Estimación en la recta numérica y cálculo escrito y mental en alumnado de Educación Primaria

María Milagrosa Domínguez Suraña; M. Carmen Canto López ; Manuel Aguilar Villagrán

email: mila.dominguezsurana@alum.uca.es; mc_canto@hotmail.com

manuel.aguilar@uca.es

Facultad Ciencias de la Educación. Universidad de Cádiz

RESUMEN

Hay un creciente interés den cómo el alumnado construye y desarrolla un componente importante del sentido numérico: la estimación de números en una recta numérica. Se ha hallado que un buen rendimiento en tareas de estimación se relaciona con mejores habilidades matemáticas (conteo, operaciones aritméticas, comprensión de conceptos,…). En esta comunicación presentamos los resultados encontrados en una muestra de 165 estudiantes de 4º y 5º de primaria en el desarrollo de tareas de estimación y sus relaciones con el cálculo escrito y mental. Los resultados muestran una clara relación entre estimación y cálculo mental. Se detallan algunas implicaciones para su aplicación en la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria.

Palabras clave: Cálculo escrito y mental, estimación numérica.

Introducción.

Existe un interés creciente por estudiar las variables cognitivas que podrían predecir los logros y dificultades en la adquisición de diferentes destrezas matemáticas (Friso Van-den Bos, 2014; Jordan, Kaplan, Locuniak & Ramineni, 2007; Mazzocco, Feigenson & Halberda, 2011; Navarro, Aguilar, Alcalde, Ruiz, Marchena, & Menacho, 2011).

Un componente importante de estas variables es el sentido numérico cuyo desarrollo implica procesos que requieren una doble codificación de la imagen y del lenguaje (Dehaene, 1997, 2001; Villarroel, 2009). La formación de la imagen, por ejemplo, es fundamental en el proceso de representación y reflexión con los números porque permite crear representaciones mentales de conceptos matemáticos (Bell & Tuley, 2003). Determinadas adquisiciones importantes en matemáticas formales dependen de la comprensión de la relación entre los números y el espacio que ocupan en la recta numérica; entender la sucesión de los números sobre una recta numérica es fundamental para estas relaciones (De Hevia & Spelke, 2010; Gervasoni, 2005). Por tanto, la recta numérica sería una de las representaciones más importantes en el aprendizaje numérico

Hay tres dominios principales en los que la recta numérica es particularmente útil para el desarrollo matemático (Griffin, Case, & Siegler, 1994). Primero, una recta numérica permite a los niños responder a preguntas relativas al tamaño sin hacer referencias a objetos concretos. En segundo lugar, la recta numérica apoya la regla de incremento o aumento, que describe la manera en que la suma o la substracción modifican el valor cardinal de un conjunto, y por tanto, se desplaza en sentido creciente o decreciente sobre la recta numérica. Por último, los niños que han adquirido una recta numérica mental pueden también determinar la posición relativa de un número cuando no puede ser determinada directamente (Gervasoni, 2005; Siegler & Booth, 2005).

Algunos estudios han mostrado la existencia de una clara relación entre las puntuaciones en estimación de números en la recta numérica y las habilidades aritméticas, de conteo (LeFevre, Greenham, & Waheed, 1993), la comprensión de conceptos matemáticos (LeFevre et al., 1993; Petitto, 1990), y mejores puntuaciones en pruebas de rendimiento matemático entre el período preescolar y otros cursos más avanzados (Berteletti, Lucangeli, Piazza, Dehaene, & Zorzi, 2010; Booth & Siegler, 2006; Booth & Siegler, 2008; Schneider & Grabner, 2009; Siegler & Booth, 2004).

Se ha comprobado que la capacidad de utilizar la recta numérica para representar cantidades específicas emerge solamente con una instrucción formal, después de la entrada en la escuela (Friso-va den Bos, Kroesbergen, Van Luit, Xenidou-Dervou, Jonkman, Van der Schoot & Lieshout 2015; Siegler & Booth, 2004; Siegler & Opfer, 2003). Las investigaciones señalan que los niños pequeños tiene dificultad para estimar las posiciones de los números en la recta numérica (por ejemplo, colocar 74 en la recta numérica de 0-100). Los alumnos de primer curso son más exactos que los de Educación Infantil y menos exactos que los de segundo cuando estiman las posiciones sobre una recta numérica de 0 a 100; y los alumnos de segundo son menos exactos que los de cuarto cuando estiman las posiciones sobre una recta que vaya de 0 a 1000 (Siegler & Booth, 2004; Siegler & Opfer, 2003). En cada uno de estos ejemplos, las respuestas de los niños más pequeños se desplazan a la derecha de las respuestas correctas, según una función o tendencia logarítmica, y las respuestas de los niños de más edad se conforman a una representación lineal (exacta) de la línea numérica (Siegler & Booth, 2004). Los niños de primaria se vuelven más precisos estimando números en la recta numérica cuando los adultos le proporcionan retroalimentación de sus respuestas (Opfer & Siegler, 2007). En sexto curso, la mayor parte de los niños tienen una comprensión exacta y lineal de la línea numérica y del hecho de que los números están espaciados de manera igual sobre su longitud (Siegler & Opfer, 2003).

El potencial de la recta numérica para organizar y estructurar las relaciones entre números y operaciones por una parte, y las dificultades que se presentan para adquirir un manejo adecuado de ella por otra parte, han llevado a muchos investigadores a proponer secuencias de enseñanza y aprendizaje para su uso en el ámbito escolar (Roushman, 2003). Entre los niños de preescolar, la exposición a juegos de sociedad con números presentados linealmente (con rectas numéricas) favorece la estimación más precisa sobre la línea numérica y permite mejorar la ejecución en conteo y comparaciones numéricas, lo que demuestra la relación entre las aptitudes en numeración (Ramani & Siegler, 2008; Whyte & Bull, 2008).

No obstante, algunos estudios muestran los obstáculos y limitaciones que puede tener su uso (por ejemplo, Bobis, 2007; 2008), se considera bien fundamentado que enseñar e instruir al alumnado en la línea numérica mejora el aprendizaje de los procedimientos aritméticos (Griffin & Case, 1996; Siegler & Ramani, 2008). En nuestro contexto, Bruno y Cabrera (2005, 2006) han analizado cómo se usa la recta numérica en los libros de texto de las editoriales más difundidas, la mayoría de las representaciones presentadas se producen en el contexto de número y, en menor medida, para la representación de operaciones y el orden de los números.

En España no se conocen muchos estudios que hayan explorado la capacidad de estimación y sus relaciones con habilidades de cálculo. En el presente trabajo nos propusimos varios objetivos: 1) estimar las diferencias entre cálculo escrito y cálculo mental, 2) evaluar la capacidad de estimación numérica entre 0 y 1000 en una muestra de Educación Primaria, 3) comprobar si existen relaciones entre el rendimiento de cálculo escrito y mental y la estimación de magnitudes numéricas en la línea numérica de 0 a 1000 y, 4) comprobar qué tipo de función (logarítmica o lineal) presentan los alumnos en la estimación de la línea numérica.

Método

Participantes

Los participantes han sido 165 estudiantes, de ellos 86 niños (52,12%) y 79 niñas (47,88%). Noventa y uno pertenecen a cuarto curso de Educación Primaria (edad media=9,9 años, dt=0,38); y 74 a quinto curso de Educación Primaria (edad media=10,5 años, dt=0,32). Los alumnos residen en una ciudad de unos 100.000 habitantes y son procedencia socioeconómica media.

Material y procedimiento

Se han usado tres pruebas. La primera de ellas, la de cálculo mental (Ineson, 2007), compuesta por 20 ítems de operaciones aritméticas (4 operaciones de suma, 6 operaciones de resta, 6 operaciones de multiplicación y 4 operaciones de división). Los ítems fueron elegidos debido a que su solución sería complicada utilizando un algoritmo escrito estándar, pero relativamente fácil si se utiliza un método o estrategia de cálculo mental, como el redondeo y el ajuste, operaciones con números cercanos a 100, multiplicaciones con múltiplos de 10, reducciones a la mitad en las divisiones, etc. La segunda prueba, la de cálculo escrito, se administró tras un intervalo de dos semanas, y estaba constituida por las mismas operaciones de la prueba anterior. En la hoja de respuesta de esta prueba se le proporcionaba espacio suficiente para la realización del cálculo con algoritmos escritos (en la tabla 1 se detallan las operaciones).

Tabla 1. Operaciones de cálculo mental y escrito (Ineson, 2007)

Operaciones			
Sumas	Restas	Multiplicaciones	Divisiones
99 + 54	100 – 25	30 x 5	100 : 2
101 + 54	133 – 36	99 x 2	102 : 2
49 + 51	90 – 25	30 x 70	500 : 2
190 + 45	1000 – 99	29 x 3	500 : 50
	10000 – 101	2001 x 4	
	1000 – 89	599 x 2	

En la última prueba, la estimación en la línea numérica (Opfer & Siegler, 2007), se le presenta a los alumnos cada ítem (22 en total) en una hoja de papel con una línea numérica de 25 cms. En el extremo izquierdo aparece el número 0 mientras que en el extremo derecho aparece el 1000. Los números a estimar son: 2, 5, 18, 34, 56, 78, 100, 122, 147, 150, 163, 179, 246, 366, 486, 606, 722, 725, 738, 754, 818 y 938, que aparecen a una distancia de 10 cms por encima de la recta numérica en el centro de la misma. Estos números han sido seleccionados para maximizar la distinción de la función logarítmica y lineal, minimizar la influencia de algún conocimiento específico (como que 500 es la mitad entre 0 y 1000) y predecir las diferencias en estimación en los dos grupos. Cada número fue presentado en una hoja de papel y el estudiante tenía que marcar el lugar en la recta numérica donde él localizaba el número.

A los participantes se les administraron las dos primeras pruebas de forma colectiva. En la prueba de cálculo mental, aparecían todos los espacios para escribir las respuestas en una misma página. Se iba leyendo en voz alta cada ítem dos veces (por ejemplo, “noventa y nueve más cincuenta y cuatro; repetimos, a noventa y nueve le sumamos cincuenta y cuatro”). De esta manera minimizábamos el error en los alumnos. Tras cada ítem disponía de diez a veinte segundos para contestar en la hoja de respuesta. Aquí no se les permitió utilizar algoritmos escritos en ninguna de las operaciones. La prueba de cálculo escrito se les administró pasadas dos semanas de la prueba anterior. Los ítems presentaban un espacio suficiente para que los alumnos lo usaran si querían realizar los algoritmos pertinentes. No se hizo énfasis en si tenían el deber de utilizar ese espacio o no. El orden de presentación de las operaciones fue aleatorio, tanto en la versión escrita como en la prueba mental.

La prueba de estimación numérica, se administraba de forma individual. Los ítems se presentaban de manera aleatoria a cada niño evaluado, uno por página, para que no tuvieran la posibilidad de ver cuál sería el ítem siguiente. Al comienzo de la prueba, y utilizando una pizarra de prueba tipo Velleda, se le decía: "*Hoy vamos a jugar a un juego con la línea numérica. Te voy a decir que me enseñes en la línea numérica dónde van una serie de números. Tú decides dónde van situados esos números, solo quiero que traces una línea en la recta numérica como esta (hacemos una línea)"*. Después de cada ítem le decimos "*Esta línea numérica va desde el 0, en el principio, hasta el 1000, en el final. Si el 0 está aquí y el 1000 está aquí, ¿dónde pondrías el N?"*

Las pruebas fueron aplicadas a lo largo de tres sesiones durante el mes de mayo y junio de 2013. La administración de las pruebas de cálculo se realizó de manera colectiva en las aulas del alumnado participante y la prueba de estimación numérica fue aplicada de forma individual en espacios libres de distracciones y ruidos.

Resultados y discusión

Nuestro primer objetivo era estimar las diferencias entre cálculo escrito y cálculo mental en el alumnado participante.

Presentamos los resultados en cálculo escrito y mental. Para la corrección de estas pruebas de cálculo se concedió un punto por operación correctamente resuelta y cero en el caso de una solución incorrecta. Además, en las hojas de respuesta se analizaba si el alumno utilizaba algoritmo escrito o realizaba la operación mentalmente (aunque estos últimos resultados no son considerados aquí).

En la tabla 2 se muestra la media y la desviación típica hallada en las tareas de cálculo escrito y mental. Como se puede observar y, como era de esperar, en el cálculo escrito apenas existen diferencias. Sin embargo, en el cálculo mental los alumnos de cuarto curso presentaron una media inferior a los de quinto. Las tareas de cálculo escrito presentaron menor dificultad para ambos cursos que las realizadas con cálculo mental.

Tabla 2. Media y desviación típica (dt) en cálculo mental y cálculo escrito

	4º	**5º**
	Media (dt)	Media (dt)
Cálculo escrito	17,34 (2,96)	17,84 (1,6)
Cálculo mental	12,26 (4,61)	14,65 (3,96)

La tabla 3 muestra los porcentajes de aciertos obtenidos en cada una de las operaciones propuestas y el número de alumnos que han superado cada ítem. Como vemos, las operaciones (2001 x 4) para cuarto curso y (30 x 5) para quinto curso con un porcentaje de 98,8% y 100% respectivamente, son las que mejor puntuaciones han obtenido. Mientras que la operación (10000 – 101) es la que mayor dificultad ha presentado para ambos cursos con un porcentaje del 54,9% y 58,1% para cuarto y quinto curso respectivamente.

También podemos ver los porcentajes de aciertos en las distintas operaciones aritméticas que se les han presentado a los alumnos. La operación que, por excelencia, ha resultado más complicada en cualquiera de las formas presentadas, ha sido (10000 – 101) obteniendo los siguientes porcentajes para cuarto curso de cálculo escrito, cálculo mental y cálculo escrito resulto a través de estrategias de cálculo mental (54,9; 13,2 y 6,6 respectivamente). Sin embargo, como era de esperar, en quinto curso, los resultados son algo mejores pero siguen siendo los de menor valor (58,1%; 39,2% y 29,7% respectivamente).

El cálculo escrito presenta mejores resultados que las mismas operaciones presentadas en cálculo mental. Esto se debe a que el alumnado aún es dependiente de su realización sobre el papel a través de algoritmos escritos verticalmente. A estas edades los alumnos deberían tener adquiridas estrategias de cálculo mental como el redondeo, doblar y reducir a la mitad, el ajuste…

En relación a las operaciones realizadas en las tareas de sumas se aprecia que la mayoría realiza bien estos cálculos. Si nos centramos en las restas observamos que las que presentan mayor dificultad es la operación citada anteriormente, esto quiere decir que los alumnos intentan seguir, ya sea, en papel o en su cabeza, el algoritmo vertical tradicional. En las multiplicaciones, se obtienen buenos resultados, a excepción de la operación (30x70) que los alumnos olvidan multiplicar por uno de los ceros, ya que las soluciones que se aprecian en la hoja de respuestas son 210 y no 2100. Por último, en las tareas de división, los alumnos parecen no tener tanta dificultad pero sí que se aprecia como utilizan estrategias como la de doblar y reducir a la mitad y como son capaces de transferirla a distintas situaciones.

Si analizamos estos resultados por operaciones observamos que dentro del apartado de las sumas hay varios ítems que fomentan las estrategias de estimación y aproximación. Los resultados obtenidos en estas operaciones fueron altos en ambos cursos a excepción de la operación (190 + 45) que presenta un porcentaje de aciertos más bajo que el resto de operaciones de este grupo.

Centrándonos en las operaciones de sustracción apreciamos que todas usan números cercanos a un múltiplo de 10. Por lo general, tanto en la parte escrita como en la mental, se observan altos porcentajes a excepción de la operación (10000-101) como mencionamos anteriormente. Los alumnos tienen adquiridas ciertas estrategias que no son capaces de generalizar a situaciones semejantes.

En las multiplicaciones encontramos altos porcentajes de aciertos en cuarto y quinto curso, pero llama la atención dos ítems (30x5 y 30x70) que son tan semejantes pueden presentar una diferencia en el porcentaje de aciertos ya sea de forma escrita o mental. Para estos alumnos la operación 30x5 es mucho más sencilla de realizar que 30x70. No son capaces de generalizar estrategias a otras situaciones tal y como presenta Ineson (2007).

Por último, en las divisiones, hay operaciones que requieren estrategias de duplicación y reducción a la mitad. Parece ser que para estos estudiantes no existe gran dificultad a la hora de resolverlos pero la operación 500:50 presenta un porcentaje menor que el resto del grupo y presenta una diferencia acentuada cuando tienen que resolverlo mentalmente. El porcentaje de aciertos baja considerablemente en ambos cursos.

Tabla 1. Porcentajes de aciertos en las operaciones aritméticas

		Operaciones			
		4º		5º	
		Escrito	Mental	Escrito	Mental
Sumas	99+54	93,4	68,1	94,6	64,9
	101+54	92,3	81,3	97,3	95,9
	49+51	94,5	78	95,9	90,5
	190+45	89	52,7	93,2	71,6
Restas	100-25	90,1	68,1	93,2	83,8
	133-36	87,9	42,9	89,2	64,9
	90-25	89	68,1	87,8	81,1
	1000-99	63,7	49,5	70,3	59,5
	10000-101	54,9	13,2	58,1	39,2
	1000-89	73,6	37,4	86,5	51,4
Multiplicación	30x5	96,7	96,7	100	91,9
	99x2	96,7	80,2	89,2	81,1
	30x70	82,4	54,9	87,8	73
	29x3	89	63,7	94,6	52,7
	2001x4	98,9	68,1	97,3	83,8
	599x2	95,6	57,1	89,2	60,8
Divisiones	100:2	90,1	81,3	97,3	94,6
	102:2	90,1	71,4	97,3	82,4
	500:2	84,6	45,1	90,5	74,3
	500:50	79,1	47,3	74,3	63,5

El segundo objetivo propuesto fue evaluar la capacidad de estimación numérica entre 0 y 1000 en una muestra de alumnado de educación primaria.

La prueba de estimación se ha corregido, en cada alumno participante, siguiendo un doble criterio: por un lado, el porcentaje de error en la estimación que se obtiene a través del siguiente cómputo (Siegler & Booth, 2004): (Estimación realizada por el niño – estimación solicitada)/Escala de estimación (1.000) y multiplicado por 100. Si a un alumno se le preguntaba –por ejemplo-, por la localización del número 78 en la recta numérica de 0 a 1000, y él marcaba un punto correspondiente al número 89, el porcentaje de error sería del 1,7%, [(89-78)/1000] x100. Estos porcentajes de error se han usado para hallar las correlaciones entre estimación y cálculo escrito y mental que se presentan más adelante.

La media de los porcentajes de error fue 12,83% (dt = 6,65) en cuarto y 10,76% (dt = 5,89) en quinto. Este nivel de precisión es similar al encontrado en otros estudios (Schneider, Grabner & Paetsch, 2009); En el estudio de Siegler & Opfer (2003) los resultados en las medias de porcentajes de error la estiman sobre el 21% en segundo, 14% en cuarto, 7% en sexto y 1% en los adultos que podemos considerar equivalentes a los presentados aquí. Un análisis de varianza (ANOVA) con la media del porcentaje absoluto de error indica que la precisión en la estimación se incrementa con el curso, $F(1, 163) = 4{,}37$, $p < {,}038$, siendo los participantes de 5º más precisos que los de 4º (menor porcentaje de error).

Por otro lado, se calculó la exactitud en la estimación midiendo el número exacto en el que el alumno coloca su estimación en la recta numérica del 0 al 1000. Por ejemplo, si a un alumno se le pide que estime el número 100 y su estimación recae sobre el número 114 en la recta numérica que se le ha presentado, esa es su estimación exacta.

En la tabla 4 observamos los resultados (media y desviación típica) de cada ítem exacto de estimación para los participantes de 4º y 5º. Los alumnos, ya sean de cuarto o de quinto curso, presentan cierta dificultad en la realización de la tarea de estimación. Sí es cierto que a medida que el número se va haciendo más grande, a medida que se va acercando al extremo donde aparece el 1000, los datos van siendo más exactos, o menor es el error de estimación. La dificultad está en los dígitos que se encuentran cercanos al 0, o números menores a 500.

Tabla 4. Datos descriptivos de la prueba de estimación exacta en la línea numérica 0-1000.

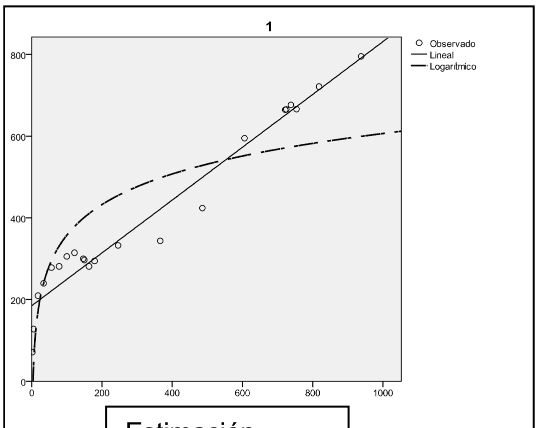
Números solicitados	4º Educación Primaria Media (dt)		5º Educación Primaria Media (dt)	
2	71,13	66,22	42,74	28,69
5	127,66	85,97	96,82	67,05

18	209,39	121,52	158,14	94,1
34	239,62	110,96	195,8	105,12
56	278,01	127,43	231,49	132,84
78	281,05	114,71	239,62	127,46
100	305,33	114,01	263,72	112,52
122	314,31	121,54	279,66	119,72
147	299,98	119,33	267,6	103,62
150	296,77	109,75	260,36	90,76
163	281,12	110,98	254,62	97,66
179	294,32	104,43	273,26	100,32
246	332,42	104,45	326,53	97,81
366	343,74	76,46	342,72	74,51
486	423,81	65,07	431,43	43,02
606	594,79	42,09	587,61	69,98
722	664,38	86,80	672,14	79,96
725	665,44	90,16	679,76	87,1
738	676,28	72,45	682,49	85,62
754	666,03	91,89	671,2	79,21
818	721,08	82,79	735,8	88,5
938	795,2	99,39	820,78	117,75

También nos planteamos como objetivo *comprobar qué tipo de función (logarítmica o lineal) presentan los alumnos en la estimación de la línea numérica*. Como reseñan Siegler y Opfer (2003), la función de los estudiantes sobre la estimación cambia a medida que van avanzando en edad, empezando con una función logarítmica que poco a poco, a medida que van creciendo en edad o van adquiriendo conocimientos, destrezas y habilidades, se transforma en una función lineal. En este caso, los alumnos de cuarto y quinto curso presentaron una función lineal mayor que la logarítmica, lo que quiere decir que a la hora de estimar ciertas cantidades los alumnos fueron más precisos. Si estas cantidades eran mayores, es decir, cercanas a 500 o más, la estimación era más exacta. En las figuras 1 y 2 se observa la sobreestimación que los estudiantes hacen de los números más cercanos a 0. En cuarto la función lineal (R^2 = ,95) fue mayor que la función logarítmica (R^2 = , 74), gl (20), p <, 000. Los resultados de las funciones lineales y logarítmicas de los participantes de quinto mostraron el mismo patrón (función lineal R^2 = ,97; logarítmica R^2 = ,74, gl (20), p < ,000.

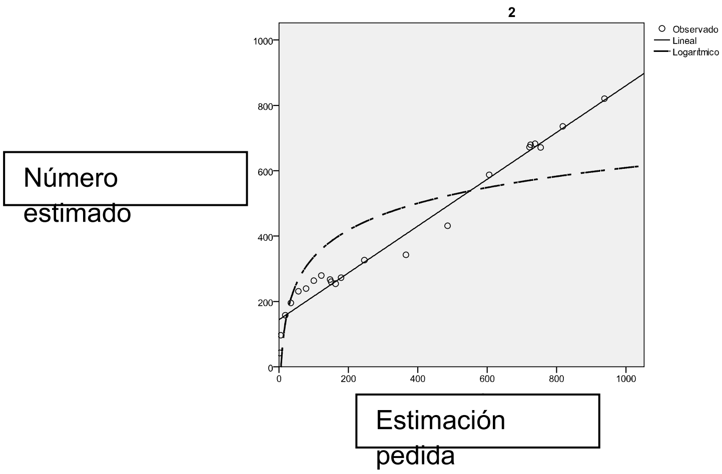
Figura 1. Función logarítmica y lineal de las tareas de estimación en 4º curso de educación primaria.

Número estimado



Estimación pedida

Figura 2. Función logarítmica y lineal de las tareas de estimación en 5º curso de educación primaria.



Otro de nuestros objetivos fue *comprobar la relación entre las destrezas de estimación y la destreza de cálculo aritmético escrito y mental*. La tabla 5 presenta las correlaciones halladas, destacando la correlación negativa y significativa entre cálculo mental y los porcentajes de error en la estimación en la recta numérica en los dos cursos evaluados. Los resultados pueden interpretarse en el sentido de que la precisión en la estimación en la recta numérica se relaciona más con el cálculo mental (sin lápiz ni papel) que con el cálculo escrito que puede resolverse siguiendo un mecanismo algorítmico y no con el desarrollo de estrategias de cálculo que son imprescindibles para realizar cálculos mentales. Estas correlaciones son menores que las halladas en otros estudios con niños de primero, segundo y tercero (Booth & Siegler, 2006; Geary et al., 2008) que encuentran correlaciones entre ,50 y ,60. Esta discrepancia puede deberse al uso de pruebas estandarizadas usadas en los estudios citados.

Tabla 5. Correlación entre cálculo escrito y mental y el porcentaje de error absoluto en la estimación en cuarto y quinto de Educación Primaria.

	4º E. P.	5º E. P.
	Porcentaje de error	Porcentaje de error
Cálculo escrito	-,300**	-,207
Cálculo mental	-,488**	-,458**

(**) La correlación es significativa al nivel 0,01 bilateral

En síntesis, los resultados de este estudio corroboran la relación bien establecida entre el conocimiento conceptual en la recta numérica y el logro matemático. La correlación bivariada indica que un porcentaje importante de la variación en cálculo mental puede ser explicada por nuestra medida del conocimiento en la recta numérica. Este hallazgo parece notable teniendo en cuenta que se evaluó el conocimiento sobre estrategias de cálculo mental y algoritmos escritos de cálculo, que representan sólo una pequeña parte del conocimiento conceptual involucrado en las matemáticas escolares. Nuestros resultados abren nuevas vías de estudio que permiten relacionar la posición en la recta numérica y otros conocimientos conceptuales: números decimales, fracciones y porcentajes, etc. En este sentido, diversos estudios han valorado si mejorar las representaciones en la recta numérica de estudiantes de educación primaria permite mejorar su habilidad para el aprendizaje de la aritmética. La presentación a alumnos de primer curso de números exactos con la recta numérica y representaciones de las magnitudes de los sumandos y sumas, permitió a los niños recordar la respuesta correcta con mayor frecuencia que los niños a los que se les dijo la respuesta correcta, pero no se les presentó las representaciones en la recta numérica (Booth & Siegler, 2006; Ramani & Siegler, 2008; Ramani, Siegler & Hitti, 2012). También se ha demostrado la mejora eficacia de la estimación en la recta numérica a través de materiales concretos (Vitale, Black, Swart, 2014).

En definitiva, hay una considerable evidencia de que la recta numérica es una herramienta poderosa para los niños de educación primaria (Clarke, Downton & Roche, 2011), su uso también presenta ventajas en la mejora de funciones cognitivas (Diezmann & Lowrie, 2006) y forma parte de la mejora de las competencias docentes de los maestros de educación primara (Inesson, 2008).

Referencias

Bell, N. & Tuley, K. (2003). *Imagery: The sensory-cognitive connection for math.* [en línea, consultado el 30 enero 2015] http://www.ldonline.org/article/5647

Berteletti, M., Lucangeli, D., Piazza, M, Dehaene, S. & Zorzi, M. (2010). Numerical Estimation in Preschoolers. *Developmental Psychology* 2010, 46, 2, 545–551.

Bobis, J. (2007). The empty number line: a useful tool or just another procedure?. Teaching Children Mathematics, 410-413.

Bobis, J. (2008). Early Spatial Thinking and the Development of Number Sense. *Australian Primary Mathematics Classroom* 13 (2008): 4–9.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology,41,* 189–201.

Booth, J. L.; Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child development, 79*(4), 1016-1031.

Bruno, A. & Cabrera, N. (2005). Una mirada a la recta numérica en los libros de texto de tres editoriales españolas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, Volumen VII, 33-56.

Bruno, A. & Cabrera, N. (2006). Types of Representations of the Number Line Text Books. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (30th, Prague, Czech Republic, July 16-21, 2006). Volume 2.

Clarke, D. M., Downton, A. & Roche, A. (2011). Theone-minute challenge. *Teaching Children Mathematics*, 17(6), 342-349.

De Hevia, M.D., & Spelke, E.S. (2010). Number-space mapping in human infants. *Psychological Science, 21*, 653-660

Dehaene, S. (1997). *The number sense: how the mind creates mathematic*s. New York: Oxford University Press.

Dehaene, S. (2001). Precis of “the number sense.” *Mind and Language, 16,* 16–32.

Diezmann, C. M., & Lowrie, T. (2006). Primary students’ knowledge of and errors on number lines. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), Identities, cultures and learning spaces.(*Proceedings of the 29 th a 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Canberra, pp. 171-178). Sydney: MERGA.

Friso Van-den Bos, I. (2014). *Making sense of numbers. Early mathematics achievement and working memory in primary school children*. Utrech: University of Utrech.

Friso-va den Bos, I., Kroesbergen, EH, Van Luit, JE, Xenidou-Dervou, I Jonkman. LM, Van der Schoot, M. & Lieshout (2015). Longitudinal development of number line estimation and mathematics performance in primary school children. *Journal of Experimental Child Psycho*ly., 134:12-29. doi: 10.1016/j.jecp.2015.02.002.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Byrd-Craven, J. (2008). Development of number line representations in children with mathematical learning disability. Developmental Neuropsychology, 33(3), 277-299. doi:10.1080/87565640801982361

Gervasoni, A. (2005). Opening Doors to Successful Learning for Those Who Are Vulnerable.” In *Mathematics:Celebrating Achievement: Proceedings of the 42nd Annual Conference of the Mathematics Association of Victoria* (MAV), edited by Judy Mousley, Leicha Bragg, and Coral Campbell, (pp. 125–36). Brunswick, Victoria: MAV.

Griffin, S. A. & Case, R. (1996). Evaluating the breadth and depth of training effects when central conceptual structures are taught. En R. Case & Okamoto (Eds.). *The role of central structures in the development of children’s thought* (pp. 83-102). Monographs of the Society for Research in Child Development, 61, serial, 246, 1-2.

Griffin, S., Case, R., & Siegler, R. (1994). Rightstart: Providing the central conceptual prerequisites for first formal learning of arithmetic to students at-risk for school failure. In K. McGilly (Ed.), *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice* (pp. 24-49). Cambridge, MA: Bradford Books MIT Press.

Ineson, E. (2007). Year 6 children: has the new British mathematics curriculum helped their mental computation? *Early child development and care, 177*(5), 541-555.

Ineson, E. (2008). The mental mathematics of trainee teachers in the UK: Patterns and preferences. *The mathematics educator, 11*(1/2), 127-142.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N., & Ramineni, C. (2007). Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research & Practice, 22,* 36 – 46.

LeFevre, J. A., Greenham, S. L., & Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction, 11,* 95–132.

Mazzocco, M, Feigenson L, Halberda J, (2011). Preschoolers' Precision of the Approximate Number System Predicts Later School Mathematics Performance. *PLoS ONE* 6(9): e23749. doi:10.1371/journal.pone.0023749

Navarro, J. I., Aguilar, M., Alcalde, C., Ruiz, G., Marchena, E., & Menacho, I. (2011). Inhibitory processes, working memory, phonological awareness, naming speed, and early arithmetic achievement. *Spanish Journal of Psychology, 14*(2), 580-588.

Opfer, J. E.; Siegler, R. S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. Cognitiv psychology, *55*, 169-195.

Petitto, A. L. (1990). Development of numberline and measurement concepts. *Cognition and Instruction, 7,* 55–78.

Ramani, G. B., & Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*, 79, 375– 394.

Ramani, G. B., Siegler, R. S., & Hitti, A. (2012). Taking it to the classroom: Number board games as a small group learning activity. *Journal of Educational Psychology*, 104, 661-672.

Roushman, L. (2003). The empty number line: a model in search of a learning trajectory. In Thompson, I., *Enhancing Primary Mathematics Teaching*, Open University Press, Maidenhead.

Schneider, M., Grabner, R. H., & Paetsch, J. (2009). Mental number line, number line estimation, and mathematical achievement: Their interrelations in grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology, 101*(2), 359-372. doi:10.1037/a0013840

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75, 428–444.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp 197-212). Boca Ratan, FL: CRC Press.

Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, 14, 237–243.

Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2008). Playing board games promotes low-income children's numerical development. *Developmental Science*, 11, 655–661.

Villarroel, J. D. (2009). The origin and development of numerical thinking. [Origen y desarrollo del pensamiento numérico: Una perspectiva multidisciplinar] *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 555-604.

Vitale, J. M.; Black, J. B. & Swart, M. I. (2014). Applying grounded coordination challenges to concrete learning materials: A study of number line estimation. *Journal of Educational Psychology*, 106(2), 403-418. http://dx.doi.org/10.1037/a0034098

Whyte, R. C., & Bull, R. (2008). Number Games, Magnitude Representation, and Basic Number Skills in Preschoolers. *Developmental Psychology*, 44, (2), 588-596.