

LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA. UNA PROPUESTA DE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO A PARTIR DEL MODELO DE VAN HIELE Y LA METODOLOGÍA DE AULA TALLER

Jorge Eliécer Villarreal Fernández¹ – Jaime Andrés Carmona Mesa² – Carlos Mauricio Arango Ríos³

jorgevf2005@gmail.com – andres.carmona.udea@gmail.com – ffyto@hotmail.com
Universidad de Antioquia, Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid - Colombia.

Tema: Pensamiento Geométrico

Modalidad: CB

Nivel educativo: Terciario - Universitario

Palabras clave: Geometría Analítica, Habilidades de Pensamiento, Aula Taller, Modelo de Van Hiele

Resumen

La enseñanza de la Geometría Analítica para estudiantes de Ingeniería es de vital importancia para la comprensión de procesos matemáticos y físicos de su vida académica y laboral. La unificación del Álgebra y la Geometría que se logra en el proceso de enseñanza de los conceptos geométricos referidos supone metodologías que permitan que la persona pueda realizar las relaciones adecuadas para la consecución de los objetivos de aprendizaje. El presente trabajo muestra el diseño, puesta en práctica y análisis de una propuesta de enseñanza de la geometría analítica en estudiantes de primer año de ingeniería del Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid. El proyecto, que responde a una experiencia profesional e investigativa, tiene como base el Modelo de niveles de desarrollo de Van Hiele para la enseñanza de la Geometría y utiliza material didáctico diseñado dentro de la metodología de aula taller, buscando con ello articular los conceptos matemáticos y el mundo real, recuperando el concepto de lugar geométrico. Los resultados dan cuenta no solo del proceso de enseñanza y aprendizaje si no que trasciende a analizar las habilidades de pensamiento inmersas en la implementación de la propuesta por parte de los estudiantes participantes.

Presentación del problema: La enseñanza de la Geometría Analítica en la Educación Superior, en Ingeniería en este caso, es base para la comprensión de otros conceptos matemáticos y a la vez para el desarrollo del pensamiento espacial. Una de las dificultades que se vienen presentando en el proceso de enseñanza de los conceptos de la Geometría Analítica es que por la automatización de procedimientos, la memorización de ecuaciones, los problemas tipo y repetitivos, se ha venido perdiendo la esencia de la geometría, en este caso el concepto de lugar geométrico. Los estudiantes

¹ Licenciado en Matemáticas y Física. Docente de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y de la Facultad de Ciencias Básicas del Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid. Integrante del Grupo de Investigación Innovaciencia de la Universidad de Antioquia, Colombia.

² Estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, Colombia.

³ Estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, Colombia.

resuelven ejercicios de los temas en discusión, pero no tienen claridad sobre el papel que juega cada uno de los puntos que encuentran, ni las propiedades que cumplen, por esto el cambio en las situaciones lleva a una imposibilidad en la resolución, no se ha generalizado el proceso, no se ha completado el aprendizaje. Además de esta situación en el proceso de enseñanza se enfrenta un problema mayúsculo que tiene que ver con el desfase que se presenta entre la forma en que se enseñan los conceptos geométricos y la manera en que se desarrollan los procesos de aprendizaje de los estudiantes, situación que se ve reflejada en las formas de razonamiento que dejan ver los alumnos, donde se presenta pensamiento concreto donde se deberían estar haciendo abstracciones o que habilidades de pensamiento requeridas para la comprensión de los conceptos no se activan en los momentos requeridos. Por todo esto se plantea el problema de la enseñanza de la Geometría Analítica en la Educación Superior recuperando el lugar geométrico como esencia del análisis de las relaciones que se encuentran en cada una de las figuras a estudiar. De este problema surge una pregunta sobre el cómo lograr que este proceso de aprendizaje se dé ordenadamente de acuerdo a la forma en que se desarrollan las habilidades de pensamiento de los estudiantes, por lo que se propone una estrategia para esto.

Marco de referencia conceptual: Para el desarrollo de la propuesta se tienen en cuenta varias perspectivas teóricas, cada una de ellas referidas a la situación en particular que se trate, es decir a la enseñanza de la geometría, a las habilidades de pensamiento y a la metodología utilizada: el aula taller.

La enseñanza de la geometría: Para este caso, teniendo en cuenta las diferencias cognitivas que presentan los estudiantes, se pensó en un modelo que permitiera partir de niveles básicos de pensamiento y a partir de allí ir consolidando procesos de más alto nivel e interiorizando los conceptos. Por esto se trabajó con el modelo de Van Hiele, el cual describe el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría como un desarrollo que parte de formas intuitivas de razonamiento, hasta una formalización profunda de los conceptos. Jaime y Gutiérrez (1990) caracterizan el modelo de la siguiente manera: se pueden encontrar varios niveles de perfección en el razonamiento de los estudiantes, pero un estudiante solo puede comprender aquello que se le presente de acuerdo a su nivel de razonamiento; se debe trabajar sobre el nivel de razonamiento, alcanzar niveles requeridos para poder comprender las diferentes relaciones matemáticas es base para el

aprendizaje; se debe ayudar a la persona a que razone de manera adecuada, esto a través del proceso de enseñanza.

El modelo de Van Hiele plantea tres elementos, la percepción, que tiene que ver con el interés en el tema (Van Hiele, 1986); los niveles de razonamiento, son una estratificación del razonamiento humano en una jerarquía de niveles, en los cuales es progresiva la capacidad de razonamiento matemático de los sujetos, desde que está iniciando el proceso de aprendizaje hasta que adquieran un desarrollo intelectual alto en el campo conceptual en que se está trabajando (Jaime y Gutiérrez, 1990); y las fases del aprendizaje, dan cuenta de los procesos que conducen al estudiante de un nivel de razonamiento al siguiente. Los niveles de razonamiento son: Nivel 0, predescriptivo; nivel I, de reconocimiento visual; nivel II, de análisis; nivel III, de clasificación; nivel IV, de deducción formal. Cada nivel con unas características específicas que se describirán en la metodología. Las fases del aprendizaje son: la información, la orientación dirigida, la explicitación, la orientación libre y la integración (Burger y Shaughhnessy, 1986). Estas fases también serán especificadas en la metodología.

Las habilidades de pensamiento: El contenido es, por definición: rígido y estático, pues es un producto terminado; son datos rígidos que no podemos modificar y que son aceptados por todo el mundo. Los procesos, por el contrario, son flexibles y crean alternativas, porque cada persona puede generar caminos diferentes para tener acceso a la misma información; son transferibles: un proceso utilizado en una área puede ser exportado para lograr otro conocimiento; tienden a formar competencia: uno de los objetivos del aprendizaje es formar gente competente, que en el terreno práctico demuestra aplicación de conocimientos en forma versátil (Sánchez, 2002). Hablar de las habilidades de pensamiento dentro del sistema actual de educación, es hablar de una realidad construida, es decir que la información existe en el medio pero profesores y estudiantes a través de la activación de sus habilidades de pensamiento la interiorizan fortaleciendo su capacidad de pensar en diversas situaciones, va perdiendo entonces viabilidad las propuestas de tipo memorístico que entregan la información ya elaborada para ser almacenada.

La cadena del desarrollo de las habilidades de pensamiento inicia por la observación y finaliza en la contrastación de leyes y teorías, cada proceso de pensamiento involucra los inmediatamente anteriores, es decir, para realizar una clasificación es necesario que la persona ya haya desarrollado la habilidad de realizar comparación, descripción y

observación. Un proceso exige siempre que el anterior ya esté más consolidado, esto teniendo en cuenta que se esté en niveles semejantes de complejidad. Es importante que el docente conozca el procedimiento de cada habilidad de pensamiento para que pueda observar en sus estudiantes cuales han desarrollado y cuáles no, y de esta manera definir las acciones a seguir para poder promover mayores habilidades cognitivas. De la misma manera es importante tener claro que cada uno de estos pensamientos pueden presentarse en un nivel de desarrollo concreto o abstracto, cuando están en un nivel concreto es importante que el docente proporcione los medios al estudiantes para que este pueda llevarlos a nivel más complejo (Villarreal, 2012).

El aula taller: La metodología de la experiencia fue la realización de actividades en ambiente de taller. Es una estrategia para la gestión del conocimiento, la innovación y la transformación de los ambientes de aprendizaje. En este tipo de trabajo el aprendizaje se obtiene por descubrimiento y asimilación propios (Pasel, 1993), teniendo como base el despertar la curiosidad en torno al problema o concepto, es decir, se busca que se aprenda haciendo. Permite el trabajo en equipo, y utiliza material didáctico para la exploración de situaciones concretas, en el caso de la propuesta se utilizó material concreto y guías de trabajo, que conlleva al desarrollo de las habilidades de pensamiento y a la integración de los diferentes pensamientos matemáticos (Jaramillo, 2012).

Metodología: El aspecto metodológico de la propuesta tiene como centro en llevar a la práctica el modelo de Van Hiele, teniendo como estrategia el aula taller y como herramienta para la implementación de la estrategia las guías de trabajo, con el fin de, a partir de niveles básicos de razonamiento, comprender los conceptos de la Geometría Analítica, la importancia del concepto de lugar geométrico y activar las habilidades de pensamiento que se requiere para ello.

Teniendo en cuenta esto se inicia el proceso mostrando a los estudiantes como se fueron construyendo históricamente los conceptos básicos de la Geometría Analítica, así como lo importantes que son hoy en día en diversos campos de la Ingeniería. Este proceso inicial buscaba mejorar el nivel de percepción de los alumnos sobre el tema, sobre los conceptos que se iban a estudiar.

Para iniciar el proceso con los niveles se presenta el Cono de Apolonio con el fin de que se pueda observar de manera concreta como cada una de las secciones cónicas surge a partir de cortes determinados, con características específicas a este cono. El cono fue

observado por cada uno de los estudiantes identificando las características del material que tenían en sus manos mientras el docente enuncia los elementos del cono, los significados de conceptos como generatriz, vértice, cono; se muestra como el cono es producto de la rotación de un triángulo rectángulo con uno de sus catetos como eje de rotación; finalmente, se mencionan las características que deben tener los cortes en el cono para generar cada una de las secciones cónicas, apuntando que los cortes realizados de manera perpendicular al eje del cono tendrán como sección cónica resultante una circunferencia, mientras que si el corte se realiza de forma oblicua con respecto al eje, la sección generada será la elipse. Los cortes paralelos a la generatriz serán parábolas, y los cortes perpendiculares al eje serán hipérbolas siempre que pensemos en el sólido como un bicono; los alumnos escuchan, observan y realizan las preguntas correspondientes a lo que podían ver (nivel predescriptivo).

A partir de esto se inicia un proceso de identificación de semejanzas de lo visto con objetos cotidianos, se reconoce la forma física de los objetos, aunque aún no es posible que se determinen las propiedades de estos objetos o de las figuras vistas (reconocimiento visual).

La presentación de la primera guía de trabajo inicia el segundo momento de la experiencia, que tiene como objetivo que el estudiante caracterice y establezca algunas de las propiedades generales de las secciones cónicas, para ello se utiliza el doblado de papel que se realiza a partir de instrucciones e imágenes que presenta el material de trabajo (nivel de análisis). Al finalizar la actividad los estudiantes tienen el espacio para compartir las experiencias que tuvieron con el trabajo de doblado de papel, generando un debate que permita la construcción colectiva de los conceptos.

La segunda guía de trabajo presenta una actividad cuyo objetivo se centra en el trazado de la parábola, la elipse y la hipérbola, identificando en el proceso de construcción de las mismas sus propiedades fundamentales, articulando estas propiedades de orden geométrico con la representación analítica de estas curvas, conocidas como ecuaciones canónicas (nivel de clasificación). Para los trazos, es necesario el uso adecuado de la regla y el compás, para lo cual, se indicara a los estudiantes algunos métodos para construir por ejemplo, perpendiculares o paralelas, o la bisección de segmentos en partes iguales, a partir del uso de dichas herramientas. La forma en que se plantea este trabajo, permite que cada participante construya las tres curvas posibles, las que él decida y alcanzase en el tiempo disponible. Así cada uno podrá desarrollar y estudiar sus propias construcciones, siguiendo las indicaciones impresas en las guías para las

actividades, y además, observar los hallazgos realizados por sus compañeros. El debate sobre lo conseguido permite que se establezcan relaciones entre unas propiedades y otras, determinando a que cónica corresponde cada propiedad, cuáles tienen similitudes y cuáles son las diferencias que presentan.

La última actividad tiene como objetivo la interpretación de las ecuaciones canónicas de las figuras cónicas, identificando el procedimiento algorítmico para llegar a ellas y teniendo en cuenta las propiedades antes descubiertas (fase de deducción formal). Luego de desarrollar estos pasos se plantea identificar relaciones entre estas curvas y fenómenos de la naturaleza, buscando el que se le un mayor sentido a estas ecuaciones.

Análisis de datos: Lo que se puede determinar a partir de los resultados de la implementación es que el desarrollo de cada una de las fases de la metodología corresponde a los niveles planteados por Van Hiele, por lo que es clara en la implementación de la propuesta como se tiene como base este modelo.

Cada nivel del modelo determina unas habilidades de pensamiento que se deben activar para poderlas desarrollar, es así como en el nivel 0 y I se realizan observaciones de los elementos que componen los conceptos de cónicas, en este momento de manera concreta. Además se realiza la descripción de cada uno de estos elementos y se comparan entre ellos también a nivel concreto. En el nivel de clasificación el estudiante debe establecer relaciones entre unas propiedades y otras para poder luego determinar clasificaciones de estas características, al lograr esto se llega a la conceptualización y de esta forma a niveles abstractos de pensamiento. El nivel IV, la deducción formal, ya es un razonamiento de tipo teórico, el trabajo sobre las ecuaciones de las cónicas planteado por la guía, exige un razonamiento de tipo inductivo que tiene como prerequisite el que el estudiante realice procesos de análisis y de síntesis, por lo que estas habilidades de pensamiento también fueron activadas en el proceso.

Las fases de aprendizaje propuestas por el modelo también fueron implementadas. Inicialmente se informa a los estudiantes sobre el tipo de trabajo que van a realizar, para luego a través de la orientación dirigida (en este caso por las guías) los alumnos van construyendo los elementos de la red de relaciones en que se enmarcan las figuras cónicas, sus propiedades, sus características, lo cual se revisa y socializa al culminar la realización de cada una de las guías. A partir de esta red de relaciones cada estudiante puede aplicar lo que hasta ahora encontró o comprendió en los debates, a algunas de las figuras que no había construido con anterioridad, esta es la fase de orientación libre en

la propuesta, para finalizar condensando todos los conocimientos hasta ahora desarrollados en el todo que es la construcción de la ecuación de las cónicas.

El nivel de conocimientos declarativos fue alto, los estudiantes comprendieron los conceptos de manera profunda y los pudieron aplicar a situaciones de aplicación planteadas con posterioridad, por lo cual se observa también una mejora en el conocimiento procedimental conseguido. Se debe añadir a este procedimental el aprendizaje del manejo de algunos instrumentos como el compás, el mejoramiento del seguimiento de instrucciones y la posibilidad de activar las habilidades de pensamiento en los momentos en que se requiera. A nivel actitudinal los estudiantes comprendieron el valor que tienen los conceptos geométricos en general y la Geometría Analítica en particular, su nivel motivacional aumentó, así como la atención y la habituación, por lo que al mejorar estos dispositivos básicos de aprendizaje, mejora el aprendizaje mismo.

Conclusiones

La enseñanza de los conceptos geométricos debe tener en cuenta cuáles son las habilidades de pensamiento o el tipo de razonamiento que interviene en el proceso de aprendizaje de estos conceptos, ya que de no hacerlo se puede superar este nivel (desde la enseñanza y no permitir que exista una adecuada relación entre exigencia y capacidad).

De la misma manera las estrategias de enseñanza se deben diseñar a partir del conocimiento de la forma en que nivel tanto matemático como cognitivo, se desarrolla la tarea planteada, esto con el fin de no contradecir formas de enseñanza con estilos de aprendizaje.

El desarrollo de habilidades de pensamiento es un elemento esencial en el aprendizaje de los conceptos geométricos, el no tener en cuenta esto y si presionar porque las cosas se aprenda, conllevan a la búsqueda de aprendizajes memorísticos y faltos de significatividad.

Una importante contribución del trabajo con guías diseñadas, es el hecho de que estas permiten a los estudiantes, realizar su trabajo con un alto grado de independencia respecto del docente, y que aquellos más rezagados encuentren en sus compañeros más adelantados un soporte para sus propios procesos, lo cual posibilita a su vez que el maestro focalice su acompañamiento en los estudiantes que más lo necesitan. Es por esto que para esta propuesta, la metodología del aula taller se ha erigido en una

herramienta muy importante en el propósito de hacer de las Matemáticas un área más inclusiva.

Un elemento básico para el aprendizaje que se puede mejorar a partir de propuestas de este tipo es la motivación intrínseca. Como dispositivo básico de aprendizaje tiene la posibilidad de permitir también que la atención y la habituación tengan un mejor desempeño. La actividad de aula taller activa estos dispositivos y dinamiza la activación de las diversas habilidades de pensamiento, por lo que se dispone el razonamiento para estar al nivel de los conceptos que se van a aprender.

Referencias bibliográficas

Burger, W. y Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Research in Mathematics Education*, 17(1), 31-48.

Ibáñez, R. (2002). Secciones cónicas. *Sigma*, 20, 12 – 38.

Jaime, A. & Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele*. En: S, Llenares, M. V. Sánchez, Teoría y práctica en Educación Matemática. España: Alfar.

Jaramillo, C. y Esteban, P. (2006). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele. *Educación y Pedagogía*, 17, 109-118.

Jaramillo, L. (2012). *La proporcionalidad y el desarrollo del pensamiento matemático*. (Tesis de Maestría). Recuperada de <http://www.bdigital.unal.edu.co/6969/>.

Pasel, S. (1993). *Aula taller*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Sanchez, M. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. *Revista Electrónica de investigación Educativa*, 4(1).

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A theory of Mathematics Education*. London: Academic Press

Villarreal, J. (2012). Propuesta de planeación, puesta en práctica y evaluación para un aula inclusiva. *Revista de educación*, 136, 31-37.