Un ejemplo de trabajo de investigación de Matemáticas en Bachillerato

María Trinidad Cámara Meseguer; Concepción Domínguez Sánchez

email: trinidad.camara@murciaeduca.es; conchi.dominguez94@gmail.com

IES Juan Carlos I de Murcia; estudiante de la Facultad de Matemáticas en la Universidad de Murcia

RESUMEN

Presentamos en esta comunicación un ejemplo de trabajo de investigación realizado en bachillerato, en la asignatura de matemáticas, dentro de la modalidad de bachillerato de investigación. En este bachillerato se completa la formación de los alumnos con un acercamiento a diferentes métodos de investigación científica y al análisis de los problemas propios de cualquier investigación, atendiendo de esta forma a la diversidad. En concreto, en este trabajo, tradujimos, clasificamos y analizamos, desde la perspectiva actual, las 53 proposiciones de las que consta el libro *Propositiones ad acuendos iuvenes* de Alcuino de York, del siglo VIII.

Bachillerato de Investigación, Historia de las Matemáticas, Alcuino.

Un ejemplo de trabajo de investigación de Matemáticas en Bachillerato

Introducción

En la Comunidad de Murcia, desde el curso 2007-08, existe una modalidad de bachillerato llamada de Investigación. La Orden de 27 de julio de 2009 del BORM, por la que se regula la Organización de esta modalidad de bachillerato a partir del curso escolar 2009-2010, lo define como

> [...] un programa experimental educativo dirigido al alumnado de Bachillerato que tenga o muestre especial motivación para profundizar en el conocimiento científico, humanístico, técnico y artístico, en los diferentes métodos de investigación científica y en el análisis de los problemas propios de cualquier investigación

En el artículo 2 de esta misma orden se indica la finalidad de este bachillerato:

> El Bachillerato de Investigación pretende conciliar la formación generalista imprescindible, que es el objetivo del Bachillerato, con la capacidad para ahondar en el conocimiento y la práctica de la investigación en su más amplio sentido. […], el Bachillerato de Investigación contribuirá a:
>
> a) Promover la vocación del estudiante hacia la investigación científica, humanística, técnica o artística, mediante una metodología que le facilite la incorporación y adaptación a la enseñanza universitaria.
>
> b) Favorecer una mentalidad científica, rigurosa, ordenada, crítica.
>
> c) Proporcionar una relación más estrecha entre el profesorado y el alumnado en aras a la elaboración de investigaciones de forma conjunta.

A nivel estructural existen varias diferencias entre este bachillerato y las otras modalidades de bachillerato, dos de las cuales son:

> En 1.° de bachillerato, los alumnos tienen dos asignaturas optativas, una de las cuales se llama Iniciación a la investigación y cuenta con 3 horas lectivas a la semana.
>
> En 2.° de bachillerato, los estudiantes tienen la obligación de realizar un proyecto de investigación individual asociado a una asignatura de modalidad.

Este bachillerato se imparte actualmente en quince centros de la región. Uno de estos centros, es el nuestro, el IES Juan Carlos I.

En nuestro instituto los alumnos realizan dos proyectos de investigación; el primer proyecto, en 1.° de bachillerato, se realiza en grupo de unos tres alumnos, es de tema libre y está codirigido entre el profesor de Iniciación a la Investigación y el de la asignatura relacionada con el tema escogido. El otro proyecto de investigación se realiza de forma individual, en 2.° de bachillerato, sobre un tema relacionado con una materia de modalidad y dirigido por el profesor que imparte dicha materia.

Desde el departamento de matemáticas hemos dirigido, hasta el curso 2013-14, 28 proyectos, de los cuales cuatro han sido grupales y 24 individuales. Estos trabajos han tratado temas muy diversos como: el estudio de algunas propiedades de la elipse, el análisis de las matemáticas que utiliza la medicina en sus investigaciones, la resolución de algunos *sangakus* y su aplicación al aula, la búsqueda de polígonos en la naturaleza o frisos en partituras musicales, el estudio de la tipología de los problemas aparecidos en las olimpiadas matemáticas españolas y los métodos de resolución que más utilizan, el análisis de los aspectos matemáticos de algunas obras cinematográficas como *Proof* o *Los crímenes de Oxford*, etc.

En esta comunicación presentamos uno de estos trabajos, titulado «Libros para aprender matemáticas en el siglo VIII: *Propositiones ad acuendos iuvenes.* Alcuino de York» [5]. Este trabajo fue realizado por Concepción Domínguez Sánchez durante el curso 2011-12, como trabajo individual en 2.° de bachillerato, y tuvo como tutora a M.ª Trinidad Cámara Meseguer.

El trabajo consistió en la traducción de las 53 proposiciones de las que consta esta obra y su análisis. Las proposiciones se tradujeron al español partiendo de una versión en francés de Charles-É. Jean [6], y posteriormente se comparó esta traducción con la versión original, escrita en latín, de Sarcone y Waeber [8]. El análisis consistió en comparar tanto los enunciados como los métodos de resolución con los que se utilizan actualmente, en determinar el nivel educativo en el que se plantean estas proposiciones hoy día y en realizar una búsqueda de algunas de estas proposiciones en bibliografía actual e incluso en internet.

El trabajo se completó con dos apartados más en los que se presenta un resumen de algunas recopilaciones de problemas anteriores a esta obra y una breve biografía de Alcuino de York.

Manuscritos de problemas divulgativos y/o prácticos anteriores al siglo VIII

Según algunos autores como Bell [2], Boyer [3] y Collette [4], las primeras recopilaciones de problemas que se conocen datan del año 2000 a.C. La más extensa de ellas es el Papiro Rhind, escrito por el escriba Ahmes alrededor del año 1650 a.C. en Egipto utilizando escritos con 200 años de antigüedad. Las medidas de este papiro son, aproximadamente, treinta y tres centímetros de ancho y seis metros de largo, y consta de ochenta y siete problemas y su resolución. Contiene actividades aritméticas, fracciones, cálculo de áreas y volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, etc. Disponemos además de otras fuentes, como son el Papiro de Kahun (que contiene algunos problemas matemáticos), el Papiro de Berlín, dos tablillas de madera de Akhmim, y el Papiro de Moscú (colección de veinticinco problemas matemáticos).

También se conservan una serie de tablillas de arcilla de la civilización babilónica, las más antiguas del año 2100 a.C. y otras posteriores que datan del año 600 a.C. al 300 a.C. En estas tablillas aparecen series de números, relaciones geométricas y listas de problemas.

Las matemáticas griegas fueron mucho más sofisticadas que las matemáticas que habían desarrollado las culturas anteriores. Durante este período se produjeron importantes descubrimientos, como los teoremas de Tales (s. V a.C.) y Pitágoras (s. VI a.C.), y se escribieron obras tan importantes como los *Elementos*, de Euclides (hacia el año 300 a.C.), el *Almagesto* de Ptolomeo (s. II d.C), la *Introductio Arithmeticae* de Nicómano (s. II), la *Arithmetica* de Diofanto de Alejandría (s. III), etc. Estas obras, a diferencia de los anteriores papiros y tablillas y de la obra de Alcuino, eran compilaciones -a veces con reestructuraciones- del saber matemático de la época, y no de divulgación o instrucción.

Boecio (480-524) escribió libros que sirvieron de texto para las cuatro ramas de las matemáticas. Se trataba de libros que eran simples resúmenes, a un nivel muy elemental, de clásicos anteriores, y fueron muy utilizados, con algunas variaciones, en las escuelas monásticas medievales. Los cuatro libros son *Aritmética*, que es un resumen de la *Introductio Arithmetica* de Nicómano; *Geometría*, basada en los cuatro primeros libros de los *Elementos* de Euclides; *Astronomía*, extraída de *Almagesto* de Ptolomeo; y *Música*, basada en obras anteriores de Euclides, Nicómano y Ptolomeo. Ninguno de estos libros intenta una estructura lógica rigurosa, sino más bien busca su aplicabilidad a problemas sencillos. Así, por ejemplo, en la obra *Geometría*, aparecen las proposiciones más sencillas de los *Elementos* sin demostración, y en su obra *Aritmética* presenta explicaciones de ciertas partes de la obra de Nicómano, ejemplos adicionales o tablas para ilustrar un determinado punto.

Casiodoro (hacia el año 490), discípulo de Boecio, escribió la obra *De Arithmetica*, que es un resumen muy básico de la *Aritmética* de Boecio y que sirvió de manual en las escuelas de comienzos de la Edad Media. Fundó un monasterio e impuso a los monjes la copia de manuscritos. Esta costumbre persistió durante mucho tiempo en los conventos del período medieval.

Isidoro de Sevilla (hacia el año 600), realizó una enciclopedia, las *Etimologías*, de veinte libros que se utilizó hasta el siglo XIII, a pesar de no tener mucha originalidad. En uno de estos libros, hizo un resumen de la *Aritmética* de Boecio. Encontró un significado místico para los números, aunque estas consideraciones místicas forman parte de las creencias de la época.

Beda el Venerable (673-735), monje benedictino inglés, conocía el griego y fue considerado uno de los más grandes sabios de su tiempo. Hizo numerosos trabajos científicos, como *De temporis ratione*.

Todas estas obras de Casiodoro, San Isidoro, Beda el Venerable y la que aquí vamos a estudiar más detenidamente de Alcuino ejercieron una gran influencia sobre la enseñanza de las matemáticas en las escuelas medievales hasta finales del siglo X.

Alcuino de York

El teólogo y filósofo Alcuino de York nació en el año 735, el mismo año que murió Beda el Venerable, y tuvo por maestro a Hechberto, discípulo de Beda. Procedente de Inglaterra, donde se mantenía un foco cultural importante, estudió en la escuela benedictina de York, que dirigió entre los años 766 y 780. Coincidió con Carlomagno en Parma en el año 781, y fue invitado a su corte en Aquisgrán.

Carlomagno fundó la Escuela Palatina durante el denominado *Renacimiento carolingio*, un periodo de florecimiento intelectual durante la oscura Alta Edad Media. Esta escuela fue dirigida por Alcuino de York, que contó con la ayuda de sabios contemporáneos de su época. Organizó los estudios en dos cursos: el *Trivium* (gramática, retórica y dialéctica) y el *Quadrivium* (aritmética, música, astronomía y geometría). Se convirtió en la primera escuela renombrada de la época y sirvió de ejemplo para la creación de otras, e incluso el emperador recibía clases de retórica y dialéctica.

Alcuino enseñó allí durante ocho años antes de ser nombrado abad y retirarse a Tours en el 796, donde falleció en el año 804.

Además de tratados de teología y pedagogía, escribió una serie de problemas matemáticos y de lógica para la formación de los jóvenes, algunos de los cuales ha pasado, incluso, al saber popular. Su título es *Propositiones ad acuendos iuvenes* (Proposiciones para adiestrar a los jóvenes).

El mayor mérito de Alcuino como educador laico no fue el haber educado a una generación de jóvenes, sino, sobre todo, haber inspirado su propio entusiasmo por el saber y por enseñar a los jóvenes talentos que se reunían en torno a él provenientes de todas partes. Sus escritos educativos, que comprenden los tratados “Sobre Gramática”, “Sobre Ortografía”, “Sobre la Retórica y las Virtudes”, “Sobre la Dialéctica”, las “Disputas con Pipino” y el tratado astronómico titulado “De Cursu et Saltu Lunae ac Bissexto", nos proporcionan una visión de las materias y métodos de enseñanza empleados en el Escuela Palatina y en general de las escuelas de su tiempo, pero no son notables por su originalidad o excelencia. En general son compilaciones, casi siempre en forma de diálogos sacados de las obras de maestros anteriores; probablemente tenían el propósito de ser utilizados como libros para enseñar a sus propios discípulos.

Propositiones ad acuendos iuvenes

La obra *“Propositiones ad acuendos iuvenes”* contiene 53 proposiciones de diferentes áreas. Para analizar estas proposiciones, las clasificamos en cinco categorías: proposiciones de tipo numérico, algebraico, geométricas y de medida, de progresiones y de lógica. Esta clasificación se hizo teniendo en cuenta cómo se resuelven en la actualidad, y no el método empleado por Alcuino para su resolución.

Tras esta clasificación, analizamos los enunciados de estas proposiciones, determinando su vigencia y mostrando las diferencias que presentan con respecto a los actuales.

Al analizar los enunciados, observamos que el 90% podría plantearse en la actualidad, salvo por algunos matices como las unidades de medida utilizadas, la forma de expresarlos y el carácter sexista y/o discriminatorio de algunos de ellos.

Así, por ejemplo, la proposición 8, cuyo enunciado se incluye a continuación, habla de unidades como *metretas* y *sextarios*. En la proposición 1 aparecen las unidades de longitud *onza de pie* y *legua*, mientras que en otros problemas aparecen unidades de longitud como *pies* (proposiciones 21, 27, 28 29 y 30), *codos* (proposiciones 9, 10 y 31) o *perches* (proposiciones 22, 23, 24 y 25). Esto nos obligó a buscar la equivalencia entre unas medidas y otras para entender las soluciones.

> ***8. De un tonel.*** *Hay un tonel con una capacidad de 100 metretas que está conectado a 3 tubos que salen de 3 agujeros. La primera tubería llena un tercio y un sexto del tonel, la segunda, un* tercio, y la tercera, un sexto.

En las proposiciones 36 y 47 se pueden observar claramente matices sexistas o discriminatorios que no aparecerían en ningún problema actual:

__32. De un cabeza de familia.__ Un cabeza de familia tiene 20 criados. Les ordena repartir 20 fanegas de trigo de la siguiente manera: cada hombre debe recibir 3 fanegas, cada mujer 2 fanegas y cada niño media.

Diga, quien pueda, cuántos hombres, mujeres y niños hay.

__47. Del obispo y de sus panes.__ Un obispo encarga distribuir 12 hogazas de pan entre sus clérigos. Manda que todo sacerdote debe recibir 2 panes, cada diácono medio pan, y cada lector un cuarto de pan. Así, el número de panes y de clérigos será el mismo.

Diga, quien lo desee, cuántos sacerdotes, diáconos y lectores hay.

Como ejemplos de proposiciones con enunciado no actual podemos citar la número 22, en la que se nos presenta una superficie irregular descrita de forma poco precisa, algo que en nada se parece a la forma de describir las superficies en problemas actuales.

__22. De un campo irregular.__ Hay un campo de forma irregular; uno de los lados mide 100 perches; otro, 100 perches; 50 perches el de enfrente, 60 perches el lado de en medio y 50 perches en el lado opuesto.

Diga, quien pueda, cuál es la superficie del campo en fanegas.

Tras el análisis de las soluciones hemos obtenido que solo aproximadamente un 20% son similares a las que encontraríamos actualmente, y estas coincidencias se presentan en las que hemos clasificado como proposiciones de lógica.

De entre las proposiciones cuya solución no es similar a la actual, algunas características que nos llamaron la atención son:

- La forma de calcular las áreas en los problemas de geometría. Lo mostramos con un ejemplo:

__28. De una ciudad triangular.__ Hay una ciudad de forma triangular que mide 100 pies por un lado, 100 pies por otro, y 90 pies en la base. Quiero construir unas casas de forma que cada terreno tenga 20 pies de largo y 10 de ancho.

Diga, quien pueda, cuántas casas es posible construir en esta ciudad.

__Solución:__ Los dos lados miden juntos 200 pies. La mitad de 200 es 100. Como la base mide 90 pies, la mitad de 90 es 45. Puesto que la longitud de cada terreno es de 20 pies, y el ancho es de 10 pies, dividimos 100 entre 20, lo que da 5. La décima parte de 40 es 4, después multiplicamos 5 por 4 y obtenemos 20. Así, 20 casas pueden construirse en esta ciudad.

En esta proposición observamos que, para hallar el área de un triángulo isósceles, Alcuino lo aproxima a un rectángulo tomando como base la mitad de la base del triángulo y como altura uno de los lados iguales. La diferencia entre la solución dada por Alcuino y el área exacta es de 481.4 pies, produciéndose un error de un 11.9%. La segunda parte del enunciado de esta proposición no suele aparecer en problemas actuales y menos para terrenos con esta forma.

En la proposición 25, para hallar el área de una circunferencia conocida su longitud, la aproxima al área de un cuadrado de lado la cuarta parte de la longitud de la circunferencia:

__25. De un campo circular.__ Hay un campo con forma de círculo cuya circunferencia mide 400 perches.

Dime, ¿cuántas fanegas mide el campo?

__Solución:__ Como la circunferencia del campo es de 400 perches, un cuarto es 100. Si multiplicamos 100 por 100, obtenemos 10000. Lo dividimos entre 12 y da 833, y al dividirlo entre 12 de nuevo da 69. Ése es el número de fanegas del campo.

En la proposición número 23, calcula el área de un cuadrilátero aproximándola a la de un rectángulo de dimensiones las medias de los lados opuestos del cuadrilátero:

__23. De un campo cuadrangular.__ Hay un campo cuadrangular donde un lado mide 30 perches, el lado opuesto, 32 perches, la base 34 perches y su opuesto 32 perches.

Diga, quien pueda, cuántas fanegas mide ese campo.

__Solución:__ Los dos lados miden 62 perches. Si lo dividimos entre 2, obtenemos 31. Los anchos de los dos lados dan como resultado 66 perches. Al dividirlo entre dos, 33 perches. Le quitamos 1 a 31, y le sumamos 1 a 33. Si multiplicamos 30 por 34 da 1020. Al dividirlo entre 12, da 85, y otra vez entre 12 da 7. Ése es el número de fanegas del campo.

- En los problemas de álgebra, nos llamó la atención la forma en la que se expresaban las soluciones, como una comprobación de resultados. En aquel momento se resolvían probablemente mediante ensayo y error, y el objetivo incluiría las prácticas informales de cálculo. Un ejemplo lo encontramos en la proposición 2:

__2. De un paseante.__ Un hombre que iba por un camino se encuentra con otros hombres. Él les dice:

Querría que hubiera tantos hombres como vosotros sois, más la mitad de la mitad, más la mitad de ese último número. Entonces nosotros seríamos 100 conmigo.

Diga, quien quiera, cuántos hombres ha encontrado el paseante.

__Solución:__ El paseante se ha encontrado a 36 hombres. Añadimos 36 para hacer 72. La mitad de la mitad de 72 es 18. La mitad de 18 es 9. Así, 72 y 18 hacen 90. Añadimos 9; eso da 99. Con el paseante, tenemos 100.

- También en estas proposiciones nos resultó curioso que, al preguntar por edades, las soluciones tuvieran como resultado años y meses, ya que en los problemas actuales al pedir una edad se espera como resultado un número entero de años. Esto ocurre en las proposiciones 36 y 44:

__36. De un viejo a un niño.__ Un hombre mayor saluda a un chico joven diciéndole:

Puedes vivir, hijo mío, tantos años como has vivido hasta ahora, y otro tanto, y tres veces esa suma. Además, si Dios te da uno de mis años vivirás hasta los 100 años.

Averigüe, quien pueda, la edad del joven en ese momento.

__Solución:__ En este momento, el chico había vivido 8 años y 3 meses. Otro tanto son 16 años y seis meses, y otro tanto son 33 años, que, multiplicados por 3, hacen 99; añadido uno hacen 100.

- Un último aspecto interesante de las proposiciones algebraicas es que, cuando tienen varias soluciones, Alcuino solo aporta una de ellas, tal y como ocurre en la proposición 34:

__34. De otro padre de familia.__ Un padre de familia tiene 100 criados. Pide que se repartan 100 fanegas de trigo de modo que los hombres reciban 3 fanegas, las mujeres 2 y los niños media.

Diga, quien lo desee, cuántos hombres, mujeres y niños hay.

__Solución:__ Si multiplicamos 11 por 3 obtenemos 33; 15 veces 2 hacen 30. Esto es: 11 hombres reciben 33 fanegas, y 15 mujeres reciben 30, y 74 niños reciben 37 fanegas. Al sumar 11, 15 y 74 obtenemos 100, que es el número de criados. Igualmente, si sumamos 33, 30 y 37 obtenemos 100, que es el número de fanegas. Así, las 100 fanegas son distribuidas entre los 100 criados.

Sin embargo, aproximadamente un 23% de las proposiciones, mayoritariamente las de lógica y matemática recreativa, siguen teniendo enunciados y soluciones prácticamente idénticos a los actuales. Para este tipo de proposiciones, buscamos ejemplos actuales iguales o similares a los propuestos por Alcuino, tanto en libros de texto como en revistas especializadas y en Internet. Por ejemplo:

__12. De un padre de familia.__ Un padre de familia deja en herencia a sus 3 hijos 30 vasijas de vidrio de los cuales 10 están llenas de aceite. Otros 10 están llenas hasta la mitad. Las últimas 10 están vacías.

Decid, quien pueda, cómo se puede repartir el aceite y las vasijas de vidrio de manera que cada uno de los 3 hijos reciba el mismo número de vasijas y la misma cantidad de aceite.

__Solución:__ Hay 3 hijos y 30 vasijas de vidrio. De estas, 10 llenas, 10 medio llenas y 10 vacías. Cada hijo debe recibir 10 vasijas. Al primer hijo le damos las 10 vasijas medio llenas; al segundo, 5 llenas y 5 vacías; al tercero, como al segundo, 5 llenas y 5 vacías. Así se repartirán tanto las vasijas de vidrio como el aceite.

Para esta proposición hemos encontrado un enunciado similar, aunque con distintos datos, en el libro *El hombre que calculaba* [9]:

[…] – ¡Aquí están mis tres amigos! Son criadores de carneros y vienen de Damasco. Se les plantea ahora uno de los más curiosos problemas que haya visto en mi vida. Es el siguiente:

Como pago de un pequeño lote de carneros recibieron, aquí en Bagdad, una partida de vino excelente, envasado en 21 vasijas iguales, de las cuales se hallan:

7 llenas;

7 mediadas;

7 vacías.

Quieren ahora repartirse estas 21 vasijas de modo que cada uno de ellos reciba el mismo número de vasijas y la misma cantidad de vino.

De entre las proposiciones con enunciado actual, probablemente la número 18 (y las 17, 19 y 20, que son distintas versiones de esta) sea la que más ha trascendido hasta nuestros días:

__18. De un hombre, una cabra y un lobo.__ Un hombre debía atravesar un río con un lobo, una cabra y una cesta de coles. Tenía una barca tan pequeña que sólo podía pasar con él el lobo, la cabra o la cesta de coles, y no quería dejar la cabra con el lobo o con las coles.

Diga, quien pueda, cómo atravesó el hombre el río con el lobo, la cabra y la cesta de coles.

__Solución:__ El hombre cruza el río con la cabra, dejando al lobo con la cesta de coles. Después, vuelve solo a por el lobo y cruza de nuevo el río. Allí, deja al lobo y coge de nuevo a la cabra, y la trae de vuelta. En la orilla de partida, deja a la cabra y coge la cesta de coles para dejarla junto al lobo. Finalmente, vuelve solo y recoge a la cabra. De esta manera efectúa el transporte sin problemas.

El enunciado de esta proposición podemos encontrarlo casi textualmente en numerosos libros, dos de los cuales son *Estrategias de pensamiento* [10], y *¿Se atreve Vd. con ellos?* [1]. El ejemplo que aquí se incluye pertenece al volumen 13 de la revista *Cacumen* [7]:

EL LOBO, LA OVEJA Y LA HIERBA

Un hombre quiere atravesar un río, llevando consigo un lobo, una oveja y un haz de hierba.

Dispone de una barca, pero ésta solamente aguanta sin hundirse si sube a bordo el hombre con el haz de hierba, o el hombre con un solo animal.

Por tanto, se da cuenta de que tendrá que hacer varios viajes para conseguir pasar todos a la otra orilla, pero cuidando de no dejar nunca solos en una misma orilla el lobo y la oveja, pues ésta sería devorada por aquél, ni la oveja y el haz de hierba, pues ocurriría lo propio.

¿Cómo hará para conseguir que los cuatro pasen el río?

Respecto al análisis de los niveles de estudio en los que podrían aparecer las proposiciones cuyos enunciados siguen vigentes, obtuvimos que el 13% las podríamos encontrar en textos de primaria, el 38% pertenecerían a textos de 1.º a 3.º de ESO y el 38% estarían incluidas en libros con problemas de tipo lúdico y de entretenimiento o se presentarían como problemas en clases de preparación para competiciones y concursos de matemáticas.

Referencias bibliográficas

[1] Albaiges Olivart, J. M. (1981): “¿Se atreve Vd. con ellos? 101 apasionantes problemas”. MARCOMBO, S.A., Barcelona (España)

[2] Bell, E. T. (1985): “Historia de las matemáticas”. Fondo de cultura económica, (México)

[3] Boyer, C. B. (1986): “Historia de la matemática*”.* Alianza editorial, Madrid (España).

[4] Collette, J. P. (1985): “Historia de las matemáticas*”.* Siglo veintiuno de España Editores, S.A., Madrid (España).

[5] Domínguez Sánchez, C. (2012). “Libros para aprender matemáticas en el siglo VIII: *Propositiones ad acuendos iuvenes.* Alcuino de York”. Trabajo Fin de Bachillerato de Investigación. IES Juan Carlos I (Murcia).

[6] Jean, C.E. (2010): “Les propositions d’Alcuin”. En: http://www.recreomath.qc.ca/art_alcuin.htm (Consulta realizada el 30 de octubre de 2011).

[7] Ronda de problemas clásicos (1984): “Cacumen. Revista lúdica de cavilaciones”, Zugarto Ediciones, S.A., volumen 13, p. 40. Madrid (España).

[8] Sarcone, G. A.; Waeber, M. J. (1997): “Archimedes’Laboratory”. En: http://www.archimedes-lab.org/atelier.html?http://www.archimedes-lab.org/earlymathpuzzlers/alcuin_propositiones.html (Consulta realizada el 27 de Noviembre de 2011).

[9] Tahan, M. (2000): “El hombre que calculaba”. Ed. Verón, Barcelona (España).

[10] Wood, L. E. (1987): “Estrategias de pensamiento”. Labor, Barcelona (España).