Proyecto Alfombra de Sierpinski

José Luis Rodríguez Blancas; David Crespo Casteleiro;
Dolores Jiménez Cárdenas

email: jlrodri@ual.es; davidcasteleiro@hotmail.com; lola.jimenez66@gmail.com

Universidad de Almería; IES Ciudad de Dalías, Dalías – Almería;
CEIP San Fernando, Almería

RESUMEN

Los fractales constituyen una herramienta visual y manipulativa de gran interés para el aula de Matemáticas. Queremos presentar un proyecto basado en la construcción de un fractal gigante realizado con pegatinas de colores, en el que en abril de 2015, ya intervienen más de 26.000 alumnos de más de 32 países: El proyecto Alfombra de Sierpinski. Es una actividad realizada de manera colaborativa, con un marcado carácter social e integrador, donde pretendemos que tengan cabida todos los alumnos independientemente de sus posibles limitaciones físicas o cognitivas.

Alfombra de Sierpinski, Fractales, Didáctica de las Matemáticas.

1. Fractales. Generalidades

La mayoría de los objetos que nos rodean, no son rectos o planos. Muy al contrario presentan formas irregulares. Si una representación del horizonte es la de una recta, esta modelización es francamente imprecisa, ya que de hecho es curvo.

La geometría euclídea que imperó durante muchos siglos, tuvo su contrapunto a partir del s. XIX con el descubrimiento de geometrías donde no se cumplía el quinto postulado de Euclides o su reformulación, en el que la suma de los ángulos de un triángulo es uno llano. Estas nuevas geometrías, llamadas no euclídeas, supusieron una revolución del pensamiento matemático tradicional. De forma complementaria, comienzan a nacer estructuras con unas propiedades sorprendentes:

- La *función de Weierstrass*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

donde $0 < a < 1$, b es un entero impar y positivo, cumpliendo $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, es una función continua no diferenciable en ninguno de sus puntos.

- En *conjunto de Cantor*, que se obtiene de forma recursiva cuando en el intervalo [0, 1] eliminamos en cada paso el segmento abierto correspondiente al tercio central de cada intervalo. Este objeto pone en controversia el concepto tradicional sobre el tamaño de los objetos, ya que es un conjunto de medida nula, pero claramente no vacío ni siquiera numerable.

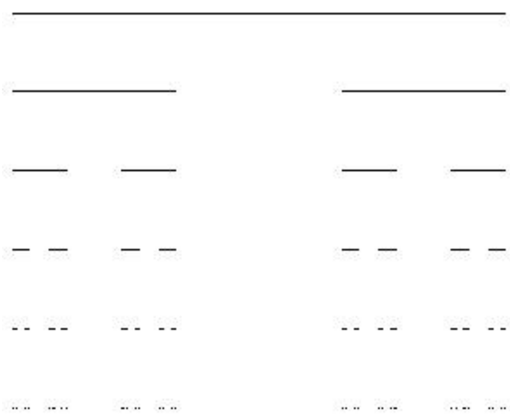

Imagen 1: Conjunto de Cantor

- La curva de Peano, un objeto con dimensión topológica 1 y que es densa en el plano.

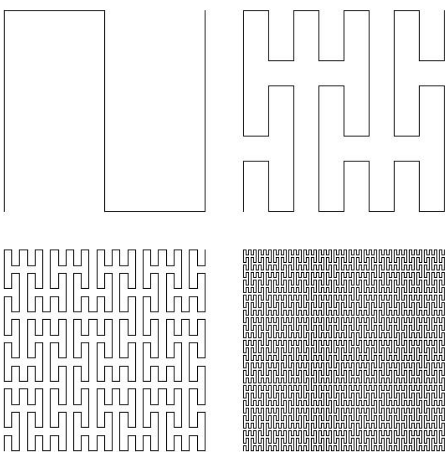

Imagen 2: Curva de Peano

Las cualidades que encierran estos objetos, chocan frontalmente con algunos de los conceptos que intuitivamente tenemos asentados. Tanto es así, que Henri Poincaré denominó "galería de monstruos" a estas construcciones con semejantes irregularidades [1].

Aunque esta lista de *monstruos* se acrecienta (1) durante el primer cuarto del s. XX, tenemos que esperar hasta que Benoît Mandelbrot publica en 1967 el artículo *¿Cuánto mide la costa de Inglaterra?*, preliminar a la publicación en 1975 de *Los objetos fractales: forma azar y dimensión*. En este ensayo, Mandelbrot acuña el neologismo fractal [2], construido a raíz del vocablo latino *fractus* que significa roto o fragmentado. Bajo este manto, se agrupan aquellos objetos cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas [1]. Esta definición (2), aunque quizás poco precisa, es cuando menos intuitiva. Algo similar ocurre con el concepto de dimensión fractal, aunque no en el sentido de exactitud si no de pluralidad de las dimensiones. Puesto que el objeto central de esta comunicación es un fractal autosimilar, esto es, que las partes son iguales al todo, emplearemos la dimensión de homotecia, que se define como:

$$D = \frac{\log (N(r))}{\log (1/r)}$$

siendo N(r) el número de copias del objeto original necesarias para recubrirlo y r la razón de semejanza entre el objeto y las copias de este.

Los trabajos de Mandelbrot, alcanzan su punto álgido con en 1982 con la publicación de *La geometría fractal de la naturaleza,* en el que se aporta una nueva forma de comprender muchos de los objetos que nos rodean. En [1] sostiene: "concebí y desarrollé una nueva geometría de la naturaleza […]. Permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías hechas y derechas, identificando formas que llamo fractales". Se había, por lo tanto, creado una nueva forma de entender el mundo.

2. La alfombra de Sierpinski

Este fractal fue publicado en 1916 por el matemático de origen polaco Waclaw Sierpinski (1882 - 1969) en [3] (aunque descubierto anteriormente por su estudiante de doctorado Stefan Mazurkievicz en 1913). Se construye dividiendo un cuadrado en otros nueve de lado 1/3 del primitivo y eliminando el interior del cuadrado que ocupa la posición central, repitiendo este proceso en cada uno de los cuadrados que quedan.

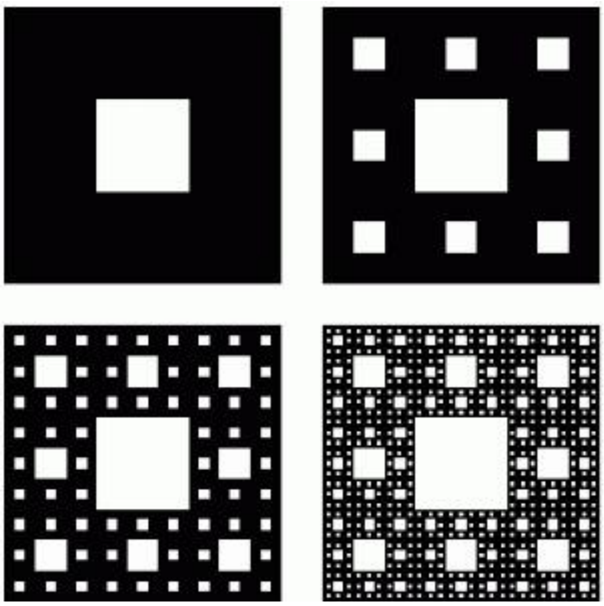

Imagen 3: Las cinco primeras iteraciones de la alfombra de Sierpinski

En cada iteración, el número de cuadrados se ve multiplicado por 8 y en cambio el lado de los mismos es 1/3 del anterior. Se obtiene así un objeto geométrico *hueco* (área nula) pero con perímetro infinito y cuya dimensión es $\frac{\log 8}{\log 3} \approx 1.893$.

El objetivo perseguido por Sierpinski, era la búsqueda de una *curva universal*, esto es, que cualquier curva dibujada en el plano, indistintamente del número de intersecciones que tenga, es homeomorfa a un subconjunto de la Alfombra [4].

3. El proyecto Alfombra de Sierpinski

3.1. Inicios

En mayo de 2014, tras nuestra participación en la XII Feria de la Ciencia en Sevilla con el proyecto *Juegos y Joyas fractales* (3) y la experiencia aportada con la construcción de fractales con materiales manipulativos, nos planteamos la posibilidad de acercarlos a las aulas. El material elegido, fueron pegatinas de colores cuadradas con las que disfrutaron los alumnos de Educación Infantil del CEIP Francisco de Goya en Almería realizando la cuarta iteración de la Alfombra de Sierpinski. Esta primera toma de contacto, nos animó a realizar la actividad con siete Centros más y poder así conformar la quinta iteración de este fractal.

El interés despertado en los Centros educativos, hizo que el número de participantes rápidamente superase las expectativas iniciales, con los que el objetivo se estableció en sesenta y cuatro Centros Educativos, número necesario para formar la sexta iteración del fractal protagonista del proyecto.

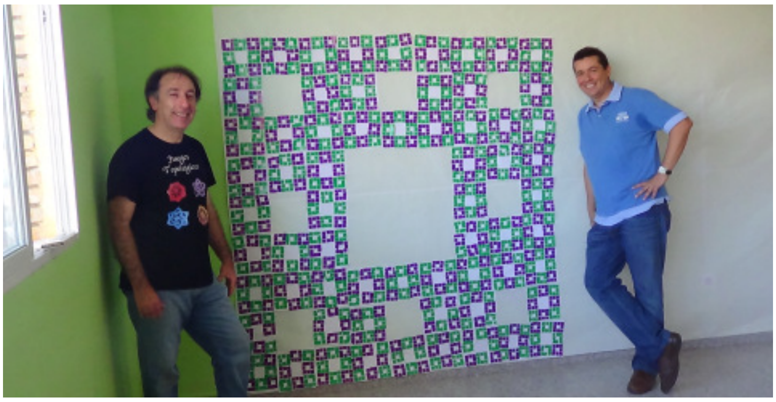

Imagen 4: Alfombra realizada en el CEIP Francisco de Goya el 30 de mayo de 2014

En octubre de 2014 pudimos exponer una alfombra de 25 metros de lado en Cosmocaixa (Barcelona), sede de la XV edición del concurso internacional (para países de habla hispana y portuguesa). Con este proyecto obtuvimos el primer premio en la categoría de laboratorio de Matemáticas y el jurado justificó su fallo: “por la creación de un proyecto integrador y solidario que involucra a muchos centros educativos utilizando un objeto matemático muy visual”.

Imagen 5: Proceso de montaje en Cosmocaixa Barcelona (octubre 2014)

3.2. Síntesis

El proyecto Alfombra de Sierpinski es una actividad (sin ánimo de lucro) colectiva, inclusiva y con un marcado carácter social. Pretendemos que pueda ser desarrollado por cualquier colectivo, independientemente de la discapacidad de los participantes, y que llegue a colectivos desfavorecidos a través del patrocinio a colegios de ONG'S de todo el mundo.

El arco de edades que abarca la actividad, cubre todos los niveles Educativos, desde Infantil a Universitario, pasando por Educación Especial y alcanzando Centros de Mayores.

Usando como herramienta los fractales, tratamos de:

- Dar a conocer el concepto de fractal, su presencia en nuestro entorno y las aplicaciones a la vida cotidiana.
- Familiarizar al alumno con su construcción, basada en la autosimilitud, y estudiar las propiedades que encierran.
- Desarrollar el trabajo manual y visual.
- Estimular los razonamientos inductivo y deductivo.
- Ensalzar el trabajo cooperativo, y la interdependencia positiva, como forma de conseguir construcciones de un tamaño importante.
- Favorecer el intercambio de conocimiento y experiencias entre los participantes del proyecto, a través tanto de redes sociales como de la plataforma e-Twinnig.
- Educar en valores: Solidaridad, Respeto, Igualdad, Medio ambiente,...

El horizonte marcado, es la construcción de la séptima iteración del fractal, en 2016, coincidiendo con el centenario de la publicación del artículo donde Sierpinski presentó la alfombra que lleva su nombre. Una vez finalizado, habrán participado 32.768 alumnos, pertenecientes a 512 Centros. El siguiente cuadro resume las necesidades cuantitativas del proyecto:

Iteración	Número de cuadrados	Niños	Lado de la alfombra
1	8		6 cm
2	8^2= 64	1	18 cm
3	8^3=512	8	54 cm
4	8^4=4.096	64	1,62 m
5	8^5=32.768	512	4,86 m
6	8^6=262.144	4.096	14,58 m
7	8^7=2.097.152	32.768	43,74 m

Actualmente más de 400 colegios de 32 países, inscritos en el proyecto, habiendo por lo tanto cubierto ya cerca del 80% de los centros necesarios para alcanzar el objetivo propuesto.

3.3. Descripción de la actividad

Cada centro inscrito (4) en la actividad, puede realizar una unidad mínima (cuarta iteración) en la que participan 64 niños, pudiendo hacer tantas como su volumen de alumnado le permita. A cada niño se le entrega una plantilla fotocopiada (las hay de dos tipos, con esquinas verdes y otras con esquinas moradas), junto con 64 pegatinas (32 moradas y 32 verdes). Una vez que las han colocado, recortamos cada hoja manteniendo la pestaña superior.

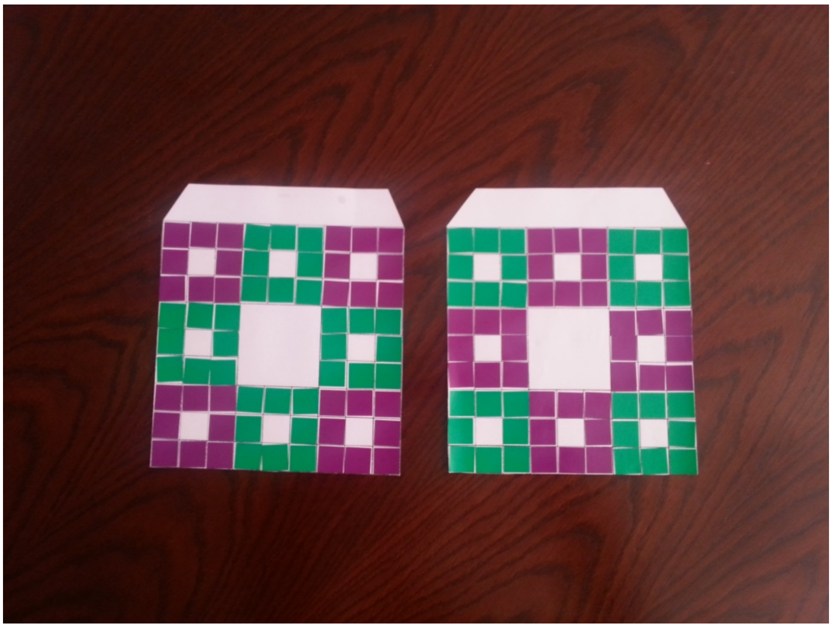

Imagen 6: Plantillas con las segundas iteraciones pegadas y recortadas

Seguidamente, 8 grupos de 8 niños cada uno montan su correspondiente 3ª iteración. Deben preparase 4 con esquinas moradas y otras 4 con esquinas verdes. La regla es que no pueden juntarse cuadrados del mismo color.

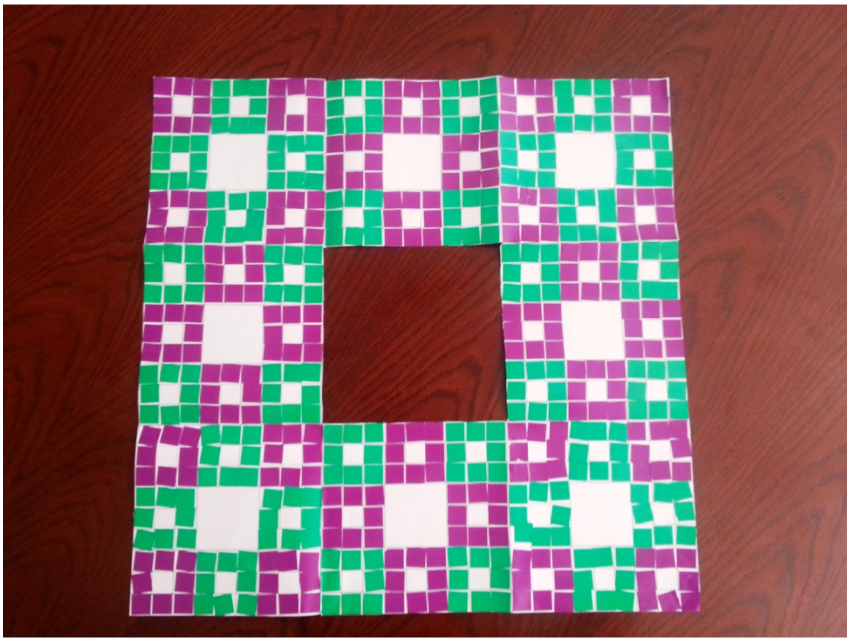

Imagen 7: Tercera iteración con esquinas moradas

Para finalizar la 4ª iteración, se toman 8 copias de la 3ª iteración (cuatro con esquinas moradas y otras cuatro con esquinas verdes) y se unen siguiendo el mismo patrón, teniendo en cuenta la alternancia de color.

La actividad manual en cada centro se complementa con la realización de fichas de trabajo adaptadas a la edad de cada uno de los participantes, en las que se propone colorear, recortar, calcular perímetros y áreas de las distintas iteraciones, encontrar la dimensión de distintos fractales, entre otras actividades, trabajando los siguientes conceptos:

Infantil - Especial

- Reconocer el cuadrado, el rectángulo y las figuras semejantes.
- Favorecer el aprendizaje de la suma.
- Comprender los principios de dualidad y paridad.
- Distinguir colores.

Primaria

- Permitir una introducción del concepto de multiplicación y división.
- Familiarizar al alumno con la notación de las potencias y su utilidad para resolver problemas.
- Conocer las medidas de los ángulos.
- Saber calcular el área y el perímetro de figuras geométricas sencillas.
- Introducir el concepto de infinito.
- Practicar la destreza en la resolución de problemas.

Secundaria-Bachillerato

- Uso y ventajas del lenguaje algebraico.
- Manejar sucesiones y series de números reales.
- Calcular el límite de una sucesión.
- Trabajar con logaritmos y calcular dimensiones fractales

De manera paralela, podemos utilizar la alfombra para enseñar al alumnado el sistema de escritura y lectura Braille. Esta posibilidad didáctica, puede complementarse junto con el código ASCII, que permite introducir el código binario de una manera lúdica y acercar al alumno al lenguaje con el que las máquinas codifican la información.

Imagen 8: Alumnos del IES Ciudad de Dalías con un mensaje codificado en Braille

Quisiéramos terminar esta comunicación agradeciendo el interés mostrado en el proyecto e invitando a los interesados a que se sumen al mismo, bien sea de forma individual o formando parte de una iteración superior. En nuestra página en Facebook (https://www.facebook.com/sierpinskicarpetproject) podrán ver todas las actividades que se han realizado y se realizarán en torno al proyecto tanto en España (Toledo, Almería, Barcelona, Tarragona, Sevilla, Coruña,…) como en el extranjero (Serbia, Uruguay, Turquía, Suecia, Rumanía, Grecia, Polonia,…).

Notas al pie:

1. En 1904 Hengle von Koch presenta el *Copo de Koch*, en 1915 Waclaw Sierpinski publica su famoso triángulo y en la década de los años veinte Gaston Julia estudia los fractales que llevan su nombre.

2. En [2] se define un objeto fractal como aquellos en los que "su dimensión de Hausdorff – Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica".

3. Puede ampliarse la información sobre el mismo en https://topologia.wordpress.com/2014/05/20/fractales-en-la-12a-feria-de-la-ciencia-de-sevilla/

4. El formulario de inscripción se encuentra en la página web del proyecto https://topologia.wordpress.com/sierpinski-carpet-project/. Una vez registrado el Centro educativo, se le envían por correo postal las pegatinas necesarias, una copia de las plantillas, así como un díptico resumen de la actividad.

Referencias Bibliográficas:

[1] Mandelbrot, Benoît (1997): "La geometría fractal de la naturaleza" Tusquets Editores, Barcelona (España)

[2] Mandelbrot, Benoît (1987): "Los objetos fractales: forma, azar y dimensión" Tusquets Editores, Barcelona (España)

[3] Sierpinski, W (1916) Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoquet et continue detoute courbe donée.C.R. Acad. París pág 629-632

[4] http://web.mst.edu/~wjcharat/JJC/publications/p138.pdf