

## **Materiales curriculares con calculadoras**

Mauricio Contreras del Rincón

email: mauriciocontre@gmail.com; Mauricio.Contreras@uv.es

IES Benicalap; Universitat de València – València

### **RESUMEN**

¿Qué matemáticas se pueden hacer con calculadora en las aulas? Se muestra el trabajo realizado por el grupo de calculadoras de la FESPM, y el que actualmente se viene haciendo en el Seminario de este curso; los materiales están agrupados en cuatro bloques, según se orienten al análisis de las PAU y pruebas externas con calculadoras, a las pruebas finales de bachillerato en otros países europeos, al uso de calculadoras científicas, gráficas o algebraicas en las clases de ESO y Bachillerato. En la actualidad se dispone de un banco de materiales que reúne más de 100 trabajos inéditos con calculadoras preparados para ser llevados a las aulas. Se pretende que este material sea de utilidad para las actividades de modelización, y facilite la mejora de la competencia matemática y digital.

*Calculadoras gráficas, calculadoras científicas, pruebas de acceso a la universidad, materiales curriculares ESO, modelización, competencia matemática y digital*

## Introducción

El curso pasado se desarrolló un grupo de trabajo de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, cuyo objetivo era la creación de materiales inéditos sobre calculadoras, que resultaran novedosos y motivadores para alumnos y profesores, y que animen al uso habitual de calculadoras en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este curso, la Federación ha convocado de nuevo un Seminario de calculadoras, con el mismo planteamiento, basándose en la importancia creciente del uso de tecnología en la educación matemática. Se han ampliado los objetivos con los siguientes:

- El análisis de las pruebas externas y finales de bachillerato que se realizan en otros países europeos y la observación de las adaptaciones que se hacen en las mismas para incorporar el uso de los diversos tipos de calculadora (científica, gráfica, CAS) en los exámenes.
- El análisis de las pruebas de acceso a la universidad y de las evaluaciones de diagnóstico y otras pruebas externas de las diferentes comunidades autónomas en lo relativo a los cambios que se deberían implementar para que dichas pruebas evalúen también la competencia de los estudiantes en el uso de calculadoras científicas, gráficas y CAS, dando así cumplimiento a uno de los objetivos del currículo vigente relativo al uso de las TIC.

Tanto el grupo de trabajo del curso pasado, como el actual Seminario, son consecuencia de las diversas propuestas lanzadas en las últimas ediciones de las JAEM (Girona, 2009 [1]; Gijón, 2011 [2]; Mallorca, 2013 [3]) tanto en comunicaciones y talleres, como en espacios de debate específicos sobre el uso de calculadoras. También hay que destacar las conclusiones del Seminario de calculadoras de Málaga (2010, [4]) como un referente necesario del actual Seminario.

### 1. Desarrollo del trabajo

Se establecieron unas líneas generales de funcionamiento, por la que cada autor de los trabajos disponía de libertad para organizar su tiempo de trabajo, con el compromiso de subir los materiales elaborados a la plataforma moodle de la Federación en unos plazos previamente acordados por todos. Así:

- Cada miembro del grupo escribe un informe con su propuesta de material y la sube a la plataforma moodle de la FESPM.
- En esa propuesta figuran como datos: título, nivel educativo, tipo de calculadora (elemental, científica, gráfica, CAS), nombre y apellidos del autor, experimentación en el aula y material necesario para su desarrollo en el aula.
- La división educativa de CASIO colabora aportando material para las experiencias de aula.
- Se elabora un calendario y se hace una distribución de las tareas, decidiéndose que se elaborarán tres trabajos a lo largo del curso,
- En cada trabajo debe figurar: a) justificación del material diseñado, b) competencias generales o matemáticas que se desarrollan, y c) duración aproximada de las actividades

### 2. Trabajos desarrollados

Las siguientes tablas recogen los tres bloques de trabajos desarrollados el curso pasado. Los contenidos de los trabajos abarcan todos los bloques y niveles del currículo de Secundaria. Aparece también un amplio abanico de calculadoras: científicas, gráficas y algebraicas, incluyendo los modelos que pueden trabajar sobre fotos o vídeos.

	Científica	Gráfica	CAS/Gráfica
Sucesiones con la calculadora CP-400			X
Sucesiones con la calculadora FX-82 ES	X		
Geometría en el billete de 500 euros		X	
Fracciones y mixtos	X		
La calculadora en aritmética	básica		
Cálculo de raíces de ecuaciones polinómicas	X		
Movimientos: un trabajo cooperativo		X	X
Geometría analítica cotidiana			X
Teorema de Pitágoras con calculadora gráfica			X
Porcentajes con la calculadora FX-82SX	X		
Descomposición de fracciones impropias			X
El período de los números	X		
El bosque algebraico			X
Manual y primeras operaciones	X		

Tabla 1. Primera colección de trabajos

	Científica	Gráfica	CAS/Gráfica
Construcción de triángulos con CP-400			X
Resolución de problemas con CP-400			X
Descomposición en factores primos	X		
Tablas de valores	X		
Estadística unidimensional			
Surtidor con CP-400			X
Construcción de modelos sobre fotos		X	
Estudio de la función logística	X		
Deducir derivadas con la calculadora CP-400			X
Primeros sistemas de ecuaciones	X		

Tabla 2. Segunda colección de trabajos

	Científica	Gráfica	CAS/Gráfica
Distancia de frenado			X
Media, varianza y desviación típica	X		
No es un manual de estadística bidimensional	X		
Palabras en la calculadora	X		

Tabla 3. Tercera colección de trabajos

En el curso actual se ha dividido la tarea en cuatro trabajos que deberán subirse a la plataforma moodle antes de la segunda sesión presencial, en el mes de noviembre. Los primeros trabajos recibidos son los siguientes:

	Científica	Gráfica	CAS/Gráfica
<b>Circunferencia</b>			X
<b>Cónicas</b>			X
<b>Pau Julio 2014</b>	X	X	X
<b>Las pesadas</b>	X		
<b>Inecuaciones, dominios y asíntotas</b>	X		
<b>Programación lineal</b>			X
<b>Ecuaciones</b>	X		X
<b>Lo que no se ve de las ecuaciones trigonométricas</b>			X
<b>Las PAU en Hungría</b>	X		
<b>Los exámenes finales de bachillerato en Portugal</b>			X

**Tabla 4. Los primeros trabajos de 2015**

Los trabajos pueden agruparse en cuatro bloques, de acuerdo con su temática y con el tipo de calculadora que se usa en la resolución. Dichos bloques son los siguientes:

- 1) Actividades para el aula con calculadora científica: Las pesadas; Inecuaciones, dominios y asíntotas; Ecuaciones.
- 2) Actividades para el aula con calculadoras gráficas y algebraicas: Circunferencia, Cónicas, Programación lineal, Ecuaciones
- 3) Las PAU y las evaluaciones externas con calculadoras: PAU Julio 2014
- 4) Las evaluaciones externas de bachillerato con calculadoras en Europa: Las PAU en Hungría, Los exámenes finales de bachillerato en Portugal.

### **3. Algunos ejemplos**

A continuación se muestran algunos ejemplos de trabajos desarrollados en el grupo de trabajo y en el Seminario. Se observa que en todos ellos hay una tendencia a destacar aquellos aspectos de los contenidos que se aprecian mejor con la calculadora que sin ella. Y sobre todo, se insiste en la liberación de trabajo que supone la realización de los cálculos por las máquinas. Y cuando citamos cálculos no nos referimos sólo a operaciones aritméticas elementales, si no también a operaciones tales como resolver una ecuación, hallar el módulo de un vector, obtener la inversa de una matriz, etc. Todas ellas son tareas simples en bachillerato que pueden desarrollarse con la calculadora, sin necesidad de dedicar un tiempo excesivo al cálculo, lo que permite dedicar más tiempo a la reflexión.

#### **Primer trabajo: Geometría analítica con la ClassPad 330**

Se aborda el estudio de los problemas clásicos de geometría analítica, recurriendo a las prestaciones del cuadro de medidas de la aplicación Geometría, el cual permite obtener de manera instantánea, pendientes y ecuaciones de rectas, ángulos, a la vez que obtener puntos de corte, intersecciones, etc.

La ventaja del uso de la calculadora gráfica CAS es que problemas que antes estaban condenados a ser resueltos algebraicamente, ahora se pueden tratar mejor desde el punto de vista de la geometría, de forma visual.

Algunos ejemplos de actividades:

- 1) Halla la ecuación de la recta de vector ortogonal  $v=(2, 3)$ , que pasa por el punto  $P(1, -1)$

En la rejilla entera se marca el punto  $P(1, -1)$  y se dibuja el vector  $v=(2, 3)$  con la herramienta vector. A continuación se selecciona el vector y el punto, y se elige la construcción "Recta perpendicular". Si seleccionamos la recta y abrimos la ventana principal, podemos ver su ecuación.

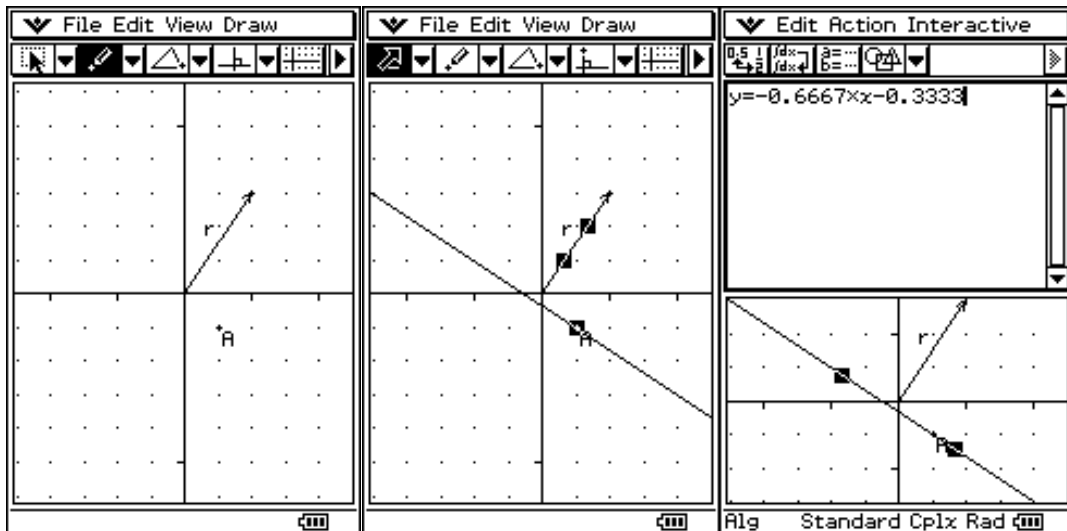


Figura 1. Obtención de la ecuación de una recta.

- 2) Halla la distancia del punto  $P(3, -3)$  a la recta de ecuación  $x-2y+3=0$

En la rejilla entera se marca el punto  $P(3, -3)$ , se inserta la gráfica de la función  $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  y sobre la gráfica, se dibuja la recta. A continuación seleccionamos el punto y la recta, y en el cuadro de medidas aparece la distancia del punto a la recta.

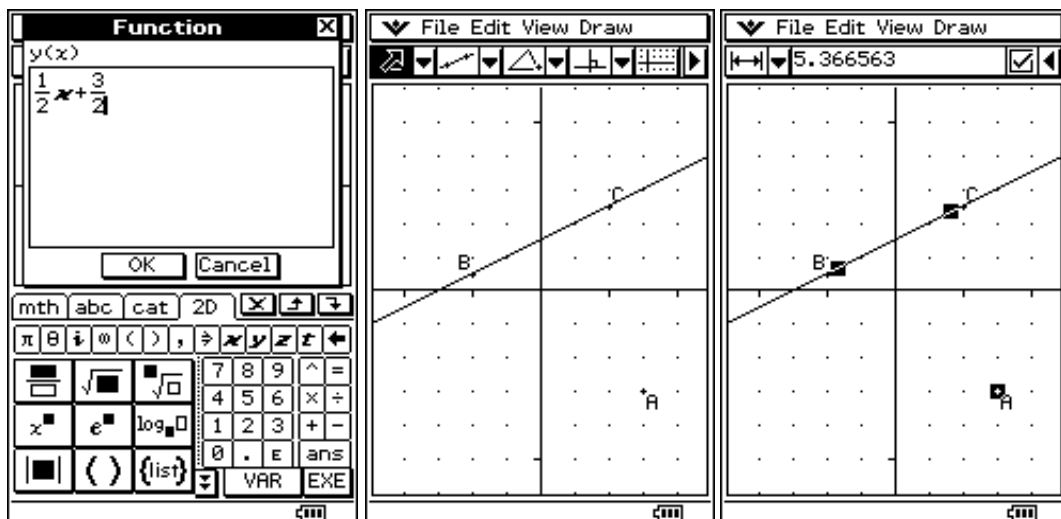


Figura 2. Cálculo de la distancia de un punto a una recta.

## Segundo trabajo: Descomposición de fracciones impropias con la CP 400

Se aborda la descomposición de las fracciones impropias, por el algoritmo de la división de polinomios consistente en reproducir el divisor en el seno del dividendo y descomponer el dividendo. Por ejemplo, la fracción impropia

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = \frac{x \cdot (x - 2) + 4x - 3}{x - 2} = \frac{x \cdot (x - 2) + 4 \cdot (x - 2) + 8 - 3}{x - 2} = x + 4 + \frac{5}{x - 2}$$

Recurriendo a las prestaciones de la calculadora CP-400 podemos determinar las raíces y la representación gráfica de la función racional, además de las asíntotas, tal como se aprecia en las siguientes figuras.

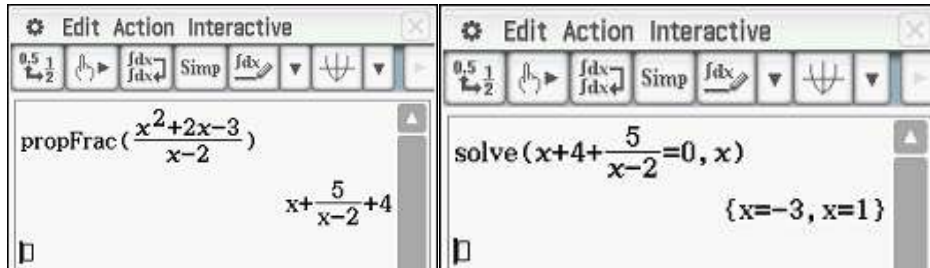


Figura 3. Descomposición factorial y cálculo de raíces

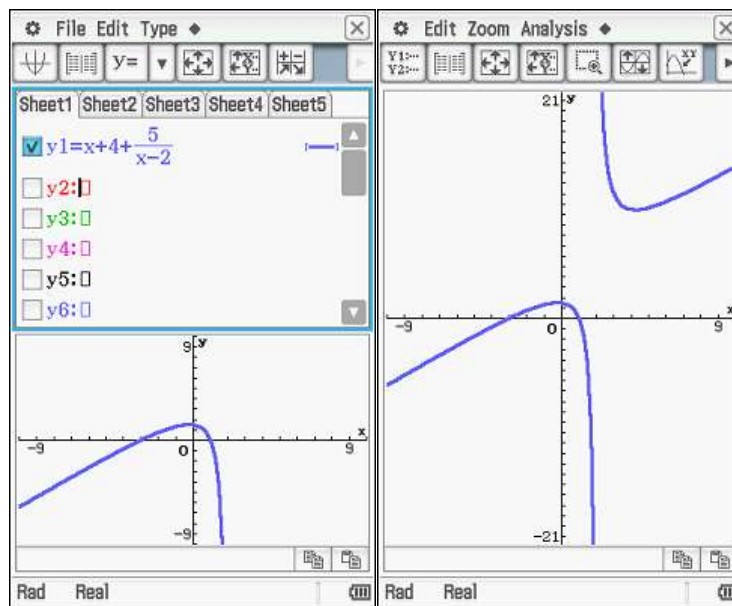


Figura 4. Gráfica de la función racional

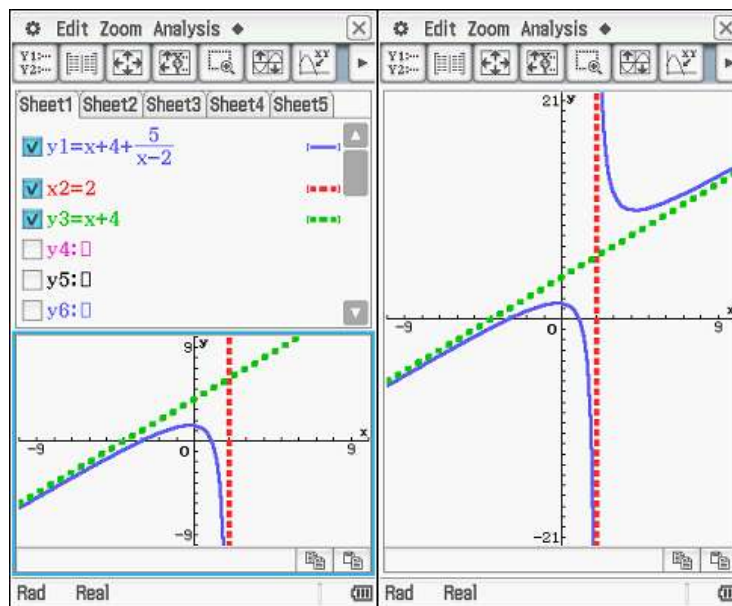


Figura 5. Gráfica de la función racional y sus asíntotas

### Tercer trabajo: Construcción de modelos sobre imágenes de objetos reales

Con la calculadora CG20 se aborda la construcción del modelo matemático asociado a una imagen de un objeto real. Por ejemplo, ¿cuál es la ecuación de la trayectoria de una gota de agua en un chorro de agua procedente de una fuente? Se trata de un modelo parabólico que puede obtenerse mediante la función Dibujar Imagen de la CG20. En un modelo de regresión cuadrática obtenemos un coeficiente de regresión de  $r^2 = 0,9998$ , tal como se ve en la siguiente figura:



Figura 6. El modelo cuadrático de regresión de una fuente

#### 4. Jornadas de Valencia

En las sesiones de clausura del grupo de trabajo de calculadoras celebradas en Valencia, los días 17 y 18 de octubre de 2014, se expusieron diversas comunicaciones basadas en los trabajos exhibidos en la plataforma moodle del grupo. Se incluyeron dos debates:

- 1) Un debate sobre la situación de las calculadoras gráficas y simbólicas en las Pruebas de Acceso a la Universidad y en las evaluaciones externas, y
- 2) Un debate sobre perspectivas de futuro del grupo de calculadoras de la FESPM.

También se presentaron los libros elaborados por el grupo de trabajo sobre el uso de calculadoras: Matemáticas 4º ESO con calculadora [5], Matemáticas con calculadora, 1º de bachillerato [6] y Matemáticas con calculadora, 3º de ESO [7], obras que se pueden localizar en la bibliografía.

Entre las conclusiones de las jornadas se afirma que es necesario difundir las posibilidades didácticas de la calculadora científica, manifestándose inquietud por el papel actual de las calculadoras en pruebas externas, de evaluación, y finales de bachillerato en las distintas comunidades autónomas

## 5. Conclusiones

En el momento de escribir esta comunicación todavía no se ha terminado de elaborar la primera tanda de trabajos del Seminario de 2015, pero ya se está preparando la primera sesión presencial que tendrá lugar en Barcelona, los días 15 y 16 de mayo. De forma similar a las Jornadas de Valencia, se pretende que éstas sean unas sesiones de intercambio de materiales, esta vez sobre los cuatro bloques de trabajos que se vienen desarrollando: a) calculadoras en los exámenes europeos, b) calculadoras en las pruebas externas y las PAU, c) actividades con calculadoras científicas y d) actividades con calculadoras gráficas y algebraicas.

Con todos los materiales curriculares elaborados se pretende crear un banco de actividades para el aula sobre calculadoras científicas, gráficas y algebraicas, que sea útil para las clases cotidianas de matemáticas en ESO y Bachillerato. Este banco de datos se expondrá en la página web de CASIO y pretende ser un punto de apoyo para el uso de tecnologías en la enseñanza y para el aprendizaje de las matemáticas, que contribuya a la mejora de la educación matemática.

### Referencias bibliográficas:

- [1] Contreras, M.; Peiró, R. (2009): "Espacio de debate Calculadoras en el aula" en XIV JAEM. Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas". Actas, página 65, Girona (España).
- [2] Carrillo, A.; (2011): "Espacio de debate Calculadoras en el aula" en XV JAEM. Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas". Actas, página 48, Gijón (España).
- [3] Chacón, J.M.; (2013): "Espacio de debate Calculadoras en el aula" en XVI JAEM. Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas". Actas. Mallorca (España).
- [4] Contreras, M.; Fernández, J.M.; Peiró, R.(2010): "Seminario de calculadoras, documento de conclusiones". Málaga (España).
- [5] Amaro, E. y otros. (2011). Matemáticas con calculadora. Educación Secundaria Obligatoria. 4º Curso. SAEM Thales. Sevilla. División didáctica Casio. Flamagás S. A. Barcelona.
- [6] Amaro, E. y otros. (2012). Matemáticas con calculadora. 1º de Bachillerato. Ciencias y Tecnología. SAEM Thales. Sevilla. División didáctica Casio. Flamagás S. A. Barcelona.
- [7] Amaro, E. y otros. (2012). Matemáticas con calculadora. 3º de ESO. SAEM Thales. Sevilla. División didáctica Casio. Flamagás S. A. Barcelona.