

La probabilidad en las pruebas de acceso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en Andalucía

Magdalena Carretero, J. Miguel Contreras, M^a del Mar López-Martín y María
M. Gea

email: magdasof72@hotmail.com, jmcontreras@ugr.es,
mariadelmarlopez@ugr.es, mmgea@ugr.es

Universidad de Granada

RESUMEN

El objetivo principal del trabajo es analizar los problemas propuestos en la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU) en la Comunidad de Andalucía. Más concretamente se realizará el estudio sobre los ítems relacionados con la probabilidad simple, probabilidad condicional y probabilidad compuesta. De los cuatro problemas que constituyen la prueba de acceso, siempre se incluye un problema relacionado con contenidos probabilísticos. Un segundo objetivo es comprobar que el contenido de estos problemas refleja adecuadamente las directrices propuestas para la enseñanza del contenido mencionado sobre probabilidad en el Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales.

Palabras clave: Evaluación, pruebas de acceso, Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, Selectividad, Probabilidad

1. Introducción

Aunque el estudio de la estadística y la probabilidad está recogido desde hace años en los planes de estudios de todas las etapas educativas, no se le ha llegado a dar la importancia que tiene en realidad. Sin embargo, este hecho está notando un gran cambio en los últimos años. Un ejemplo de este cambio se encuentra en el marco de evaluación de PISA [17], donde se reconoce la necesidad de que los estudiantes desarrollen las capacidades necesarias para enfrentarse, en su vida diaria y profesional, a la toma de decisiones, desde una perspectiva matemática y científica, en situaciones en las que no contamos con suficiente información.

Son varios los autores que ponen de manifiesto la necesidad de abordar de una forma más profunda los contenidos relacionados con estadística y probabilidad. Por ejemplo, Pérez et al., [19], indican que la probabilidad tiene la enorme cualidad de representar adecuadamente la realidad de muchos procesos sociales y naturales, por tanto, su conocimiento permite comprender y predecir mucho mejor el mundo en que vivimos. Por otro lado, Gal [11], pone de manifiesto que una cultura probabilística permite al sujeto mejorar sus decisiones en situaciones de incertidumbre mediante el aprendizaje de conceptos y procedimientos de razonamiento probabilístico. Batanero [1] justifica esta necesidad citando a Bennet [4], quien muestra cómo el azar y los fenómenos aleatorios impregnan nuestra vida y nuestro entorno. En este trabajo la autora justifica la importancia de desarrollar un razonamiento probabilístico indicando algunos ejemplos de situaciones reales: la interpretación de un diagnóstico médico; la elección de una opción al contratar un seguro; la evaluación de estudiantes o el participar como jurado en un juicio.

La importancia de tener una mayor formación probabilística ha sido también recogida en las orientaciones curriculares españolas en Educación Primaria, Educación Secundaria y Bachillerato. En diversas investigaciones se revisan diferentes currículos relacionados con la formación de probabilidad en estos niveles educativos ([2] y [3]) y se señala la existencia de una tendencia a una enseñanza más experimental de la probabilidad, mediante la realización y simulación de experimentos, con el fin de trabajar con fenómenos aleatorios.

En este sentido, una parte importante de la enseñanza la constituye las pruebas de evaluación de la formación de nuestros estudiantes. Con la intención de medir la comprensión personal de un determinado objeto matemático como es la probabilidad, Godino [12] indica que, al no poder ser observada directamente, al tratarse de un constructo psicológico inobservable, sin embargo, mediante el estudio de las respuestas a los ítems, a las tareas o las pruebas de evaluación, se puede evaluar indirectamente dicha comprensión. Por ejemplo, las soluciones, estrategias, argumentos, etc. recogidas en las pruebas permiten evaluar el aprendizaje alcanzado por el estudiante. Este hecho pone de manifiesto, a la hora de generar estas pruebas, la necesidad de que exista una correspondencia entre el significado institucional pretendido y evaluado [13].

Entre las pruebas de evaluación cabe destacar el papel importante que juegan las Pruebas de Acceso a la Universidad (en adelante PAU) determinando en algunas ocasiones el éxito del estudiante para poder cursar los estudios universitarios deseados.

El interés de nuestro trabajo es analizar las variables que se consideran relevantes para la formación del estudiante en resolución de problemas de probabilidad incluidos en las pruebas PAU de la Comunidad Autónoma de Andalucía durante los años 2003, 2008 y 2013. Por ello, se analizará el contenido matemático que el estudiante ha de utilizar para resolver los problemas de probabilidad incluidos en las mismas.

El trabajo queda estructurado como sigue: en la Sección 2 se realiza una revisión de algunos de los trabajos que han analizado otras pruebas de evaluación. Puesto que en este trabajo nos centramos en el nivel de Bachillerato y en las pruebas PAU resumiremos, en la sección 3, las directrices curriculares para esta etapa educativa, tanto a nivel estatal [14] como de la Comunidad Autónoma andaluza, centrándonos específicamente en los contenidos de probabilidad y las características que encierran dichas pruebas. Además, en esta sección se presentan los elementos analizados y las variables que son objeto de estudio. En la sección 4, se detallan los resultados obtenidos del análisis de las variables, y por último, en la sección 5 se resumen las conclusiones obtenidas del estudio realizado.

2. Antecedentes

En este apartado comentamos algunos estudios que analizan otras pruebas de evaluación. Un ejemplo es el trabajo de Rico [20], donde se relaciona el marco teórico de las pruebas PISA 2003 de matemáticas con la resolución de problemas desde el punto de vista curricular, a través del concepto de competencia matemática y el modelo funcional sobre el aprendizaje de las matemáticas. Dicho modelo analiza el patrón que se sigue a la hora de resolver una tarea matemática: por un lado están los campos de actuación, que son los fenómenos, situaciones o contextos y problema que plantea la tarea; por otro, las herramientas o matemáticas puestas en juego para resolverla, que incluyen las estructuras conceptuales y los procedimientos y finalmente los procesos cognitivos que se movilizan para su ejecución, como son pensar y razonar, comunicar, justificar, representar, modelizar y plantear y resolver problemas.

Carballo [5] analiza la competencia matemática en las pruebas de diagnóstico de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria en diferentes comunidades autónomas durante el curso académico 2008-2009. El objetivo principal de la investigación fue estimar la correspondencia entre los instrumentos utilizados por las comunidades autónomas para confeccionar estas pruebas y el modelo PISA. Las variables que analiza la autora son el contenido matemático (cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre), el contexto o situación (personal, público, educativo y profesional y científico) y el nivel de complejidad, o de los procesos que deben utilizar los estudiantes para realizar una tarea matemática, todas ellas definidas en el modelo PISA de 2006. Además, analiza la forma en que presentan la información a los estudiantes, y si el ítem que se analiza es adecuado.

Mingorance [15], analiza las tablas y gráficos estadísticos en las pruebas de diagnóstico andaluzas, dirigidas a niños de 10 años. Observa que la cuarta parte de preguntas propuestas, aproximadamente, contienen gráficos estadísticos, siendo los más frecuentes los gráficos de barras, pero con presencia de todos los recomendados en el currículo. El nivel de competencia pedido es bajo (nivel 1 entre tres niveles posibles) y los contextos preferentes son los personales y sociales. Generalmente se pide más de una actividad como leer, completar o traducir el gráfico; y se utilizan preferentemente los números naturales, aunque también los decimales o fracciones. Las magnitudes representadas son casi siempre discretas, pero aparecen ejemplos de magnitudes continuas como el peso o el tiempo.

Son también antecedentes de nuestro trabajo algunos estudios específicos que analizan los problemas de probabilidad. En el primero de ellos se estudia el contenido de probabilidad en una muestra de libros de texto de Bachillerato [18]. Como parte del estudio, se analizan los problemas en dos de dichos textos. Específicamente, estudia los problemas relacionados con el experimento compuesto, dependencia e independencia, probabilidad conjunta, regla de la probabilidad total y teorema de Bayes. Distingue si los espacios muestrales son finitos o infinitos y el número de experimentos. También considera espacio muestral impreciso cuando no se especifica. Analiza los contextos utilizados, encontrando casos que no tienen contexto. Asimismo analiza el modo en que se da la información (verbal, simbólico, numérica o gráfica).

En otro estudio previo se analizan los problemas de probabilidad en una muestra de 17 libros universitarios [8], seleccionada después de hacer una consulta a las universidades y elegir los más usados en la asignatura de Análisis de Datos en Psicología. Clasifica los problemas, encontrando diferentes categorías, según las siguientes variables: a) tipo de experimento: simple, muestreo con o sin reposición,; b) tipo de experimento: dependientes o independientes; c) propiedad o teorema que se usa: cálculo de probabilidades compuestas a partir de simples y condicionadas, regla del producto, regla de la probabilidad total, regla de Bayes; d) tipos de situaciones: sincrónicas (cuando los experimentos son simultáneos) o diacrónicas (experimentos consecutivos).

3. Metodología

A lo largo de esta sección se realiza una breve revisión sobre los contenidos curriculares establecidos en la etapa educativa de Bachillerato referentes a la probabilidad, para posteriormente describir los contenidos y objetivos que contienen las pruebas PAU en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Por último, se presentan los elementos muestrales junto con las variables que serán analizadas.

3.1. Directrices curriculares de la Probabilidad en Bachillerato

La enseñanza de las Matemáticas en el nivel de Bachillerato comprende los cursos 1º y 2º de la modalidad de Ciencias y Tecnología y la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. En el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, se establece la estructura de Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas [14]. Los contenidos relacionados con la materia en estudio aparecen recogidos en el bloque de Estadística y Probabilidad.

Centrándonos únicamente en los contenidos probabilísticos se tiene que en el primer curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología se estudian contenidos relacionados con: probabilidad compuesta; probabilidad condicionada; probabilidad total y probabilidad a posteriori y distribuciones binomial y normal como herramienta para asignar probabilidad. En la modalidad de Ciencias Sociales, la asignatura de Matemáticas Aplicada a las Ciencias Sociales I incluye los temas:

- Asignación de probabilidades de sucesos.
- Distribuciones de probabilidad binomial y norma.

Por otro lado, los temas de probabilidad de la asignatura de Matemáticas Aplicada a las Ciencias Sociales II se centran en:

- Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes.
- Implicaciones prácticas de los teoremas: central del límite, de aproximación de la binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números. Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad.

Tal y como se observa (véase Tabla 1), los contenidos probabilísticos descritos en el primer curso de la modalidad de Ciencias y Tecnología son más amplios que en primero de la especialidad de Ciencias Sociales, ya que además de repasar la probabilidad simple, la probabilidad compuesta y condicional introducen el Teorema de Bayes. Sin embargo, cabe destacar que el estudio de probabilidad es más completo en la modalidad de Ciencias Sociales debido a que el Bloque de Estadística y Probabilidad, dentro de la modalidad de Ciencias y Tecnología, solamente está contenido en la estructura de primero de Bachillerato.

Otro aspecto a resaltar del Real Decreto son los criterios de evaluación. Por ejemplo, en el caso de la asignatura de Matemáticas I se incluye el criterio “Asignar probabilidades a sucesos correspondientes a fenómenos aleatorios simples y compuestos y utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal” ([16], p. 45450). Este criterio es muy general ya que incluye la valoración de todo el contenido sobre probabilidad y se indica que: “se pretende medir la capacidad para determinar la probabilidad de un suceso, utilizando diferentes técnicas, analizar una situación y decidir la opción más conveniente. También se pretende comprobar la capacidad para estimar y asociar los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden” ([16], p. 45450).

3.2 Pruebas de Acceso a la Universidad Distrito de Andalucía

Las actuales pruebas PAU están regidas por el Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre, por el que se regula las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas [16]. A su vez, este decreto se basa en la Ley Orgánica de Educación (L.O.E.), que exige, en su artículo 38, la superación de una prueba de madurez que permita valorar los conocimientos y la capacidad de los estudiantes para iniciar sus estudios universitarios.

La prueba PAU de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II consta de dos opciones (opción A y opción B). El estudiante, bajo su parecer, elegirá únicamente una de las opciones, sin existir la posibilidad de entremezclar los ejercicios que componen cada opción. Tanto la opción A, como la opción B, están divididas en tres tipologías de ejercicios. El primer ejercicio pertenece al Bloque de contenidos de Álgebra y el segundo al Bloque de contenidos de Análisis. Finalmente, los ejercicios tercero y cuarto corresponden al Bloque de Probabilidad y Estadística, más concretamente, a probabilidad e inferencia estadística. Aunque en la

actualidad cada uno de los ejercicios que forman la prueba tienen asignada una puntuación máxima de 2.5 puntos, no es hasta 2010 cuando se establece este criterio. Anteriormente, se evaluaba sobre 4 puntos los dos ejercicios pertenecientes al bloque de Probabilidad y Estadística dándole mayor protagonismo a los bloques de Álgebra y Análisis.

Tabla 1. Contenidos de Probabilidad en Bachillerato

Contenidos	Ciencias y Tecnología	Ciencias Sociales	
		1º curso	2º curso
Probabilidad Simple, asignación de probabilidades		X	
probabilidad compuesta, condicionada, total y a posteriori	X		X
Teorema de Bayes	X		X
Distribuciones Binomial y Normal	X	X	
Teorema Central del Límite, aproximación de la Binomial a la Normal			X
Ley de los Grandes Números. Muestreo representatividad			X

Los contenidos relacionados con el bloque de Probabilidad y Estadística de la prueba PAU de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II son: “Profundización en los conceptos de probabilidades a priori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes. Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes números. Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población. Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales. Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida. Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida” ([16, p.45476]).

Los objetivos mínimos de probabilidad exigidos al estudiante en la prueba PAU son, [7]: El estudiante deberá comprender y manejar el lenguaje probabilístico. Ha de ser capaz de construir el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio simple, describiendo los sucesos asociados a él y realizar operaciones con ellos como la unión y la intersección de sucesos; asimismo debe ser capaz de formar el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio compuesto y restringirlo cuando se da una condición dada. Utilizará técnicas de recuento propias, diagrama de árbol y tablas de contingencia para asociar probabilidades a sucesos aleatorios simples, compuestos, dependientes e independientes. Determinará la probabilidad de un suceso a partir de la regla de Laplace, cuando los sucesos sean equiprobables, o aplicando las propiedades de experimentos compuestos y de la realización o no de dos o tres sucesos independientes. Dominará el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes, diferenciado entre sucesos a priori y a posteriori, aplicando los cálculos correctamente.

En lo que se refiere a nuestro estudio, se analizarán los problemas relacionados con la probabilidad: profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total, y teorema de Bayes; que tal y como se ha mencionado anteriormente, se dedica un ejercicio específico en cada prueba PAU relacionado con dicho contenido.

3.3 Elementos analizados

Para realizar el estudio se han analizado los problemas de probabilidad que aparecen en las pruebas PAU relacionadas con la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Los años seleccionados han sido 2003, 2008 y 2013. En cada uno de estos años se revisaron las 6 pruebas disponibles entre la convocatoria de junio y de septiembre. Cada una de las pruebas está formada por dos opciones (A y B), y como resultado se obtuvo una muestra formada por 36 problemas, que constituyen nuestras unidades muestrales.

La muestra en estudio es una muestra intencional, algo propio de la metodología cualitativa. Por tanto, con el estudio realizado no se pretende extrapolar los resultados a otras pruebas diferentes a las analizadas. No obstante, pensamos que las conclusiones pueden servir para conjeturar hipótesis provisionales sobre el contenido de probabilidad de las pruebas realizadas otros años o en otras comunidades, que sería necesario analizar para contrastar dichas hipótesis.

En primer lugar se ha analizado el contenido matemático del ítem, determinado a partir del análisis del enunciado del ítem, y de una posible solución aportada por los autores a cada apartado. Se utilizó para ello el análisis semiótico [13], determinando los objetos matemáticos implícitos en dicha resolución.

Considerando los objetivos mencionados en el apartado 3.2 y los contenidos matemáticos, se han deducido las siguientes variables, las cuales han sido analizadas en todos los problemas seleccionados:

- V1. Tipos de experimentos incluidos en el ítem. Puesto que trabajamos con problemas de probabilidad, siempre hay uno o varios experimentos aleatorios descritos explícitamente o bien que se sobreentienden implícitamente en el enunciado. Se ha diferenciado si se trata de un experimento simple o compuesto, pues la dificultad del problema es menor en el primer caso.
- V2. Tipos de probabilidades pedidas: Se pueden solicitar probabilidades simples, compuestas o condicionales, cada una de las cuáles tiene diferente dificultad y suelen ser confundidas por los estudiantes, ver [6] y [8].
- V3. Tipos de sucesos cuya probabilidad se pide: Independientemente de si la probabilidad que hay que calcular es simple o no, el suceso puede ser elemental, compuesto o complementario de otro dado.

4. Resultados del análisis

A continuación se detallan los resultados del análisis de cada una de las variables mencionadas en la sección anterior. Para ayudar a interpretar los resultados de las categorías analizadas, se incluyen algunos ejemplos de los ítems contenidos de las pruebas PAU que se han estudiado. En el análisis de cada una de las variables se presentan representados gráficamente algunos de los resultados obtenidos.

4.1. Tipo de experimento considerado en el problema

En el cálculo de una probabilidad siempre es considerado un cierto experimento aleatorio junto con el espacio muestral correspondiente. Como consecuencia, el estudiante necesitará saber el tipo de experimento que viene asociado al problema que debe realizar.

En 2002, Ortiz [18] analiza, a través de la clasificación del espacio muestral asociado y la diferencia entre espacios muestrales finitos e infinitos, el tipo de experimento en los problemas de probabilidad. Debido a esto, se ha considerado de interés la variable tipo de experimento aleatorio que aparece implícita o explícitamente en el enunciado del problema.

Cada uno de los elementos muestrales seleccionados se ha clasificado como experimento simple o compuesto. Para ello se ha considerado que un experimento simple es aquel experimento aleatorio que no puede descomponerse en otros experimentos, mientras que un

experimento compuesto es aquel experimento aleatorio compuesto por al menos dos experimentos aleatorios simples. Por ejemplo, si se considera el experimento de lanzar una moneda una única vez se estaría ante un experimento aleatorio simple, pero si realizamos el experimento de lanzar una moneda dos veces, de forma consecutiva, entonces el experimento es compuesto por estar formado por dos experimentos simples.

Un ejemplo de experimento simple aparece en el ítem P2B propuesto el año 2008:

Ítem P2B. Se consideran los sucesos A y B.

- a) Expresar, utilizando las operaciones con sucesos, los siguientes sucesos: 1. Que no ocurra ninguno de los dos. 2. Que ocurra al menos uno de los dos. 3. Que ocurra B, pero que no ocurra A.
- b) Sabiendo que $p(A) = 0,5$, $p(B) = 0,5$ y $p(A|B) = 0,3$, halle $p(A \cup B)$

En este caso el experimento aleatorio es simple ya que no se hace referencia a probabilidad conjunta y es posible encontrar la probabilidad de la unión y la probabilidad condicional.

Por otro lado, un ejemplo de experimento aleatorio compuesto es el ítem P1A propuesto en el año 2003 cuyo enunciado es el siguiente:

Ítem P1A. El 55 % de la población española son mujeres, de las cuales un 23 % usa el coche para ir al trabajo. Se sabe que la probabilidad de que una persona, sea hombre o mujer, vaya al trabajo en coche es 0.52.

- a) Elegido un hombre, al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice el coche para desplazarse al trabajo?
- b) Si se elige una persona, al azar, y resulta que no usa el coche para ir al trabajo, calcule la probabilidad de que sea una mujer.

El experimento es del tipo compuesto pues se plantea un experimento determinado por dos experimentos simples y diferentes, E1 y E2, donde:

- E1: Elegir una persona al azar y observar su género (ser hombre o mujer).
- E2: Una vez seleccionada la persona se le pregunta cómo se desplaza al trabajo, (usa el coche para ir al trabajo o no).

El hecho de trabajar con experimentos compuestos introduce una mayor complejidad al problema ya que es necesario detectar la posible dependencia o independencia existente entre los sucesos que intervienen en el desarrollo del experimento.

Realizado el estudio con los 36 ítems de la muestra se observa que existe una alta tendencia a utilizar experimentos de tipo compuesto en el problema relacionado con los contenidos probabilísticos. Por ejemplo, de los ítems analizados solamente hay cinco ítems asociados a un experimento simple (véase Figura 1). Este hecho revela el grado de dificultad de los problemas incluidos en las pruebas PAU, ya que el estudiante debe ser capaz de identificar un experimento aleatorio compuesto y las características que lo determinan.

4.2. Tipo de probabilidad que se pide calcular

Independientemente del espacio muestral con el que se esté trabajando, se puede solicitar al estudiante el cálculo de distintos tipos de probabilidades, como por ejemplo, probabilidad simple, condicionada o compuesta. En nuestro caso, la clasificación de los problemas respecto a esta variable la realizamos según nos pidan o nos den como dato en los ítems la probabilidad simple, compuesta o condicional. Hay que tener en cuenta que en un mismo problema pueden aparecer varias de estas probabilidades.

Un ejemplo en el que observamos la inclusión de estas tres probabilidades lo tenemos en el ítem P3B, propuesto el año 2013, cuyo enunciado es el que sigue:

Ítem P3B. En una empresa el 65 % de sus empleados habla inglés, de éstos, el 40% habla también alemán. De los que no hablan inglés, el 25% habla alemán. Se escoge un empleado al azar:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable ambos idiomas?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alemán?

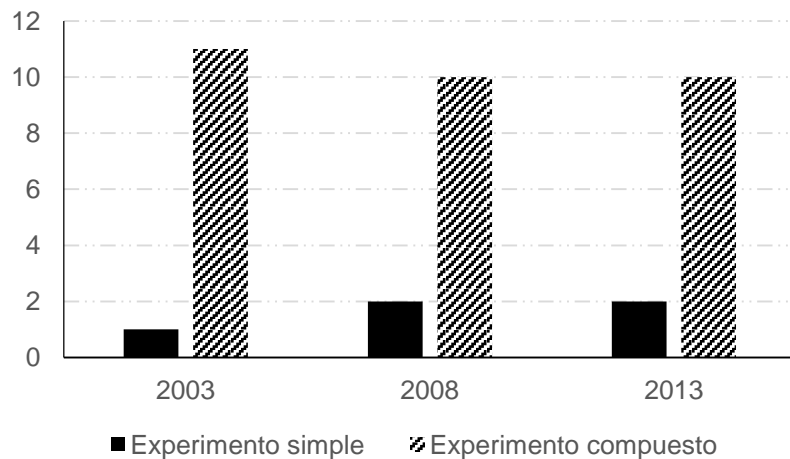


Figura 1. Clasificación de problemas según el Tipo de Experimento

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo alemán, hable también inglés?

Como se observa, tanto la probabilidad simple como la probabilidad condicionada aparecen en el enunciado del ejercicio y en los apartados de resolución. Analizando el enunciado del ítem se observa que la información “el 65% de sus empleados habla inglés” es una probabilidad simple mientras que el resto de datos recogidos en el mismo van asociados a una probabilidad condicionada. Además, tal y como están contruidos cada uno de los apartados que debe resolver el estudiante se puede concluir que: en el apartado a) aparece el cálculo de una probabilidad compuesta, ya que se pide la probabilidad de que un empleado hable ambos idiomas; en el apartado b) la probabilidad es de tipo simple, ya que en este caso se debe obtener la probabilidad de que un empleado hable alemán; y en el apartado c) se especifica una condición y el estudiante ha de diferenciar entre la condición y el condicionado, por lo que la probabilidad se clasifica como condicionada.

En la Figura 2 se resumen los resultados obtenidos al analizar la probabilidad que se solicita en los 36 problemas analizados. Tal y como queda recogido en la figura se observa que en 32 de ellos aparecen de forma conjunta las tres probabilidades, en el enunciado y/o en los apartados que deben ser resueltos. Como consecuencia, se puede concluir que existe una alta tendencia a utilizar un único problema con el fin de evaluar la comprensión de los tres tipos de probabilidades y su discriminación por parte de los estudiantes, discriminación que, como se ha indicado en investigaciones previas, es compleja ([6] y [8]).

Si se realiza el estudio según los años seleccionados, véase Figura 3, se observa que en 2003, de los 12 ítems propuestos, todos ellos incluían probabilidad simple y probabilidad compuesta; mientras que en 2013 se observa una mayor tendencia al uso de probabilidades condicionadas, ya que en todos los casos los ítems incluyen este tipo de probabilidad.

En vista de estos resultados cabe destacar la importancia que tiene el dominar el concepto de probabilidad condicional para el desarrollo y comprensión de muchos otros conceptos de estadística como por ejemplo el de correlación, regresión, nivel de significación de un contraste de hipótesis, etc. [9]. La probabilidad condicional se utiliza incluso en la toma de decisiones de la vida cotidiana y profesional, donde se evalúan las consecuencias de dichas decisiones bajo diversos supuestos. Esta importancia puede incidir en el hecho de la frecuencia con que se pide calcularla en estos problemas.

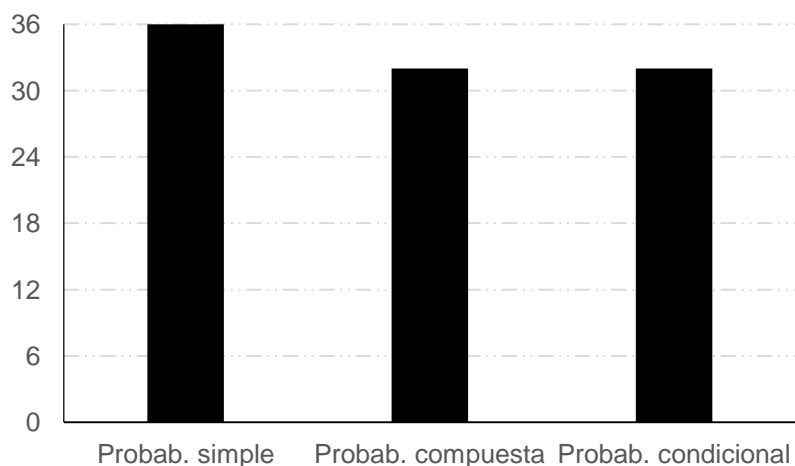


Figura 2. Clasificación de los ítems en función al tipo de probabilidad que se pide

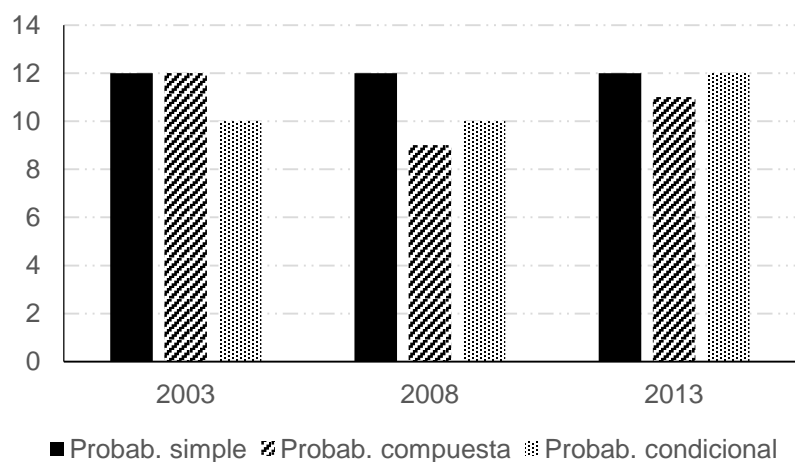


Figura 3. Clasificación de los ítems según periodo seleccionado y probabilidad que se pide

4.3. TIPOS DE SUCESOS SEGÚN PROBABILIDAD QUE SE PIDE

Siguiendo otras investigaciones previas [18], se ha analizado el tipo de suceso que va asociado a la probabilidad que se pide en cada uno de los ítems. Considerando que un suceso es un subconjunto de un espacio muestral, se realiza la siguiente clasificación, dependiendo del número de elementos que los forman:

- Suceso simple o suceso elemental: se considera que un suceso es simple si los puntos muestrales de cualquier resultado simple de un experimento (idealizado) que lo conforman es representado por uno y sólo un punto muestral [10]. Es decir, un suceso formado por un único elemento y que no se puede dividir en elementos más sencillos.
- Suceso compuesto: definimos un suceso compuesto como la unión de varios sucesos elementales.
- Suceso complementario o contrario: dado el suceso a del espacio de sucesos Ω , se define el suceso complementario o contrario de a , como el suceso formado por todos aquellos sucesos elementales que no sean de a pero que estén en el espacio muestral.

Muchos son los ítems recogidos en las pruebas analizadas que contienen sucesos simples, por ejemplo el ítem P1B, propuesto el año 2008.

Ítem P1B. De los 150 coches de un concesionario, 90 tienen motor diésel y el resto de gasolina. De los coches con motor diésel, 72 son nuevos y el resto usados; mientras que de los coches con motor de gasolina hay el mismo número de coches nuevos que de usados. Se elige, al azar, un coche de dicho concesionario; calcule la probabilidad de que:

- Sea nuevo.
- Tenga motor diésel sabiendo que es usado.

Analizando el enunciado del ítem P1B se tiene que los sucesos coches con motor tipo diésel, que se denota por D, y coches que consumen gasolina, denotado por G, son sucesos simples. Las probabilidades asociadas a estos sucesos se deducen directamente del enunciado realizando las operaciones $P(D) = \frac{90}{150}$ $P(G) = \frac{60}{150}$.

Además, se ha considerado el caso en que se pide calcular el suceso complementario de un suceso dado. En estos casos, el estudiante debe primero identificar los sucesos elementales que no pertenecen a un cierto suceso dado y si están incluidos dentro del espacio de sucesos, con el fin de formar el suceso complementario. Aunque describir los elementos de un suceso complementario requiere mayor claridad para definir los elementos que forman el espacio muestral, el cálculo de la probabilidad asociada a dicho suceso sí que es relativamente fácil. Son muchos los ejemplos en los que el cálculo de la probabilidad de un suceso se obtiene restando de la unidad la probabilidad de su suceso complementario.

Como ejemplo podemos utilizar el mismo ítem anterior (P1B), ya que en el apartado b) se pide la probabilidad de que el coche tenga motor diésel sabiendo que es usado. En este caso, la probabilidad solicitada es una probabilidad condicionada, donde el suceso condicionante es “el coche es usado”. El suceso “el coche es usado” denotado por la letra U o equivalentemente “el coche no es nuevo” es el suceso contrario o complementario al suceso “el coche es nuevo” (denotado por la letra N), cuya probabilidad se ha calculado en el apartado a) del ítem. Teniendo en cuenta que ambos sucesos son complementarios y considerando la información obtenida en el apartado a), se puede obtener la probabilidad de que el coche sea usado ($P(U)$ o equivalentemente $P(N^c)$) restandole a uno la probabilidad de ser nuevo, es decir, $P(U) = 1 - P(N)$. De igual forma se puede decir que los sucesos “el coche es de gasolina” (denotado con la letra G) y “el coche es diésel” (denotado por la letra D) también son complementarios entre sí. Luego, además de calcular la probabilidad de estos sucesos, como se ha realizado antes, se podría haber actuado de la siguiente forma: si 90, de los 150 coches, tienen motor diésel entonces su probabilidad es $P(D) = \frac{90}{150}$ y como consecuencia la probabilidad de que el coche tenga motor de gasolina sería $P(G) = P(D^c) = 1 - P(D) = 1 - \frac{90}{150} = \frac{60}{150}$.

El último tipo de suceso considerado es el suceso compuesto, es decir, cuando se compone de más de un suceso simple. En esta situación, el estudiante ha de determinar los sucesos simples que lo componen para después calcular la probabilidad por medio de la regla de la unión de sucesos. Un ejemplo de suceso compuesto se encuentra en el ítem P2B de 2013.

Ítem P2B. El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30% para industria y el 20% para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.

- Si se elige al azar un préstamo, calcule la probabilidad de que se pague.
- Se elige un préstamo al azar que resulta impagado, ¿cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo?
- Ante un préstamo impagado el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo, ¿lleva razón el director?

En el apartado a) de este ítem se pide la probabilidad de pagar un préstamo y el suceso al que hace referencia es un suceso compuesto, ya que el préstamo a pagar puede ser de vivienda, de industria o de consumo. Este dato no se da explícitamente, y el estudiante debe deducirlo

de su interpretación del enunciado. Para calcular su probabilidad ha de aplicar la fórmula de la unión de sucesos, discriminando para ello los casos de sucesos excluyentes y no excluyentes.

La Figura 4 muestra un resumen de los tipos de sucesos cuya probabilidad se pide en los ítems analizados. En los tres años objeto de estudio hay bastante similitud en la proporción de sucesos simples, sólo difiere en dos ejercicios en el año 2013. La diferencia más llamativa se encuentra en el caso de los sucesos compuestos, ya que en el año 2013 sólo aparece en un ítem: la prueba P3A. En consecuencia, hay una tendencia a pedir la probabilidad de sucesos simples y en menor medida, la probabilidad de sucesos complementarios a uno dado.

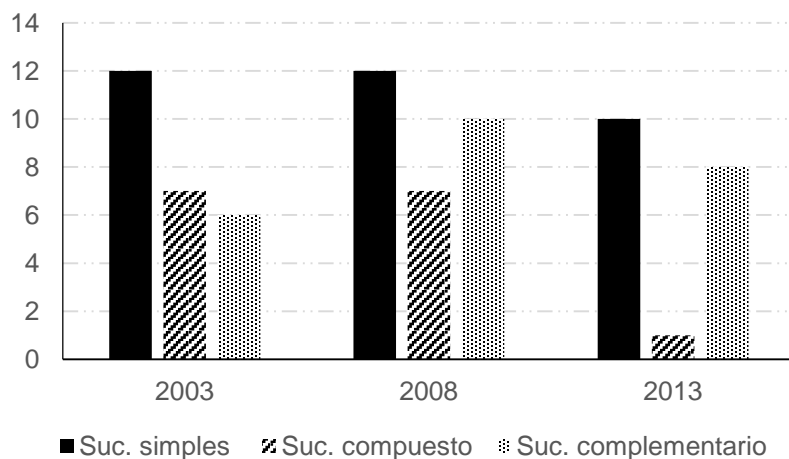


Figura 4. Clasificación de ítems según año y tipo de suceso asociado a la probabilidad pedida

No obstante, y como en las variables anteriores, este resultado no implica mayor sencillez de los problemas, pues generalmente aunque el suceso es simple su probabilidad se deduce de la regla de la probabilidad total o de Bayes.

5. Conclusiones

Con este trabajo se pretende analizar el contenido matemático de los problemas de probabilidad simple, compuesta y condicional propuestos en algunas Pruebas de Acceso a la Universidad de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I en Andalucía. Para ello se han analizado todas las pruebas propuestas en los años 2003, 2008 y 2013, resolviendo los problemas propuestos sobre estos temas y analizando los objetos matemáticos requerido en su solución.

Seguidamente se trató de identificar algunas variables de tarea que influyan en la dificultad de estos problemas. Nos hemos basado para ello en trabajos previos donde se proponían algunas de estas variables ([8] y [18]). Al realizar el estudio de los problemas hemos podido comprobar que las variables propuestas son de interés para tenerlas en cuenta en el diseño futuro de estas u otras pruebas similares, y que pueden ayudar a determinar la dificultad de los problemas.

Finalmente hacemos notar que nuestra principal limitación es que solo analizamos tres años de las pruebas propuestas en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Sería interesante analizar todos los años en los que se han propuesto estas pruebas PAU y realizar un estudio comparativo de estos resultados con los obtenidos en otras comunidades autónomas.

El análisis de un mayor número de problemas nos permitiría realizar un estudio más completo empleando métodos estadísticos más formales para comparar las distribuciones de las diferentes variables de tarea. Igualmente, se puede ampliar el trabajo analizando los problemas que se proponen de inferencia (usualmente sobre la distribución normal, el contraste de hipótesis o intervalos de confianza). Esto nos ayudaría a formarnos una mejor imagen de

cuáles han sido los contenidos priorizados en la formación estadística de los estudiantes de Humanidades y Ciencias Sociales a lo largo de los años en que se han propuesto las Pruebas de Acceso a la Universidad.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC), y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

- [1] Batanero, C. (2006): "Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo". Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas. Estadística y azar. Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. CD-ROM.
- [2] Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2011): "El currículo de estadística: Reflexiones desde una perspectiva internacional". UNO, 59, 9-17
- [3] Batanero, C., Gea, M., Arteaga, P. y Contreras, J.M. (2014): "La estadística en la educación obligatoria: Análisis del currículo español". Revista digital Matemática, Educación e Internet 14(2). Disponible en: <http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/>.
- [4] Bennet, D.J. (1998): "Randomness". New York: Cambridge University Press.
- [5] Caraballo, R. (2010): "Análisis de los ítems de las pruebas de evaluación de diagnóstico en competencia matemática para el segundo curso de la educación secundaria obligatoria en España, 2008-2009: un estudio exploratorio". Trabajo fin de Máster. Universidad de Granada.
- [6] Contreras, J. M. (2011): "Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional". Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- [7] Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2008). ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía. Sevilla: Autor.
- [8] Díaz, C. (2007): "Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología". Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- [9] Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005): "Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística". Epsilon, 59, 245-260.
- [10] Feller, W. (1973): "Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones". México: Limusa.
- [11] Gal, I. (2005): "Towards probability literacy for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas". En G. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 39-63). New York: Springer.
- [12] Godino, J. D. (1996): "Mathematical concepts, their meanings and understanding". En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), Proceedings of the 20th PME Conference (v.2, 417-424). Universidad de Valencia.
- [13] Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007): "The onto-semiotic approach to research in mathematics education". ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 27-135.
- [14] MEC, Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Madrid: Autor.
- [15] Mingorance, C. (2014): "La estadística en las pruebas de diagnóstico andaluzas". Trabajo fin de grado. Universidad de Granada
- [16] MP, Ministerio de la Presidencia (2008): "Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre,

por el que se regula las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas”. Madrid: Autor.

- [17] OCDE (2009): PISA 2009 assessment framework - Key Competencies in Reading, Mathematics and Science. Paris: OCDE
- [18] Ortiz, J.J. (2002): “Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato”. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- [19] Pérez, B.R., Castillo, A. y de los Cobos, S. (2000): “Introducción a la probabilidad”. México: Universidad Autónoma Metropolitana.
- [20] Rico, L. (2006): “Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas”. Revista de Educación, (Extraordinario 2006), 275-294.