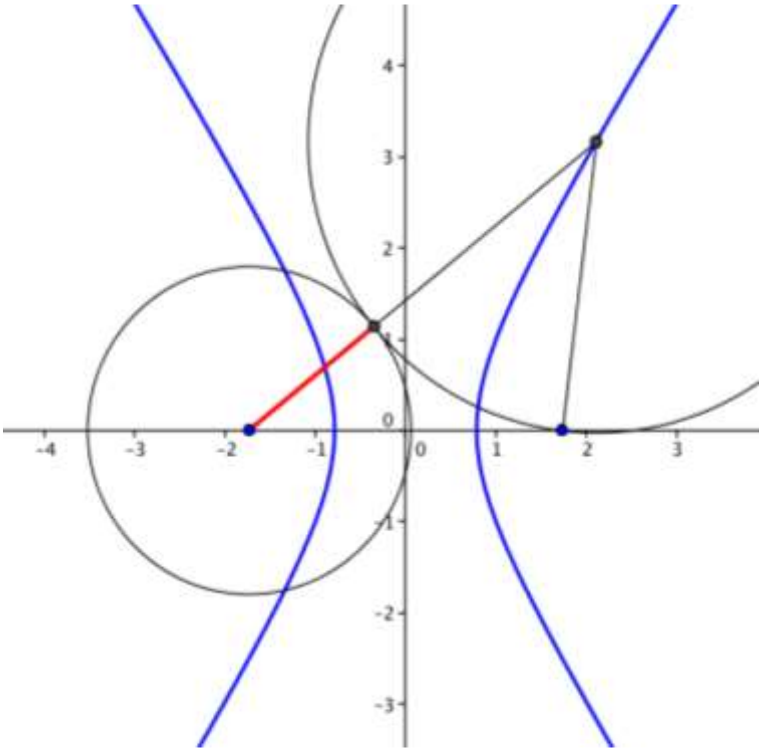

Imagen 12.

Y esa diferencia que se mantiene constante es precisamente:

$$2a = 2\cdot\left(\sqrt{\Phi - 1}\right)$$

¿Qué pinta Φ en todo esto?

Tras el proceso desarrollado cabe preguntarse hasta qué punto vemos clara la relación entre la hipérbola y el inocente ángulo recto trazado por unos cables en una fachada. Y por encima de todo eso, una pregunta todavía más profunda: ¿qué pinta la sección áurea? Por lo visto, sí que pinta y mucho, pues los parámetros de la hipérbola dependen de ella. Pero la cuestión es comprender su significado.

No acabamos de comprender sin relacionar todos esos elementos. Nuestra competencia matemática se ve obstaculizada. Somos capaces de calcular, de manejar herramientas sofisticadas para obtener resultados, de recurrir a libros especializados donde hallamos relaciones entre los elementos característicos de una curva como la hipérbola. Todo lo obtenido cuadra y encaja sin que terminemos de entender el motivo.

¿Debemos conformarnos con aceptar esos resultados como conclusiones ciertas fruto del cálculo numérico y algebraico? Hemos resuelto el problema práctico y sabemos cuánto podría ahorrarse en el cableado urbano. Sin embargo, no nos explicamos la relación matemática intrínseca entre la función hiperbólica que gobierna ese ahorro y el rectángulo que la genera.

Volvamos al principio teniendo en mente la sección áurea. ¿Cómo se halla el número Φ? Puede obtenerse de varias formas, pero existe una cuyo planteamiento utiliza un rectángulo idéntico al usado para plantear el caso general del ahorro pitagórico y que consiste en determinar las dimensiones del rectángulo que al quitarle un cuadrado el resultado sea otro rectángulo semejante al original. El problema suele plantearse con un rectángulo de lados *a* y *b*, o *1* y *x*. Son los mismos rectángulos utilizados aquí para hallar la expresión algebraica de Ah(x) (imagen 5).

$$\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}\Phi\\1-\Phi\end{cases}$$

La solución realista y práctica es la positiva (x=Φ) y es la que da lugar al llamado rectángulo áureo (reproducido en la imagen 13) cuya diagonal es $\sqrt{(1+\Phi^2)}$.

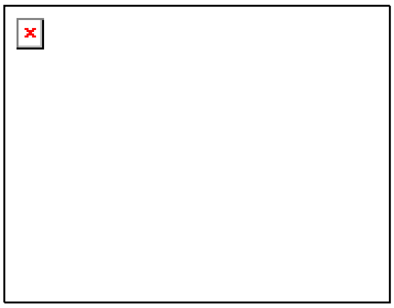

Imagen 13. El rectángulo áureo

Φ y Φ–1 son precisamente los cuadrados de los parámetros *a* y *b* de nuestra hipérbola en forma cartesiana.

En la imagen 11 tenemos el rectángulo hiperbólico. Al compararlo con el rectángulo áureo vemos que existe proporcionalidad entre sus lados:

$$\frac{\sqrt{\Phi}}{\Phi}=\frac{\sqrt{\Phi-1}}{1}\Leftrightarrow\sqrt{\Phi}=\Phi\sqrt{\Phi-1}\Leftrightarrow 1=\Phi\cdot\left(\Phi-1\right)\Leftrightarrow\Phi^2-\Phi-1=0$$

Podemos decir, por tanto, que la hipérbola Ah(x) es áurea.

Ahorro pitagórico y competencia matemática

Lo expuesto sobre el ahorro pitagórico del cableado urbano ilustra el tratamiento competencial de un problema nacido en un contexto real, que se plantea por una cuestión real como es el ahorro y que de tratarse realmente daría lugar a un intenso debate sobre las implicaciones que tiene para la economía optar por una solución estética del problema geométrico que supone trazar el cableado público por las fachadas de las viviendas.

Hemos visto que el problema puede resolverse, en un nivel superficial, sin utilizar el teorema de Pitágoras, mediante recursos TIC. Las cuestión fundamental del problema y lo que determina su planteamiento es relacionar la situación real con una situación geométrica y darse cuenta de que la diagonal de un rectángulo es más corta que sus dos lados. Solo entonces surge la idea de la posibilidad de un ahorro en la práctica de la situación. El análisis y la reflexión conducen a concluir que los zigzagueos rectangulares son más extensos que sus diagonales. De ahí que para el ahorro del recorrido no importen dichos zigzagueos, sino sus diagonales.

Ese análisis ha inspirado un tratamiento más puramente matemático y cada vez más desvinculado del contexto real y cotidiano que lo generó. Un tratamiento que plantea problemas matemáticos complejos como es la expresión de una hipérbola cuyos ejes no obedecen a los estándares académicos, ya que no se hallan sobre los ejes de coordenadas. Una situación nunca tratada en los libros de texto y apenas considerada en obras especializadas y a la que, como hemos visto, hemos llegado partiendo de una situación real y cotidiana.

He aquí el aspecto creativo de la realidad: plantea situaciones y problemas que la comodidad del mundo académico puede haber pasado por alto o haber considerado solo como un caso al margen. El camino recorrido se resume en la tabla siguiente:

Etapas	Contenido matemático	Formulación
Observación fenómeno cotidiano, real y tangible		
Relación con las matemáticas	Desigualdad triangular	La diagonal de un rectángulo es más corta que la suma de lados
Planteamiento de un problema contextualizado	Teorema de Pitágoras	¿Cuál sería el ahorro si el cableado no zigzaguease en vertical y horizontal?
Generalización de primer nivel	Modelización matemática No linealidad de la raíz cuadrada	$\sqrt{a^2+b^2}-\left(a+b\right)$
Generalización de segundo nivel	Funciones irracionales con radicales	$Ah(x)=\sqrt{1+x^2}-\left(1+x\right)$
Relación entre diferentes ámbitos matemáticos	Curvas cónicas: hipérbola	$y^2+2x+2y+2xy=0$ $\frac{x^2}{\Phi-1}-\frac{y^2}{\Phi}=1$
Regreso al fenómeno inicial	Sección áurea	La función del ahorro pitagórico es una hipérbola áurea.

La competencia matemática no se alcanza solamente resolviendo el problema práctico del ahorro. Llevar ese fenómeno al aula supone profundizar en los diferentes tipos de competencia para cada uno de los contenidos matemáticos que va apareciendo. Así, la primera relación que se establece con las matemáticas y que es la que dará lugar al problema contextualizado del ahorro es que la diagonal de un rectángulo es más corta que la suma de sus lados. Esto se puede saber (tipología competencial de nivel 1), se puede comunicar (nivel 2) e incluso aplicar (nivel 3) para resolver el problema o tomar conciencia de que existe la posibilidad de ahorro. Pero alcanzar el nivel 4 supone justificar por qué la diagonal es más corta que la suma de los dos lados del rectángulo. Se trata de un resultado que parecerá evidente a muchas personas y también a muchos niños de todas las edades. Pero desde la perspectiva matemática existe un argumento que lo justifica y que puede comenzar a tratarse, como veremos más adelante, en la educación primaria.

Éste es un estadio competencial contextualizado que deberían alcanzar todos los alumnos de la ESO, posiblemente ya en segundo curso tras el estudio del teorema de Pitágoras. Más allá de ese nivel, debemos adentrarnos y adentrar a alumnado en el estudio de funciones con radicales como la que aquí ha aparecido. No es ningún capricho, pues están en las calles de los pueblos y bajo las aceras de las ciudades. Más lejos todavía supone el estudio de esa función como rama de una cónica y para el cual nos hemos desvinculado ya bastante de la situación inicial. La realidad abstracta de las cónicas hiperbólicas penetra aquí en el mundo del alumnado. Su mundo se amplía y su competencia se pone en juego en situaciones puramente matemáticas desvinculadas ya del mundo que antes era cotidiano y real. La competencia matemática trasciende ese mundo extendiéndose al mundo matemático intangible pese a que el interés por conocer las cónicas surgió del mundo tangible. Es aquí donde el mundo matemático tiene interés por sí mismo.

Cómo gestionar todo eso a lo largo de los diferentes niveles educativos es lo que se aborda en el apartado siguiente. Lo realizado hasta ahora representa una de las caras de la creatividad del profesorado. Otra distinta y no menos creativa es la de hacerla vivir a sus alumnos.

A continuación desglosaremos la situación estudiada proponiendo su tratamiento en cada uno de los diferentes niveles educativos. Todo debe traducirse en plantear situaciones de E/A matemático que pueden ser más menos abiertas, cuyo objetivo es el de lograr la competencia.

Educación primaria, ciclo medio

En la educación primaria deberíamos detenernos en la cuestión de que la línea recta o el segmento traza el recorrido más corto entre dos puntos. El enfoque debe ser visual, pero no adolecer a argumentación. Está claro que si sumamos las dos longitudes de los lados de un rectángulo el resultado será mayor que la medida de su diagonal. Eso será así, sea cual sea el rectángulo. Siempre será así porque para ir de un punto a otro se da un “rodeo”. Si se invita a que cada una de las personas de una clase dibuje un rectángulo y midan su diagonal, los veinte resultados obtenidos arrojarán el resultado de que la diagonal es más corta. Una conclusión obtenida mediante la experimentación. No es una demostración, pero al menos posee argumento. No es que la diagonal sea más corta porque lo vemos así o porque nos lo parece, sino porque las medidas objetivas que he tomado me lo confirman.

Una experimentación más cercana a la demostración sería tomar un compás y situar con él el lado más corto del rectángulo a continuación del lado mayor. Luego, llevar la diagonal sobre ese segmento suma y comprobar que siempre será más corta (imagen 10). No es una demostración rigurosa, pero es una experimentación más poderosa que la anterior. Además, la conclusión será que la longitud de la diagonal del rectángulo estará siempre comprendida entre el mayor de los lados del rectángulo y la suma de ellos.

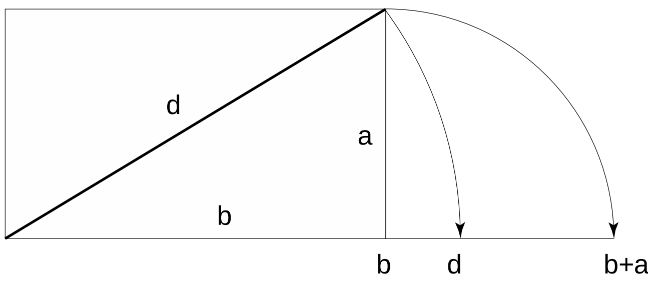

Imagen 14. La diagonal es más corta que la suma de los dos lados del rectángulo

Comprender que el camino que va de un vértice a su opuesto en un rectángulo es más largo que el camino trazado por la diagonal. Esto puede hacerse con compás, no tenemos porque aplicar el principio de que la línea corta es la más breve entre dos puntos. En todo caso, ésta sería al consecuencia y no la causa de la conclusión. Se trata de la desigualdad triangular en el caso concreto de triángulos rectángulos.

Educación primaria, ciclo superior

Los recorridos zigzagueantes por los lados de rectángulos consecutivos son más largos que los recorridos por sus diagonales y éstos, a su vez, más largos todavía que la diagonal del rectángulo resultante. Esto es algo que puede muy bien observarse con trazos a lápiz en papel cuadriculado. Sirve además para ver que lo determinante en caminos zigzagueantes de la misma longitud son el número de pasos en horizontal y en vertical que se dan, lo que en el futuro se llamará componentes del vector que une un punto llamado origen con otro llamado extremo (véase de nuevo la imagen 3).

ESO 1

Revisar y asentar los dos aspectos mencionados para la educación primaria, tanto los correspondientes al ciclo medio como al ciclo superior.

ESO 2

Aplicación del teorema de Pitágoras a la situación concreta del cableado para averiguar el importe del ahorro. Planteamiento de situaciones concretas para corroborar que la suma de los lados de una retícula rectangular es mayor que la suma de las diagonales de cada uno de ellos y ésta, a su vez, mayor todavía que la diagonal del rectángulo total resultante.

ESO 3

Determinar la función del ahorro pitagórico del cableado convirtiendo la expresión de la función de dos variables en una tomando un rectángulo, uno de cuyos lados tiene longitud unidad y el otro longitud arbitraria x. Se trata de una función que no es afín, ni lineal, ni cuadrática, pero realista. Representación gráfica.

ESO 4

Tratamiento de la función ahorro poniendo de manifiesto que la raíz de una suma no es la suma de raíces cuadradas. Estudio de los significados de los casos correspondientes a los ahorros máximo y mínimo.

1º de Bachillerato CiT

Álgebra de límites para determinar las asíntotas de la función ahorro. El estudio de una función irracional como Ah(x) pone en juego las pautas de representación gráfica de funciones y que deberían completarse con la búsqueda de significados como los ilustrados en la imagen 8 mediante el uso de GeoGebra.

2º de bachillerato CiT

Estudio de las cónicas: la hipérbola. Tenemos aquí una situación real y concreta en la que interviene una curva cónica. La conversión de la expresión funcional en una ecuación no lineal de segundo grado está al alcance del alumnado de bachillerato. No sucede lo mismo con el paso de la expresión general de la hipérbola a la forma cartesiana y la relación de significados.

Universidad

A nivel universitario, el estudiante debería ser capaz de expresar con rigor y generalidad situaciones abstractas con la simbología apropiada. Por ejemplo, el hecho de que en una cadena de n de rectángulos conectados por sus vértices, cada uno de base b_K y altura a_K, se verifica que el recorrido por los lados es mayor que el recorrido por las diagonales y éste, a su vez, mayor todavía que la diagonal del rectángulo resultante. Un relación que relaciona el teorema de Pitágoras con la desigualdad triangular:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)\geq\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}\geq\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)^2}$$

Si la función *Ah(x)* es una de las ramas de una hipérbola, ¿dónde están su foco y su eje? ¿Qué significado tienen éstos en el contexto en el que fue generada dicha función? Entramos así en el estudio de la hipérbola desde la perspectiva tradicional y que conduce a la forma cartesiana y a la relación de sus parámetros con el rectángulo áureo. El análisis de la hipérbola como tal se completa con su relación con la situación real y cotidiana que la inspiró.

Conclusiones

La realidad no es solo objeto de la aplicación del conocimiento matemático, sino fuente de inspiración para la creación de conocimiento matemático, tanto en lo referente a la resolución de problemas como a la creación de nuevos conceptos y relaciones, prácticas o teóricas.

La creatividad es el germen de una vivencia matemática en la que coinciden las dos perspectivas “vygotskyanas”: la ascendente y la descendente. Por una parte, las matemáticas ayudan a comprender y resolver situaciones reales, lo que se consigue mediante la aplicación del conocimiento matemático. Por otra, de las situaciones reales se pueden aprender y crear ideas matemáticas que nos conducirán a resultados en los que nos habremos liberado de los aspectos concretos y tangibles que los inspiraron.

La inspiración de la vivencia matemática tiene sus raíces en Freudenthal, pues dando significado a las ideas matemáticas que éstas se incorporan realmente a nuestro quehacer y personalidad. Y esto se logra mediante el entorno [6], enriqueciendo con él esta exposición hemos enriquecido algunos procesos y contenidos del ámbito matemático como son el teorema de Pitágoras, el cálculo y la interpretación de límites, las funciones irracionales, las cónicas, la relación entre las funciones y las ramas de un cónica y la sección áurea. Para todos ellos existe ahora un contexto más sobre el que reflexionar o aplicar conocimiento matemático. Se ha creado un vínculo por el que todos esos conceptos y elementos matemáticos adquieren más significado.

Hemos aplicado el reduccionismo de Polya [11] a situaciones o problemas más sencillos para comprender el ahorro en el recorrido del cableado al tratarlo primero en una cuadrícula y no directamente en la fachada de una casa. Ello supone realizar una modelización de la fachada o de un fragmento suyo en un rectángulo. No se han mostrado aquí por falta de espacio las pruebas y refutaciones previas a los resultados obtenidos que hacían presagiar relaciones que posteriormente fueron descartadas mediante el cálculo riguroso y la representación gráfica con GeoGebra. Un ejemplo más de cómo el desarrollo del conocimiento y la competencia matemática avanzan, como ya observó Lakatos, mediante pruebas y refutaciones [7]. Hemos construido conocimiento matemático a medida que nos adentrábamos en la reflexión, cada vez más profunda y más aislada de la realidad, del fenómeno y esto se ha producido mediante analogías, intuiciones y experimentaciones que Courant y Robbins han destacado como parte esencial del desarrollo de conocimiento matemático [3]. Y eso se ha producido porque con la llamada realidad no tenemos suficiente. A los matemáticos no les basta con ella. Tal y como ha sucedido, nunca se conforman con resolver el problema práctico.

Esto es lo que deberían hacer nuestros alumnos para trascender la competencia matemática que PISA [10] tanto vincula a la realidad cotidiana. Podríamos llamar "competencia matemática 2.0" a la que no solo se centra en problemas puramente matemáticos, sino a aquella que además establece relaciones con situaciones de contexto real y tangible. La competencia matemática 1.0 sería la elemental, vinculada a situaciones realistas y propia de los primeros cursos de la ESO. La competencia 2.0 supone un salto al mundo matemático que deberían vivir, al menos un poquito, los alumnos de cuarto curso que han optado por un currículo de carácter académico que les llevará al bachillerato.

Llevar el fenómeno al aula supondrá la creación, por parte de profesorado, y realización, por parte del alumnado, de actividades más o menos abiertas y de nivel competencial más o menos complejo de tipo reproductivo, conectivo o reflexivo [10]. El profesorado actuará como guía del aprendizaje en un proceso constructivo protagonizado por el alumnado [12].

Referencias bibliográficas

[1] Albertí, M. (2011): "Más allá de la línea de Wallace", actas 15 JAEM Gijón.

[2] Bishop, Alan J. (1999): "Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural". Ediciones Paidós Ibérica. Barcelona.

[3] Courant, Richard y Robbins, Herbert (1996): "What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods". Revisión de I. Stewart. Oxford University Press.

[4] Davis, P.; Hersh, R. (1988). "Experiencia matemática". Editorial Labor y MEC. Barcelona.

[5] Departament d'Enseyament de la Generalitat de Catalunya (2015): "Un curriculum competencial per a l'ESO (avançament)".

[6] Freudenthal, Hans (1972): "Mathematics as an Educational Task". Springer.

[7] Lakatos, Imre (1994): "Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático". Alianza Universidad. Versión castellana del original inglés de 1978. Madrid.

[8] Lave, Jean (1991): "La cognición en la práctica". Editorial Paidós Ibérica. Barcelona.

[9] Piaget, Jean (1970): "The Science of Education and the Psychology if the Child". Grossman. New York.

[10] PISA (2006): "The PISA 2006 Assessment Framework (Science, Reading and Mathematics)". OCDE.

[11] Polya, George (1988): "How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method". Pinceton Science Library. University Press. Reedición del original de 1945. New Jersey.

[12] Vygotsky, Lev S. (1978): "Mind in Society". Harvard University Press. Cambridge, MA.