MODELACIÓN MATEMÁTICA DEL ALCANCE EN KARATE A TRAVÉS DEL ÁNGULO DE UNA PATADA

Elaborado por:

Mariana Ramírez Morales

Juan Esteban Ortiz Mójica

Jesús Iván Herrera Osorio

Con preámbulo y asesoría de:

John Freddy Ramírez-Casallas

Trabajo realizado como parte de un proyecto de exploración de intereses de los estudiantes a través de la modelación matemática

INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA LA SAGRADA FAMILIA

Ibagué, julio de 2020

TABLA DE CONTENIDO

Página

UN PREÁMBULO NECESARIO

John Freddy Ramírez-Casallas jfrcasallas@gmail.com

Cuando culminamos con Mariana la revisión y edición final del presente documento en los último días[1], al pensar en publicarlo en mi cuenta de Researchgate me preguntaba: ¿cuáles serían las preguntas que puede hacerse un profesor como yo?, también interesado en lograr que los estudiantes de su escuela logren trabajos similares. ¿Bastaría con simplemente publicar el documento sin aportar alguna información esclarecedora sobre su historia?

Esta inquietud surge del constatado hecho de que muchas veces accedemos a trabajos sobresalientes de los estudiantes, pero pocas veces sabemos cuáles han sido los principales obstáculos a sortear. Y es indudable que, incluso en el mejor de los casos, los obstáculos estuvieron o siguen presentes. Tales condiciones hacen necesario aportar una descripción, aunque mínima, de los diversos obstáculos que hemos debido enfrentar. De aquí que haya considerado este preámbulo como necesario, ya que aportar información sobre la posibilidad de estos sucesos puede contribuir a que otr@s profesor@s obtengan información que les permita construir itinerarios de acción, de prácticas fundamentadas, de hipótesis renovadas, que nos ayuden a abrir caminos alternativos y/o de mayor logro en la formación de las personas que llegan a nuestras aulas de clase.

El proyecto de modelización en la clase de matemáticas

Mariana, Juan Esteban y Jesús Iván hacen parte de un grupo de estudiantes, de un total aproximado de 70, con los que iniciamos un trabajo de innovación e investigación de la práctica en el área de matemáticas desde el año 2016. Este proyecto, desde sus inicios, se ha concebido desde una perspectiva en la que el proceso de modelización matemática se ha convertido en un componente central de los procesos de experimentación curricular (Porlán y Rivero, 1998). En los últimos cuatro años hemos probado varias hipótesis curriculares y se han construido diversas actividades buscando el desarrollo de los estudiantes, siempre bajo la hipótesis de ambientalizar del currículo escolar (Cañal, Pozuelos, Travé, 2005).

[1] En parte, aprovechando la actual temporada de confinamiento en Colombia a causa del COVID-19, ya con tres meses y medio a inicios del mes de julio de 2020 y con la facilidad de convivir con Mariana todos los días, ya que es mi hija.

La evolución de estos grupos de estudiantes -desde sexto a noveno, y con los cuales fue posible iniciar un Club de ciencias[2]- y las actividades lideradas por el profesor y compañero de área, Juan Pablo Pérez, con las jornadas de trabajo con estudiantes de grado once, nos ha dado los ingredientes necesarios para trabajar en la formulación de un programa de Profundización en Matemáticas y Ciencias en la que pudiesemos trabajar en fortalecer el desarrollo de los talentos de nuestros estudiantes (Ramírez-Casallas, 2018a). Así, este programa de la media, busca consolidar esfuerzos que se venían dando desde la base, pero siempre bajo la premisa de que es necesario aprender por gusto, con pasión, y no por el obligado requerimiento que hace un profesor.

Estudiantes y profesores: dos posiciones diferentes sobre las tareas escolares (hipótesis explicativas contextuales)

En el transcurso de los tres primeros años (sexto a octavo), he puesto a prueba varias hipótesis con ayuda de los estudiantes.[3] Para el grado octavo logramos consolidar una primera identidad como equipo de ciencias. En memoria a una ranita, bautizada *Foxy* por los estudiantes, que fue salvada en el patio del colegio por varios estudiantes, y la que Mariana adoptó para llevarla a casa, con tan mala fortuna que allí se perdió, construimos un logo (figura 1) que nos identificaría como equipo de trabajo.

Figura 1. Logo símbolo del grupo, basado en Foxy.[4]

Autora: Mariana Ramírez Morales

El inicio de grado noveno se anunciaba como un momento de consolidación de este proceso. Con una página en Facebook, intentamos invitar a estudiantes de otros grados para que participaran de este proceso[5]. Además, la disposición de

[2] Con estos estudiantes, a su ritmo y motivados por sus intereses, iniciamos un equipo de rescate animal que se orientó a trabajar con el objetivo de rescatar y cuidar animales heridos que fueron encontrados al interior del área que ocupan las instalaciones del colegio, en la sede central.

[3] Es una historia que espero sistematizar y empezar a contar como sistema observador (Maturana, 2004).

[4] Abrimos una página con este nombre en Facebook, pero realmente hasta el momento su impacto ha sido pequeño. A continuación, en el texto, se verán parte de las razones que creo explican que esto haya sido así. Enlace a la página: https://www.facebook.com/Foxy-120376448801378

[5] De hecho, empecé a usar Facebook para ubicar materiales de trabajo a desarrollar con otros estudiantes, como es el caso de videos que nos permitieran modelar la movilidad de los estudiantes a la salida del colegio y el uso que hacían o no del puente peatonal que se encuentra al lado del colegio. Con niños de séptimo grado, la cuestión a resolver matemáticamente era: ¿existe un riesgo real al pasar la avenida o es mejor usar el puente peatonal? *Los debates con los niños de séptimo fueron un goce, el problema es que algunas*

todo el grupo de profesores del área de ciencias de nuestra jornada fue siempre positiva. A la par era posible, gracias a los antecedentes de los tres años anteriores, abordar una etapa de modelización matemática más madura en el curso regular de matemáticas que dirigía en noveno grado (año 2019). De allí que era posible formular algunas ideas básicas sobre el proceso de modelación matemática, con el objetivo de que este planteamiento fuese articulador en el desarrollo de las actividades de todo el año (Ramírez-Casallas, 2019).

En los primeros meses del año se verificó que este suceso posible no fue más que un espejismo. La cantidad de tareas y su frecuencia[6] me llevaron a considerar que seguir convocando a los estudiantes a reuniones del equipo de ciencias, para rescatar animales o realizar un ecomapa de nuestro ecosistema, pasaría por lograrse a costa de presionar a los estudiantes. Lo pensé muchas noches, hasta que tomé la decisión de jugármela por trabajar con los estudiantes que tenía a cargo en los dos grupos de noveno grado.

De aquí surgió el trabajo en el diseño de una jaula de rescate (tenía varios estudiantes que les gustaba el diseño) y evolucionó hacia un *proyecto opcional* en el que, aprovechando los intereses de los estudiantes y el material de apoyo sobre modelación matemática, articulador del trabajo de todo el año, nos daríamos a la tarea de modelar diversos fenómenos y responder preguntas diversas: ¿cómo se modela la trayectoria de un satélite terrrestre?, ¿cómo lanzar mejor el balón en basquetbol?, ¿cómo golpear adecuadamente la pelota en tenis?, ¿cómo comprender el intercambio de información entre los estudiantes del grupo y comprender cuáles variables se pueden trabajar para mejorar la construcción de conocimiento al interior del curso?, ¿cuál es el alcance que se debe tener al lanzar una patada en karate?, etc. Fueron veinte interesantes proyectos en total. De todos ellos, aquí estoy escribiendo el preámbulo para uno de ellos, el único que los estudiantes lograron entregar debidamente avanzado como para hacer los últimos retoques.

Este nivel de logro, me lleva a considerar relevante que deba que exponer mis propias explicaciones, perspectiva de un sistema observador (Maturana, 2004). Depende de cómo se vea, lograr 1/20 de los trabajos finalizados puede considerarse un éxito o un fracaso; pero cuando somos parte de las realidades

semanas después vi a algunos niños pasando la avenida a pie, sin usar el puente, a pesar que habían aceptado que hacer esto representaba un alto riesgo para su propia vida.

[6] Debo declarar aquí que considero que, si en el colegio se da un trabajo fuerte, aprendemos día a día, las tareas para la casa son solamente necesarias para aquellos niños que no han aprovechado el tiempo dedicado a las clases. Es un principio de trabajo que ha venido evolucionando con los años. Por otro lado, porque lo que pretendemos es construir en los niños un interés genuino, crítico por las matemáticas y el conocimiento en general.

socioculturales complejas de las que participamos, hoy en día creo que son una simplemente una oportunidad de aprendizaje.

Cuando empecé a cuestionar en clase a los estudiantes sobre cada una de las etapas del proceso de modelización (selección de variables, teoría de apoyo, modelo matemático, solución al modelo, solución al problema real), encontré que 1/20 se quedaron en la selección de variables; 12/20 se quedaron en la exploración de la teoría de apoyo; 6/20 se quedaron en la etapa de construcción del modelo matemático; y tan sólo 1/20 culminó todo el proceso.

¿Por qué este tipo de respuestas, con un trabajo que era de tipo opcional y sobre problemas que eran de interés para los estudiantes? Pregunté, volví a preguntar varias veces. Como patrón recurrente, los estudiantes sostenían frecuentemente que no contaban con mucho tiempo; tenían diversas actividades con las que debían cumplir, y estas serían calificadas inevitablemente. Otros, simplemente no mostraban mucho interés en realizarla. Destaco que los que acudían a la falta de tiempo como una razón, eran estudiantes que se caracterizaban por un alto grado de compromiso hacia las actividades.

En una institución estatal, con un currículo reglado por el estado, fragmentado hasta no más, como observadores externos, hipótesis como: la fragmentación curricular es la causante; el modelo tradicional predomina entre los profesores; la cultura escolar en los colegios públicos colombianos es de este corte, entre otras, son comunes y, de hecho, muy respetadas en la literatura; incluso, me atrevería a decir que son sobre-estimadas.

Como alternativa, y complementaria con la anterior, las hipótesis que he desarrollado, como sistema observador, son un poco diferentes. Como padre de Mariana, por ejemplo, con la posiblidad de ver el problema desde dos perspectivas al menos, encuentro que cada uno -estudiantes y profesores- vemos las realidades de manera diferente. Un profesor como yo, puede orientar dos cursos de matemáticas y otros complementarios, como ética. Puedo preparar tres cursos, lo que ya exige bastante dedicación.[7]

Un estudiante de la institución, el año pasado en noveno grado, recibía 11 asignaturas diferentes (figura 2). Esto implica que el estudiante se ve enfrentado a once formas diferentes de concebir el mundo, teniendo en cuenta el papel protagónico de los profesores al definir sistemas-aula que son singulares y poseen una historia particular (Ramírez-Casallas, 2015).

[7] En áreas como las artísticas este número de cursos puede hacerse exagerado.

En medio, como ocurre en nuestra cultura institucional, aparece la idea de exigir académicamente. Con frecuencia pidiendo a los estudiantes que realicen muchas tareas, las cuales tienen un tiempo definido y con claridad recibirán una calificación. Lo interesante es que este grado de exigencia se define desde cada asignatura; y opera normalmente como a mayor cantidad de tiempo invertido en la tarea, entonces se obtiene una mayor exigencia.

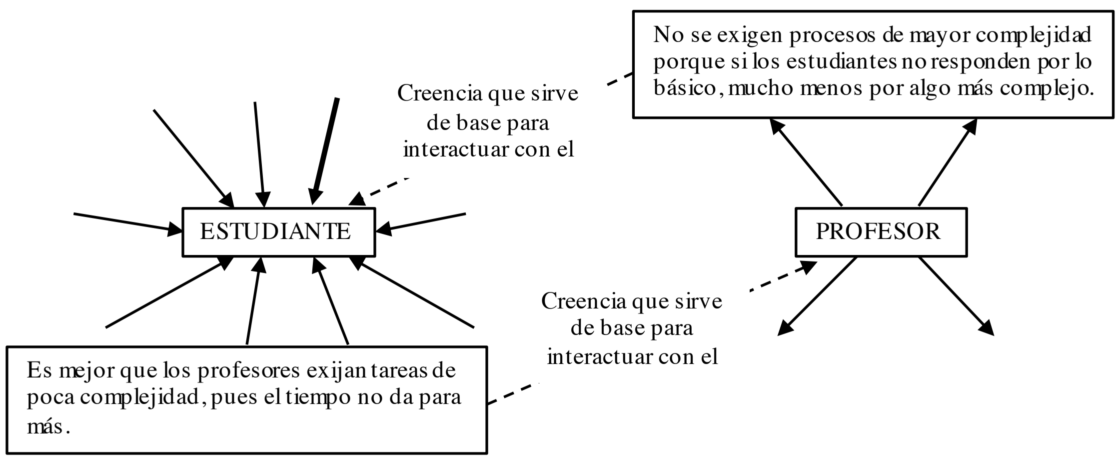


Figura 2. Bucle en el que se complementan creencias recurrentes de profesores y estudiantes en relación con el tiempo, las tareas a realizar y la complejidad de los procesos involucrados. Las flechas continúan representan los cursos que los estudiantes reciben o que los profesores imparten.

Y así ocurrió en noveno grado. Algunos pocos profesores impusieron su idea de calidad académica en esta dinámica (figura 2) y, sin darse cuenta, terminaron por copar el tiempo de los estudiantes. A lo que se suma que, si cada asignatura actúa fraccionando el tiempo de los estudiantes, pues llega un momento en que el tiempo total de los estudiantes -tanto el escolar, como el que es necesario para cubrir todas sus demás actividades en casa y de los grupos con los que mantiene relación- se hace insuficiente. En este contexto, los "buenos estudiantes" son los que necesariamente están dispuestos a sacrificar este tiempo.

Así aparece un bucle que se autorefuerza: por el lado de los estudiantes, es mejor tener tareas de baja complejidad, pero aunque involucran tiempo, se tiene garantía de que se pueden realizar fácilmente, sin requerir tiempo adicional. Por el lado del profesorado, se refuerza la idea de que se deben exigir los procesos básicos; ya que en caso de ser más complejos, entonces la gran mayoría no cumpliría con dichas tareas.

En este marco emergen y se estabilizan creencias que se van arraigando en los estudiantes. *Equivocarse es negativo, todo se debe hacer a la primera.* Tiene sentido, pues si no se tiene tiempo para estar evaluando y reflexionando sobre lo que se hace -como es lo propio en el desarrollo de procesos complejos-, equivocarse para aprender es algo negativo.

Lo anterior genera una paradoja que algunos profesores hemos vivido en carne propia, cuando de estabilizar procesos complejos en los procesos de enseñanza-aprendizaje se trata. *El desarrollo de un proceso complejo se hace poco relevante en términos temporales y poco productivo en términos de calificaciones.* Si la mayoría de tareas se realizan fácilmente, eso sí invirtiendo un tiempo significativo, entonces el desarrollo de un proceso de mayor complejidad es problemático desde esta generalización de la perspectiva de los estudiantes (figura 2). Lo es porque se hace necesario hacer y re-hacer (Roegiers, 2010), reflexionar y autoevaluar lo que se hace; lo que conlleva más tiempo, del que no se dispone. Por otro lado, mientras una gran cantidad de tareas reciben una calificación a la primera, garantizada, el proceso complejo demora en producir calificaciones.

De esta manera, legitimamente, parece que los estudiantes no quieren estudiar más allá de lo necesario y que nosotros los profesores nos esforzamos por dar lo máximo. Igualmente, los estudiantes consideran que dan lo máximo, y así consideran que los profesores damos lo que podemos dar. En el marco de este bucle cada grupo piensa que podemos hacer más, pero que unos y otros estamos casi ante una experiencia que es inevitable: algunos pasan por esta etapa para cumplirla y salir habilitados para la educación superior; otros, agotados de tanto insistir, esperamos que los días pasen inexorablemente, acuñando en nuestros recuerdos las mejores experiencias.

Un problema organizacional, que va más allá de las aulas de clase

Con la perspectiva de áquel que mira desde afuera, tal vez parece fácil usar categorías analíticas como fragmentación curricular, horarios laborales, dotación de recursos, desarrollo profesional de los docentes, etc., para explicar lo que ocurre. Y de hecho, esta es una visión bastante recurrente. Pero ¿qué sucede con los sistemas observadores, con la mirada de aquellos que miramos desde dentro? Lo primero es constatar que estas categorías pueden no ser tan relevantes para aquellos que estamos dentro de esa realidad o que surgen otras posibilidades que eran impensadas.

De forma general, la dinámica que generan las creencias que más predominan en la institución (figura 2) muestran que nuestros pensamientos y formas de actuar, por íntimos que sean, afectan la organización misma.[8] Si tan sólo un profesor

[8] De hecho, he considerado que este enfoque es poco atendido (Ramírez-Casallas, 2018b) desde las visiones académicas más tradicionales (incluso podría decirse más neoliberales); he encontrado afirmaciones

quiere aumentar la exigencia académica en esta línea, bastaría para afectar el trabajo de los estudiantes en las demás asignaturas. Así lo constaté cuando estudiantes inquietos académicamente, comprometidos, me respondían que no tenían mucho tiempo para el desarrollo del proyecto de modelización matemática. Y es precisamente bajo esta idea de lo organizacional, que veo ahora uno de los efectos de trabajar mediante campos de conocimiento que permitan articular toda la propuesta curricular alrededor de los problemas socioambientales que experimenta el planeta Tierra (Ramírez-Casallas, 2018a). Articular las asignaturas lleva a que la fragmentación se reduzca y, por tanto, a que el tiempo necesario en realizar las tareas se reduzca.

A pesar de este hallazgo, lo sorpendente de estar dentro del sistema, en este caso la institución, es que se hace posible identificar nuevas hipótesis de trabajo, donde creía haber visto todo claro. Esta reflexión se derivó de ponencia que presentamos con Mariana el 13 de diciembre de 2019, en el marco de *Simposio en Didáctica de las Ciencias*.[9] Para los asistentes, profesores universitarios y estudiantes de maestría o pregrado, llamó la atención la claridad que Mariana logró en su presentación. Vieron de manera clara cómo desarrolló el modelo y lo pusó en relación con los datos empíricos tomados alrededor de este fenómeno de la patada. Hasta ahí todo encajaba en mi cabeza, incluso lo organizacional. Afortunadamente un asistente, el profesor Néstor Cardoso Erlam,[10] comentó acerca de esta situación y preguntó:

> "…Impresionante la díada que ustedes han conformado como padre-hijo, profesor-alumno, eso sin duda que a mí me emociona. No es usual, yo creo que muy pocas familias tienen esta experiencia que ustedes han tenido. Que la hija acepte al papá como maestro, y que al maestro no le de susto tener a su hija en el salón de clase. […] ¿Qué generó?, ¿qué ha generado esa relación con los compañeros de Mariana?"

Al respecto destaqué que afortunadamente Mariana escucha y confía en las orientaciones que le doy. Y este es un asunto que yo no puedo manejar tan de cerca con un estudiante que no es hijo mío. Agregué otra cantidad de cosas sobre la organización y demás, pero cuando ella me envió el documento revisado, esta sensación y esta pregunta es la que me llevó a plantear este preámbulo como necesario. Debía comunicarlo, aunque me excuso por lo extenso del mismo.

---

similares respecto a lo que ocurre en las instituciones universitarias (Greenwood, 2017), y he fundamentado teóricamente que las aulas se ven afectadas por lo que sucede en la organización (Ramírez-Casallas, 2015).

[9] Organizado por el grupo de investigación en Didáctica de las Ciencias de la Universidad del Tolima; uno de los grupos que soporta la Maestría en Educación que ofrece la Universidad. Ver: http://investigaciones.ut.edu.co/investigaciones/grupos-de-investigacion/22-grupos-de-investigacion/73-didactica-de-las-ciencias.html

[10] Profesor fundador del grupo de Didáctica de las Ciencias.

Así, finalmente, este trabajo que verán a continuación lleva aparejadas preguntas como las siguientes: ¿qué tan importante es la confianza que logran nuestros estudiantes con nosotros como profesores?; ¿esta es tan sólo posible en el marco de una relación del tipo padre-hijo?; siento que otros estudiantes sí me tenían confianza, pero ¿por qué tiene tanto poder esta lógica organizacional (figura 2), al punto que dejaron los procesos de modelación abandonados?, ¿cómo es posible superar esta lógica en beneficio de toda la comunidad educativa?

Referencias

CAÑAL, P.; POZUELOS, F.J.;

TRAVÉ, G. (2005). *Descripción General y Fundamentos*. Proyecto Investigando Nuestro Mundo (6-12). Vol. 1. Sevilla:Díada.

GREENWOOD, D. (2017). Using the democratic past to end neoliberalism in universities: action research, socio-technical systems design, and the global future. *International Journal of Action Research*, 2, 178-190. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/319218106_Using_the_Democratic_Past_to_End_Neoliberalism_in_Universities_Action_Research_Socio-technical_Systems_Design_and_the_Global_Future

MATURANA, H. (2004). *La objetividad. Un argumento para obligar*. Chile: Lom Ediciones S.A.

PORLÁN, R.; RIVERO, A. (1998). *El conocimiento de los profesores*. Sevilla: Díada.

RAMÍREZ CASALLAS, J.F. (2015). Integración de las NTIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Física desde la perspectiva del Modelo de Investigación en la Escuela. Estudio de caso. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla. Disponible en https://hdl.handle.net/11441/72779

RAMÍREZ CASALLAS, J.F. (2018). *Profundización en matemáticas y ciencias naturales. Fundamentos conceptuales y organización curricular*. IET La Sagrada Familia de Ibagué. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/330834641_19A_Proyecto_Profundizacion_19ene19

RAMÍREZ CASALLAS, J.F. (2018b). Experiencia del profesor de matemáticas como investigador. Problemáticas, obstáculos al desarrollo profesional (auto-análisis de caso). *Encuentro de egresados*. Universidad del Tolima, 2010. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/327822088_EXPERIENCIA_DEL_PROFESOR_DE_MATEMATICAS_COMO_INVESTIGADOR_PROBLEMATICAS_OBSTACULOS_AL_DESARROLLO_PROFESIONAL_AUTO-ANALISIS_DE_CASO

RAMÍREZ CASALLAS, J.F. (2019). *La modelación matemática*. IET La Sagrada Familia de Ibagué. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/330839819_La_modelacion_matematica

ROEGIERS X. (2010) *Una pedagogía de la integración. Competencias e integración de los conocimientos en la enseñanza*. México: Fondo de Cultura Económica.

MODELACIÓN MATEMÁTICA DEL ALCANCE EN KARATE A TRAVÉS DEL ÁNGULO DE UNA PATADA

Mariana Ramírez Morales[11] marianaramirezmorales@gmail.com

Juan Esteban Ortiz Mojica jortiZ4567@hotmail.com

Jesús Iván Herrera Osorio jesusivanherreraosorio@gmail.com

INTRODUCCIÓN

La experiencia deportiva en karate enseña que es necesario usar diferentes modalidades de combate y kata. En estos es necesario equilibrar la fuerza con la velocidad y la distancia al rival para hacer un buen ataque. El ataque se hace usando las piernas y las manos de manera lineal (Kanazawa, 2007).

Figura 1. Ejemplos de desplazamiento lineal en el entrenamiento de Mariana (persona 1).

En especial, la dificultad para hacer una patada en karate es grande. La experiencia personal[12] muestra que se ha de pasar por un proceso para lograr una buena patada, que se caracteriza por realizarse con flexibilidad, potencia, velocidad, equilibrio del pateador mientras se hace la rotación de la cadera y se logra la precisión de la misma (*hacer foco*).

[11] Estudiantes de noveno grado de básica secundaria, de la IET La Sagrada Familia de Ibagué, en el año 2019.

[12] En este caso se refiere a la primera autora, quien entrena karate Shotokan en la ciudad de Ibagué.

En la etapa actual, la preocupación se centra en lograr una distancia adecuada respecto al rival para lograr una excelente patada con la punta del pie. Con este propósito, analizaremos matemáticamente cómo obtener un alcance adecuado cuando se da una patada dependiendo de la altura a la que se quiere llegar.

En el campo matemático se tienen fases para hacer una buena modelación de diferentes fenómenos. Las cuales son (Carriazo, Fernández y Núñez, 2010; citado en Ramírez-Casallas, 2019):

Fase	¿En qué consiste?	Respuesta en este problema
Planteamiento de la pregunta sobre fenomeno de la vida real.	Aquí se trata de elegir el problema a resolver sobre un fenómeno de interés.	¿Cómo subir la pierna a una altura que permita precisión al llegar a un foco y a la vez mantener una distancia adecuada a un rival?
Modelización del fenómeno para obtener un modelo matemático.	Se comprende el fenómeno y se selecionan las variables relevantes.	Las variables tomadas son longitud de la pierna del pateador, altura de foco, distancia del atacante al rival, ángulo que forma la pierna con la línea horizontal.
Solución del modelo y teoría matemática usada.	En esta parte se relacionan las variables relevantes entre ellas mediante una teoría, con el objetivo de llegar a una solución.	Para relacionar las variables relevantes entre ellas usamos la geometría del fenomeno, por ello aprovechamos las relaciones trigonométricas de Seno y Coseno.
Traducción al mundo real y solución del problema real.	En esta parte se comparan los resultados del modelo teórico con los de la vida real, para saber si la solución es buena.	Para comparar los resultados teóricos con los de la vida real, tomamos las medidas de distancia y ángulo de patadas de cuatro compañeros. Al final se comparan los resultados y se valora si la solución es buena.

1. COMPRENSIÓN DEL FENÓMENO A MODELAR Y SELECCIÓN DE VARIABLES RELEVANTES

Para comprender este fenomeno, es necesario saber qué es importante para hacer una buena patada en karate. Según el Sensei Juan David Gómez, para hacer una buena patada es necesario tener una buena pocisión de base o inicio, conseguir buena aceleración para hacer la técnica, poseer dinámica de cadera para multiplicar la fuerza del ataque, así como para mantener equilibrio en el cuerpo, y al final terminar con una posición baleanceada para no caer.

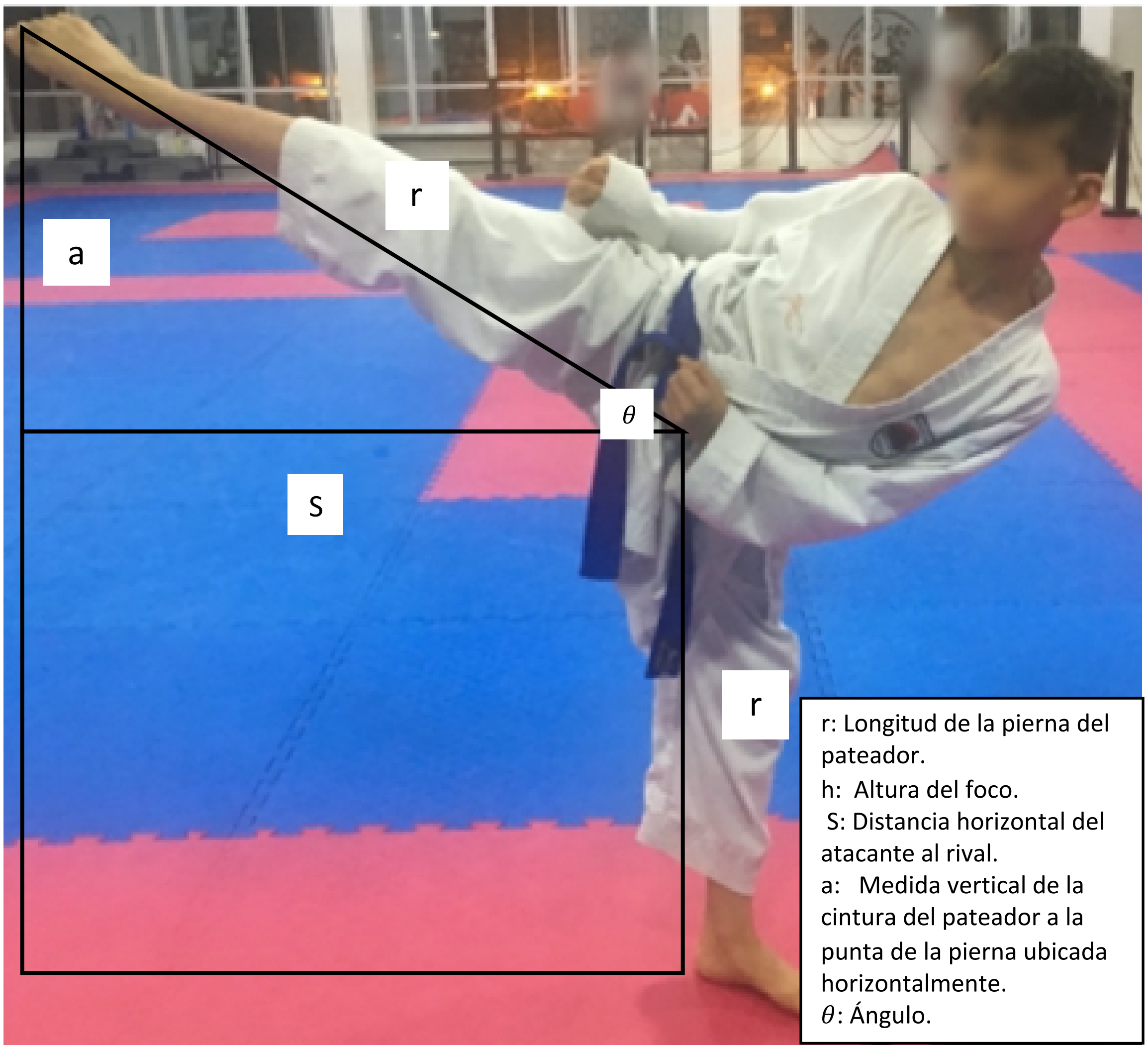


Figura 2. Identificación de las variables en la patada a modelar (persona 2, el hermano de Mariana).

De todo lo dicho anteriormente, nosotros solo nos vamos a centrar en modelar específicamente para resolver la siguiente pregunta: ¿Cómo subir la pierna a una altura que permita precisión al llegar a un foco y a la vez mantener una distancia adecuada a un rival?

Las variables relevantes en nuestro fenómeno son: (i) la longitud de la pierna [r] porque nos muestra el máximo alcance horizontal que puede tener un pateador; (ii) la altura vertical a la que debe llegar la pierna del pateador para alcanzar un foco [h=r+a] porque se relaciona con la altura del rival (h); (iii) la distancia al rival [S], ya que en ataques de pierna asegura un buen espacio para hacer una técnica directa. Así, no se deja pensar al rival en contratacar y se puede salir fácilmente de la guardia del contricante, haciendo que el alcance del ataque sea más efectivo.

(iv) La medida vertical [a], desde la horizontal que pasa por la cintura del pateador hasta el extremo de la pierna. Por último, (v) el ángulo [θ] que forma la línea que pasa por la pierna del pateador con la línea horizontal de longitud S.

2. TEORÍAS USADAS EN LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

En el modelo se forma un triángulo rectángulo entre tres lados [a, S y r], de longitud variable, representados en la imagen anterior. Entonces vamos a usar el Seno y Coseno (Sen y Cos) de un ángulo en el trianguló rectángulo. En trigonometría el Seno y Coseno consisten en la división de un triángulo rectángulo en sus lados, como se muestra en la siguiente figura.

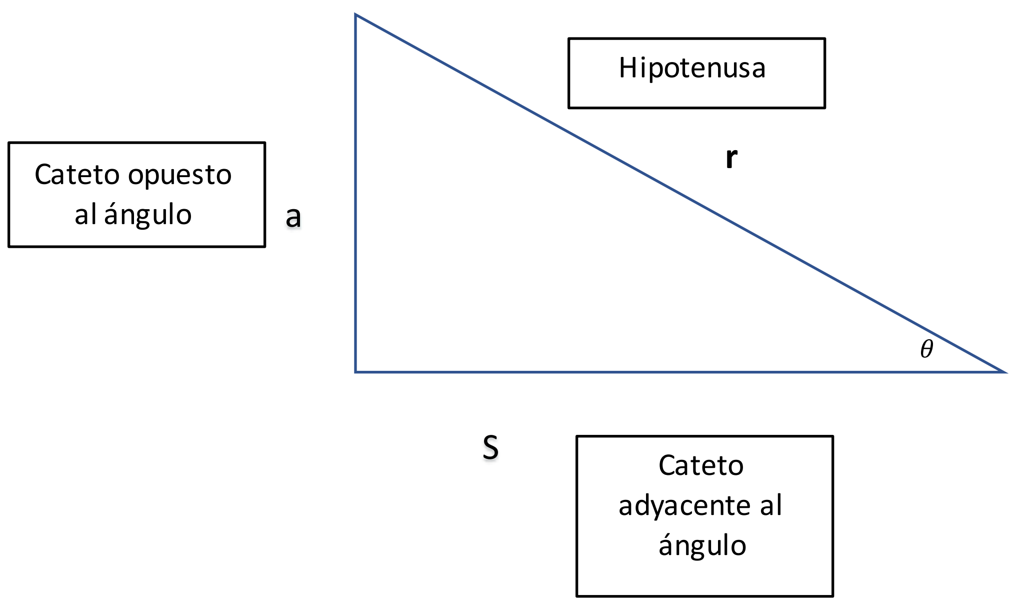


Figura 3. Asociación entre catetos del triángulo rectángulo y variables necesarias para modelar la patada, de acuerdo con el ángulo θ.

Seno del ángulo**:** Es la proporción resultante de la división del cateto opuesto del ángulo entre la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

$$sen\ \theta = \frac{cateto\ opuesto\ al\ ángulo}{Hipotenusa}$$

$$sen\ \theta = \frac{a}{r}$$

Coseno del ángulo**:** Es la proporción resultante de la división del cateto adyacente del ángulo entre la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

$$cos\theta = \frac{cateto\ adyacente\ al\ ángulo}{hipotenusa}$$

$$cos\theta = \frac{s}{r}$$

3. RELACIÓN DE LAS VARIABLES DEL MODELO CON LA TEORÍA

Como vimos anteriormente, tenemos un triángulo rectángulo entre tres lados [a, S y r], de longitud variable, representados en la figura 2. Sabiendo h, ¿cómo es posible hallar el valor de a?

Para hallar la a

Para hallar el valor de a debemos restarle a h, la altura del contrincante, la longitud de r.

h – r = a

Para hallar θ

Ya teniendo a, usamos el seno θ para averiguar el ángulo al que debe estar la pierna del atacante para llegar a la altura del rival. Con este despeje, relacionando la variable a y r como lados del triángulo rectángulo (Figura 3).

$sen\ \theta = \frac{cateto\ opuesto\ al\ ángulo}{Hipotenusa}$	Cambiamos valores
$sen\ \theta = \frac{a}{r}$	Para hallar el ángulo de $sen\ \theta$ debemos aplicar a los dos Lados sen^{-1}.Ya que sen^{-1} nos ayudar a despejar del $sen\ \theta$ solo el ángulo.
$sen^{-1}(sen\theta) = sen^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$	Esto da igual al valor del ángulo, o sea θ
$\theta = sen^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$	Resultado final.

Para hallar S

Para hallar la distancia de un atacante al rival vamos a usar la función Coseno $\boldsymbol{\theta}$ de la siguiente manera: Relacionando la variable s y r como lados del triángulo rectángulo (Figura 3).

$cos\theta = \dfrac{cateto\ adyacente\ al\ ángulo}{hipotenusa}$	Cambiamos valores.
$cos\theta = \dfrac{s}{r}$	Para poder dejar la s sola en el lado derecho, ya que está dividida en r, multiplicamos a ambos lados por r.
$r.cos\theta = \dfrac{s}{r}.r$	Es igual a s.
$r.cos\theta = s$	Resultado.

Modelo Matemático Final

Ya habiendo despejado las variables y relacionándolas con seno y coseno, queda la siguiente secuencia de despeje:

r	h	h-r=a	$\theta = sen^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$	$r.cos\theta = s$

4. USO TEÓRICO DEL MODELO MATEMÁTICO

En el caso usamos el modelo matemático para hacer pruebas teóricas a la persona número 1 (Mariana, figura 1) y 2 (Juan Andrés, figura 2). Así que le medimos a las dos personas la longitud de su pierna, desde la punta del pie a la cintura (r). Como la longitud de la pierna del pateador en el modelo es constante, fijamos unos parámetros de altura de los posibles contricantes (h), a los cuales el pateador, teóricamente, alcanzaría a patear. Luego hallamos los resultados de la ecuación en la modelación, para hallar a S y $\boldsymbol{\theta}$.

r	h	h-r=a	$\boldsymbol{\theta = sen^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)}$	$\boldsymbol{r.cos\theta = s}$
0,91 m	1,60 m	0,69 m	49,30 º	0,59 m
0,91 m	1,50 m	0,59 m	40,41 º	0,69 m
0,91 m	1,40 m	0,49 m	32,57 º	0,76 m
0,91 m	1,30 m	0,39 m	25, 37 º	0,82 m

Tabla 1. Valores teóricos de S, con la persona 1, para valores hipotéticos de la altura del contrincante.

r	h	h-r=a	$\boldsymbol{\theta = sen^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)}$	$\boldsymbol{r.cos\theta = s}$
0,84 m	1,40 m	0,56 m	41,81º	0,62 m
0,84 m	1,30 m	0,46 m	33,20º	0,70 m
0,84 m	1,20 m	0,36 m	25,37 º	0,75 m
0,84 m	1,10 m	0, 26 m	18,03º	0,79 m

Tabla 2. Valores teóricos de S, con la persona 2, para valores hipotéticos de la altura del contrincante.

5. MODELO USADO EN LA VIDA REAL

A fin de medir en la vida real el ángulo y la variable S, dejamos que la persona se ubique sin medir conscientemente su propia distancia para patear al foco de la altura necesitada (medida y marcada verticalmente). La distancia se mide directamente del pateador al rival mientras el atacante hace la patada. Luego se toma una foto del ataque estático del pateo al rival y se le toma el ángulo de pateo al pateador.

r	h	h-r=a	$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{s}$
0,91 m	1,60 m	0,69 m	30 º	1,11 m
0,91 m	1,50 m	0,59 m	29 º	1,03 m
0,91 m	1,40 m	0,49 m	20 º	0,94 m
0,91 m	1,30 m	0,39 m	17 º	0,965 m

Tabla 3. Valores experimentales de S, con la persona 1, para valores de la altura del contrincante marcadas verticalmente con el fin de orientar el pateo.

r	h	h-r=a	$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{s}$
0,84 m	1,40 m	0,56 m	34 º	1,00 m
0,84 m	1,30 m	0,46 m	30 º	0,94 m

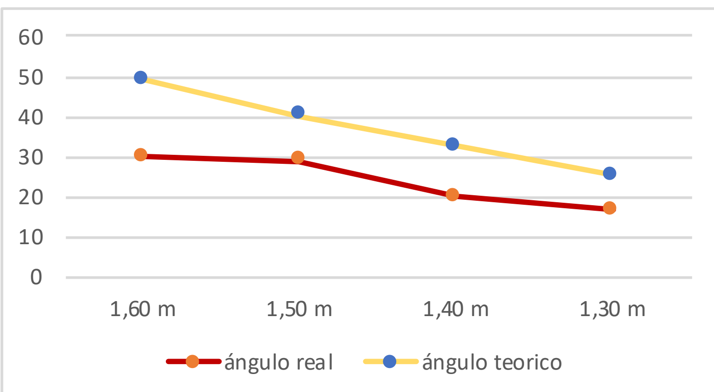
0,84 m	1,20 m	0,36 m	24 º	0,93 m
0,84 m	1,10 m	0,26 m	20 º	0,88 m

Tabla 4. Valores experimentales de S, con la persona 2, para valores de la altura del contrincante marcadas verticalmente con el fin de orientar el pateo.

6. ANALISIS DE GRÁFICAS SEGÚN LOS DATOS RECOGIDOS: TEÓRICOS Y REALES

En el caso de la persona numero 1 (figura 4), se puede notar que los resultados teóricos y reales tienen mucha diferencia entre sí.

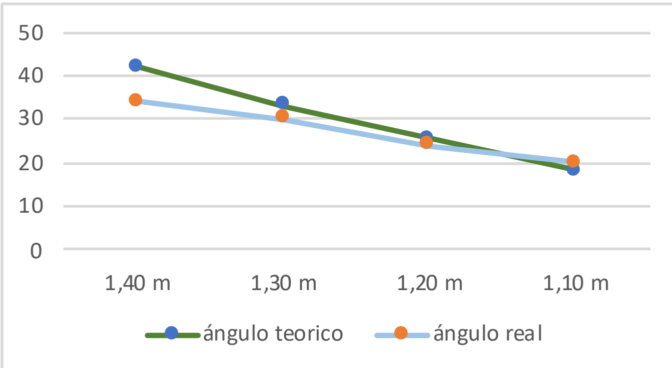
Cuando el foco sea de 1,60 m, el valor teórico del ángulo $\boldsymbol{\theta}$ se supone teóricamente que debería ser de 49,3º. Pero realmente, la persona pone su pierna a 30 º para alcanzar a un foco de 1,60m. Diferencia de 19,3 º entre los dos anteriores resultados.



altura del foco a patear	ángulo teorico (º)	ángulo real(º)
1,60 m	49,3	30
1,50 m	40,41	29
1,40 m	32,57	20
1,30 m	25,37	17

Figura 4. Representación de los valores teóricos y experimentales del ángulo θ obtenidos para la persona 1.

Lo anterior tambien se puede notar cuando disminuye la longitud de los focos. Cuando el foco sea de 1,50m, el valor teórico de θ es de 40,41º. En cambio, el ángulo θ en la vida real fue de 29º, con una diferencia de 11,41º entre los dos resultados. Luego, cuando el foco llega a ser de 1,40m, el valor teórico de θ es de 32,57º. Sin embargo el valor de la vida real es de 20º; 12,57º de diferencia entre los dos resultados. En el caso, cuando el foco se volvió de 1,30m, el valor teórico de θ es de 23,37º. No obstante el valor del ángulo en la vida real es de 17º; con una diferencia de 6,37º entre los dos resultados.



altura del foco a patear	ángulo teorico (º)	ángulo real(º)
1,40 m	41,81	34
1,30 m	33,2	30
1,20 m	25,37	24
1,10 m	18,03	20

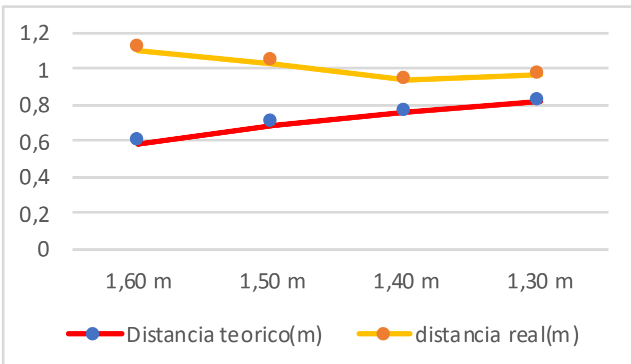
Figura 5. Representación de los valores teóricos y experimentales del ángulo θ obtenidos para la persona 2.

En el caso de la persona número 2, se puede notar a simple vista en la gráfica que los valores del ángulo θ, siendo teóricos o relales, son muy parecidos enre sí.

Cuando el foco tenga una longitud de 1,40º, el valor del ángulo θ teóricamente será de 41,81º. Sin embargo, el ángulo de la vida real tuvo una medida de 34º. A diferencia de la persona número 1, los resultados de la persona número 2 no tienen mucha diferencia; en el caso de que el foco sea 1,40m, la diferencia entre el resultado teórico y real es de 7,81º.

Luego, cuando el foco empieza a bajar su longitud, aumenta la precisión del modelo teórico en cuanto el resultado real. Se nota menos diferencia entre los dos resultados. Cuando el foco tiene una longitud de 1,30m, el valor del ángulo θ teóricamente es de 33,2º. Pero el valor del ángulo realmente es de 30º; 3,2 º de diferencia entre el valor teórico y el valor real del ángulo. Después, cuando la longitud del foco se vuelve de 1,20m, el valor del ángulo θ, teóricamente, es de 25,37º y en la vida real fue de 24º, con una diferencia de 1,37º de diferencia entre los dos resultados. Posteriormente cuando el foco llega a tener una longitud de 1,10m, el ángulo θ, teóricamente, tiene un valor de 18,03º, pero en la vida real el valor del ángulo es de 20º. Entre los resultados teóricos y reales, hay una diferencia de 1,97º.

Al comparar los resultados de la persona número 1 y los de la persona número 2 se puede notar que los resultados de la persona número 1, en cuanto al ángulo de pateo, teóricos y reales son menos congruentes que los resultados de la persona número dos. Esto pudo ocurrir gracias a que a la persona número 1, le faltaba una mayor flexibilidad y control de su cuerpo para patear al foco, entrando en desequilibrio más rápidamente. En cambio, la persona número 2 podía controlar fácilmente su posición para no desequilibrarse y patear con una mejor técnica que la persona 1.



altura del foco a patear	Distancia teorico(m)	distancia real(m)
1,60 m	0,59	1,11
1,50 m	0,69	1,03
1,40 m	0,76	0,94
1,30 m	0,82	0,965

Figura 6. Representación de los valores teóricos y experimentales de la distancia entre el controncante y el pateador (S) obtenidos para la persona 1.

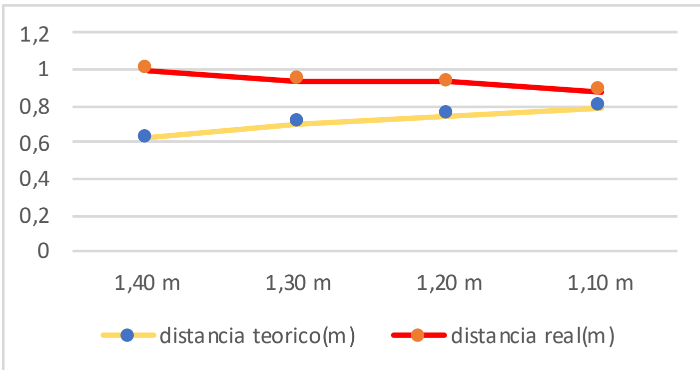
En el caso de la distancia al contricante para patear a cierto foco (S), se puede ver que los valores para la persona número uno también se encuentran más alejados, hay mayor diferencia entre el valor teórico y los de la vida real.

Cuando el foco sea de 1,60m, teóricamente la distancia del pateador al contricante es de 0,59m; en cambio la medida real es de 1,11m. Hay 0,52 m de diferencia entre los dos resultados anteriores.

Luego cuando el foco toma el valor de 1,50m, la distancia (S), teóricamente es de 0,69m. En cambio el resultado de la distancia del pateador en la vida real es de 1,03m. Hay 0,34m de diferencia entre los dos anteriores resultados.

En el momento en el cual el foco tomó una longitud de 1,40m, teóricamente, la distancia(S) toma un valor de 0,76m. Sin embargo, la distancia real tuvo un valor de 0,94m. Hay 0,18m de diferencia entre el valor teórico y real del anterior resultado.

Después, cuando el foco es de 1,30m, la distancia teórica del pateador al contricante es de 0,82m. En cambio la distancia real (S),es de 0,965m. 0,145 m de diferencia entre los dos resultados anteriores.



altura del foco a patear	distancia teorico(m)	distancia real(m)
1,40 m	0,62	1
1,30 m	0,7	0,94
1,20 m	0,75	0,93
1,10 m	0,79	0,88

Figura 7. Representación de los valores teóricos y experimentales de la distancia entre el controncante y el pateador (S) obtenidos para la persona 2.

En el caso de la distancia (S), cuando se miran en comparación los valores teóricos y los reales en la gráfica se puede notar que tienen mucha diferencia entre sí.

Cuando el foco del pateador es de 1,40m, el valor teórico que toma la distancia (S), es de 0,62m. En cambio, en la vida real el valor de la anterior distancia es de 1m. Hay 0,38m de diferencia entre los dos resultados anteriores.

En el momento que el foco disminuye a 1,30m, el valor teórico de la distancia (S), pasa a ser de 0,7m. Sin embargo, la distancia del pateador al foco es de 0,94m. Hay 0,24m de diferencia entre los dos anteriores resultados.

Después, cuando el foco llega a ser de 1,10m, el valor teórico de la distancia (S), es de 0,75m, el valor de la distancia real es 0,93. Teniendo de diferencia etre los dos anteriores resultados 0,18 m.

El foco, al ser de 1,10m, la distancia del pateador al contrincante teóricamente es de 0,79m. En cambio, en la vida real, el valor de la distancia anterior es de 0,88 m. Teniendo una diferencia de 0,09m de distancia entre los dos resultados.

Como se puede observar en los anteriores dos casos de la persona número 1 y 2, la distancia del pateador al foco (S), teóricamente disminuye cada vez que el foco es más alto y crece cuando el valor del foco se hace más bajo. Lo anterior, comparado con los valores tomados en la vida real de S, no coincidieron de una manera muy cercana en la mayoría de los casos. Ya que en este caso, en el modelo matemático pudo haber hecho falta otra variable para que los resultados teóricos fueran más parecidos en la vida real.

La variable que pudo haber hecho falta, para hallar más precisamente la variable S, es el alcance que le da al pateador el movimiento de la cadera. Ya que dependiendo de la ubicación de la cadera del pateador, este puede ganar más distancia al foco; sin necesidad de moverse de su lugar de pateo.

CONCLUSIONES

Como primera conclusión, nos podemos dar cuenta que el modelo matemático desarrollado es mucho más preciso para hallar el ángulo al que debe patear una persona para llegar a un foco, sin dependencia de su distancia. Ya que para averiguar la distancia de una persona a un foco más presisamente, debemos tener en cuenta otros aspectos del movimiento del pateador, que no necesariemente tiene que ver solo con la longitud de sus piernas. Entonces, podemos considerar que en este caso, con los aspectos relevantes tomados desde el inicio para crear el modelo matemático, es correcto y más presiso para hallar el ángulo al que debe patear una persona para llegar a cierto foco.

Además, se puede notar que los valores de la vida real de cada pateador, támbien dependen de la flexibilidad, estabilidad y potencia que estos tengan para ejecutar la técnica.

En conclusión, si consideramos que el modelo es correcto, la distancia entre los valores teóricos y las mediciones reales son más precisas cuando la persona que hace la patada es capaz de estabilizar bien su pierna al llegar al foco y tener una buena flexibilidad para llegar a tener un buen alcance para que no se le caiga el pie. En el caso de la persona número uno, nos dimos cuenta que el espacio tan grande entre los valores teóricos con los reales en el ángulo como el la distancia, fueron causados gracias a que la persona no podía sostener su pierna en el foco, ni lo alcanzaba con la punta del pie, por ello tuvo que acercarse o alejarse más del foco desproporcionadamente. De esto concluimos que la persona debe mejorar su flexibilidad, como también la fuerza en las piernas. En cambio, los valores teóricos con los reales en el ángulo como en la distancia de la persona numero dos tuvo resultados máas cercanos. Lo que concluimos de la persona número dos es que tiene muy buena flexibilidad, potencia y posición que permiten un buen alcance de la pierna.

REFLEXIONES

En la modelización realizada se mostró cómo los valores teóricos fueron muy aproximados a los resultados de la persona número 2. Sin embarg, la persona número uno tenía menos alcance que la número 2 para patear un foco, por lo cual los valores de la número 1 no se parecen mucho a los resultados del modelo teórico. Cuando hablamos de los valores de la distancia comprobamos que nuestro modelo matemático era estático, porque para que el modelo de la distancia teórico fuera más real se le tendría que agregar cómo varía el desplazamiento de cadera al hacer el ataque; ya que la cadera le permite ganar más distancia y alcance a un pateador contra un rival.

REFERENCIAS

Kanazawa, H. (2007). *Karate para cinturón negro. Curso intensivo.* Madrid, España: Ediciones Tutor.

Ramírez-Casallas, J. F. (2019). *La modelación matemática.* IET La Sagrada Familia de Ibagué. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/330839819_La_modelacion_matematica