

## UM ESTUDO SOBRE FORMAS DE REPRESENTAÇÕES E PENSAMENTO MATEMÁTICO EM UMA AVALIAÇÃO EM FASES DE ATIVIDADES DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Debora Cristiane B. Kirnev - Angela Marta Pereira Das D. Savioli - Keila Tatiana Boni  
[deborabarbosa09@yahoo.com.br](mailto:deborabarbosa09@yahoo.com.br) - [angelamarta@uel.br](mailto:angelamarta@uel.br) - [keilaboni@hotmail.com](mailto:keilaboni@hotmail.com)  
Universidade Estadual de Londrina/ Brasil

Núcleo temático: Ensino e aprendizagem da matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais.

Modalidade: Comunicação Breve (CB)

Nível educativo: terciário

Palavras chave: Educação Matemática. Pensamento Matemático. Registros de Representações. Avaliação em fases.

### Resumo

*Esse trabalho é baseado em estudos acerca da aprendizagem da matemática e do desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático. Desenvolvemos essa pesquisa com estudantes concluintes do Ensino Médio (Terciário) de uma escola pública do norte do Paraná – Brasil. Definimos como objetivo analisar os registros escritos dos estudantes em uma avaliação em fases envolvendo o conteúdo de geometria analítica. A primeira fase foi uma avaliação diagnóstica e a segunda fase a refação das atividades da avaliação diagnóstica após um período de estudos. Em ambas as fases, instigamos os estudantes a um processo de reflexão sobre o nível de dificuldade da atividade realizada, promovendo uma análise sobre seu processo de aprendizagem. Baseamos as análises principalmente nos registros de representações semióticas de Duval (2009, 2011) e na categorização das representações apresentadas nos três mundos da matemática em Tall (2004). Apresentamos nas análises as evidências de pensamento matemático e as formas de representações adotadas pelos estudantes diagnosticando as dificuldades apresentadas. A metodologia é qualitativa de cunho descritivo e interpretativo.*

### Introdução

O presente trabalho apresenta o resultado de uma investigação aplicada a estudantes concluintes do Ensino Médio (Terciário) de uma escola pública do norte do Paraná - Brasil, com o objetivo de analisar os registros escritos em uma avaliação em fases envolvendo o conteúdo de geometria analítica, com base nos registros de representações semióticas (DUVAL, 2009, 2011) e no desenvolvimento do pensamento matemático por meio da

categorização do processo de aprendizagem utilizada na investigação, denominada de “os três mundos da matemática” (TALL, 2004).

Adotamos metodologia de pesquisa de natureza qualitativa, ou seja, analisamos o processo de resolução desenvolvido pelos estudantes e não somente a resposta apresentada para a atividade, interpretando os dados obtidos com base nos referenciais teóricos que adotamos.

### **Referencial Teórico**

Nessa pesquisa nos fundamentamos no estudo de David Tall (2004) acerca de aspectos da natureza do pensamento matemático avançado (PMA). O autor afirma que existe mudança do pensamento matemático elementar (PME) para o PMA quando um indivíduo se apropria de uma linguagem formal para definir e provar objetos matemáticos. Com base nisso, o que diferencia o PME do PMA são as mudanças dos estágios da *descrição*, aplicados em situações de aprendizagem, para a *definição*, utilizada na matemática formal.

A respeito disso, Tall (2004) apresenta estudos sobre investigações a respeito do desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático, por meio de um modelo composto de etapas do processo de pensamento matemático, denominado de “*Três Mundos da Matemática*”, que caracteriza aspectos do desenvolvimento do PME para o PMA.

O primeiro mundo caracterizado é denominado de *Conceitual Corporificado* e trata dos aspectos de percepção e observação das propriedades dos objetos do mundo externo, assim como, a identificação de padrões, semelhanças, diferenças, recorrendo, por exemplo, a exemplificações, representações gráficas e uso da linguagem corrente.

Quanto ao mundo *Proceitual Simbólico*, associa-se a linguagem simbólica matemática, sendo este o mundo dos símbolos e suas manipulações no cálculo da álgebra, aritmética, ou seja, aplicam-se procedimentos mais elaborados, tomando como base o rigor matemático.

No terceiro mundo, denominado de *Formal Axiomático*, temos um desenvolvimento matemático baseado em axiomas, definições e provas de teoremas. Ou seja, diz respeito a um mundo relacionado com a matemática formal.

Esse modelo apresenta diferentes formas de lidar com a matemática, proporcionando uma interpretação da aprendizagem que vai desde a matemática elementar, abordada na Educação Básica, até a matemática formal do Ensino Superior (TALL, 2008).

Para interpretarmos as resoluções dos sujeitos com base, sobretudo, em Tall (2004), recorreremos à teoria de representações semióticas. De acordo com Duval (2011), em matemática, as representações semióticas possibilitam uma diversidade de aplicações e caracterizações da atividade matemática do ponto de vista cognitivo. Com base nisso, os registros de representações semióticas são aplicados para análise das representações simbólicas por meio da exteriorização das representações mentais de um indivíduo. Assim, indícios de representações mentais e formas de pensamento se tornam acessíveis por meio dos registros de representação semiótica.

Para Duval (2011), um registro trata-se de um campo de variação de representação semiótica em função de elementos cognitivos que lhe são próprios. Duval (2009) apresenta três atividades cognitivas fundamentais para que haja a representação de um registro por meio de um sistema semiótico: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

Segundo Duval (2011), a formação de uma representação identificável está atrelada, por exemplo, à linguagem natural que representa o enunciado de um problema, ou ainda, a um desenho de uma figura geométrica por uma representação gráfica, sendo que nesse processo ocorre a seleção dos dados do conteúdo abordado em uma atividade matemática.

Quanto aos tratamentos, segundo Duval (2011, p.16) "são transformações de representações dentro de um mesmo registro", e conversões "são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos" (DUVAL, 2011, p. 16).

### **Procedimentos Metodológicos**

Desenvolvemos uma pesquisa de natureza qualitativa de cunho descritivo e interpretativo. Os sujeitos da pesquisa convidados a participar da investigação são trinta e cinco estudantes (codificados por, E1, E2, ..., E35) de uma escola pública do norte do Paraná, Brasil, que cursam o terceiro ano do Ensino Médio (terciário).

A aplicação da proposta da atividade ocorreu em duas fases. Para De Lange (1987), a prova em duas fases oportuniza aos estudantes refletir a respeito de seu próprio trabalho.

A primeira fase foi uma avaliação diagnóstica, aplicada sem consulta, e, posteriormente, foi realizada uma pré-análise considerando o processo de resolução e as dúvidas decorrentes do desenvolvimento das atividades. Com base nesse procedimento, desenvolvemos questões

norteadoras para discussão e investigação na segunda fase, que ocorreu após quinze dias, oportunizando a cada estudante tempo suficiente para estudar e se preparar.

A segunda fase consistiu na refacção das atividades da avaliação diagnóstica. Vale ressaltar que em ambas as fases investigamos um processo de reflexão por parte dos estudantes a respeito do conteúdo abordado e do nível de dificuldade da atividade realizada, promovendo uma análise sobre seu processo de aprendizagem.

Como supracitado, nessa segunda fase foi devolvida a mesma avaliação da primeira fase, porém, nessa etapa os estudantes contaram com comentários, em anexo à avaliação, descrevendo as principais dificuldades relacionadas com os conteúdos que identificamos na pré análise anterior. Assim, considerando esses comentários e em posse de material de pesquisa e demais materiais que julgasse necessário, o estudante pôde realizar e/ou modificar as resoluções das atividades propostas.

No período entre as duas fases, os estudantes foram orientados a pesquisar em outras fontes e, além disso, contaram com as aulas regulares do professor regente da turma que estava trabalhando com os conteúdos envolvidos no instrumento de pesquisa.

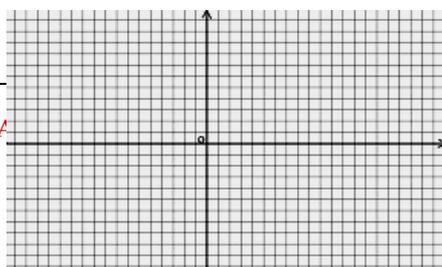
Para que o material produzido pelos estudantes pudessem ser utilizados na pesquisa, foi necessário a autorização dos pais e/ou responsáveis por meio de um termo de consentimento. Recebemos a autorização dos responsáveis de dez estudantes e, por esse motivo, selecionamos os registros escritos apenas desses estudantes para apresentarmos no presente trabalho.

O instrumento de pesquisa foi composto por dez questões dissertativas abordando conteúdos de Geometria Analítica. Para esse trabalho, selecionamos a questão quatro para apresentarmos os resultados obtidos com as análises, questão essa destacada a seguir:

O teorema de Pitágoras afirma que: “o quadrado da hipotenusa é equivalente a soma dos quadrados dos catetos”, em termos notacionais temos que  $h^2 = c_1^2 + c_2^2$ . Ao calcularmos a distância entre dois pontos podemos recorrer ao teorema de Pitágoras, ou ainda, a outros recursos da matemática. Dados os pontos  $A=(1, 3)$ ,  $B=(9, 9)$ ,  $C=(-3, 1)$  e  $D(-5, -4)$ , determine a distância  $D_{AB}$  e  $D_{CB}$  correspondentes as medidas dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CB}$  respectivamente.

(Observação: Se julgar necessário pode utilizar o plano cartesiano.)

a)  $D_{AB} =$



b)  $D_{CB} =$

Nível de dificuldade: ( ) fácil      ( ) médio      ( ) difícil

Comentários: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

***Quadro 1: Baseadas em questões propostas em GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. R. J. Matemática Fundamental: Volume único. São Paulo: FTD, 1994.***

Na sequência apresentamos resultados das análises de produções escritas dos estudantes, E1, E2, E7, E15, E17, E18, E19, E24, E32 e E35.

### **Análises**

Nesse trabalho optamos em analisar, segundo o nosso referencial teórico, a primeira fase dessa proposta de tarefa. Posteriormente, teceremos considerações sobre a segunda fase.

Aos analisarmos os registros escritos da questão selecionada na primeira fase, detectamos que parte dos participantes não desenvolveu a questão proposta:

**Grupo 1:** estes foram codificados por E1, E15, E19, E32, e justificaram que “*não sei resolver*” e “*não estou me lembrando da forma de resolução*”.

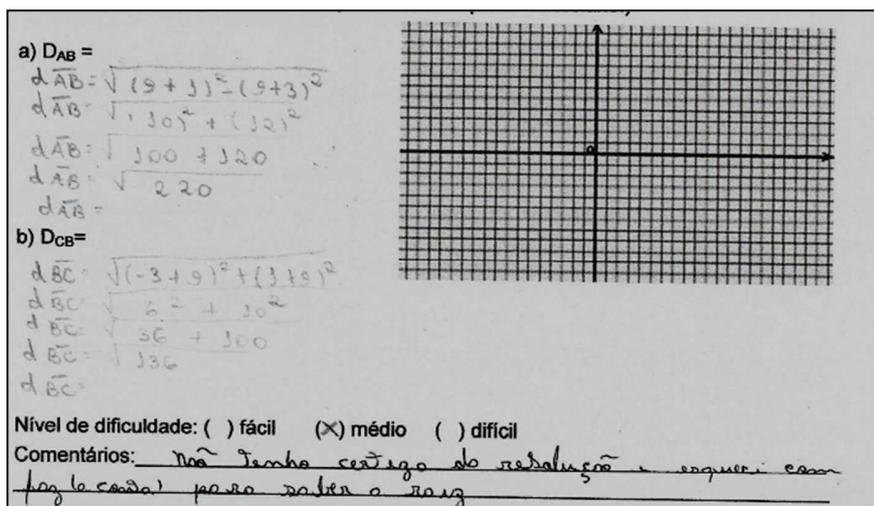
Os demais estudantes que apresentaram registros escritos foram agrupados de acordo com características comuns em suas resoluções:

**Grupo 2:** a seguir apresentamos um exemplo desse agrupamento.

a)  $D_{AB} =$   
 $d_{AB} = \sqrt{(9+3)^2 - (9+3)^2}$   
 $d_{AB} = \sqrt{10^2 + 10^2}$   
 $d_{AB} = \sqrt{100 + 100}$   
 $d_{AB} = \sqrt{200}$   
 $d_{AB} =$

b)  $D_{CB} =$   
 $d_{BC} = \sqrt{(-3+9)^2 + (1+9)^2}$   
 $d_{BC} = \sqrt{6^2 + 10^2}$   
 $d_{BC} = \sqrt{36 + 100}$   
 $d_{BC} = \sqrt{136}$   
 $d_{BC} =$

Nível de dificuldade: ( ) fácil (X) médio ( ) difícil  
 Comentários: Não temo certeza de resolução, esqueci com  
 log (o caso) por ser sobre o raio



**Figura 1: Registro escrito do estudante E17**

Este estudante utiliza da linguagem simbólica matemática por meio da aplicação da fórmula para a distância entre dois pontos, porém segundo Duval (2011), apresenta apenas uma representação identificável, por não conseguir realizar o tratamento no registro apresentado em ambos os itens. Analisando segundo Tall (2004), as dificuldades em desenvolver as operações aritméticas, realizando a substituição errônea na fórmula da distância, comprometendo o procedimento de cálculo, demonstra que o mesmo percebe, observa e aplica a fórmula de resolução, sendo estas caracterizações do mundo *Conceitual Corporificado*.

Os Estudante E18 e E24 tiveram uma resolução similar a essa com as mesmas dificuldades.

**Grupo 3:** a seguir apresentamos um exemplo desse agrupamento.

a)  $D_{AB} = d_{AB} = \sqrt{(9-1)^2 + (9-3)^2}$   
 $d_{AB} = \sqrt{8^2 + 6^2}$   
 $d_{AB} = \sqrt{64 + 36}$   
 $d_{AB} = \sqrt{100}$   
 $d_{AB} = 10$

b)  $D_{CB} = d_{CB} = \sqrt{(-3-9)^2 + (2-9)^2}$   
 $d_{CB} = \sqrt{(-12)^2 + (-8)^2}$   
 $d_{CB} = \sqrt{144 + 64}$   
 $d_{CB} = \sqrt{208}$   
 $d_{CB} =$

Nível de dificuldade: ( ) fácil (X) médio ( ) difícil

Comentários: ~~Apesar das cálculos de raiz quadrada~~  
~~terem me confundido, esqueci de usar o sinal~~  
~~na equação que multiplicamos para simplificar, por isso comecei~~  
~~que fazer errado e, por isso, a final da questão B que~~  
~~me confundiu~~

Figura 2: Registro escrito do estudante E2

Nesse caso, o estudante apresenta a utilização da linguagem simbólica matemática por meio da aplicação da fórmula para a distância entre dois pontos, na qual exprime característica do mundo *Proceitual Simbólico*, segundo Tall (2004). Porém, no item b), o estudante apresenta dificuldades em lidar com as coordenadas localizadas no segundo quadrante, fazendo a substituição errônea na fórmula da distância e comprometendo o procedimento de cálculo. Isso demonstra que o estudante realizou, segundo Duval (2011), uma representação identificável, porém não conseguiu realizar o tratamento no registro apresentado. O Estudante E7 teve uma resolução similar a essa, manifestando as mesmas dificuldades.

**Grupo 4:** a seguir apresentamos um exemplo desse agrupamento.

a)  $D_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$   
 $D_{AB} = \sqrt{(9 - 1)^2 + (9 - 3)^2}$   
 $D_{AB} = \sqrt{8^2 + 6^2}$   
 $D_{AB} = \sqrt{64 + 36}$   
 $D_{AB} = \sqrt{100}$   
 $D_{AB} = 10.$

b)  $D_{CB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$   
 $D_{CB} = \sqrt{(9 + 3)^2 + (9 - 1)^2}$   
 $D_{CB} = \sqrt{8^2 + 8^2}$   
 $D_{CB} = \sqrt{64 + 64}$   
 $D_{CB} = \sqrt{128}$   
 $D_{CB} = 11,3.$

Nível de dificuldade: ( ) fácil  médio ( ) difícil  
 Comentários: \_\_\_\_\_

**Figura 3: Registro escrito do estudante E35**

Esse estudante utiliza a linguagem simbólica matemática por meio da aplicação da fórmula para a distância entre dois pontos, mas diferente do que foi apresentado nos registros anteriores, há preocupação em apresentar a fórmula de resolução. Segundo Duval (2011), podemos verificar o processo de tratamento no registro apresentado em ambos os itens, porém, o item b), está parcialmente correto. Analisando segundo Tall (2004), foram desenvolvidas as operações aritméticas, realizando a substituição correta na fórmula da distância com o comprometimento do procedimento de cálculo, assim entendemos que o estudante apresenta características do mundo *Proceitual Simbólico*.

### Considerações

Faremos algumas colocações sobre a segunda fase, que ocorreu após um período de estudo e reflexão, tecendo comparações com os resultados observados na primeira fase.

No dia da reaplicação da questão analisada na primeira fase, os estudantes foram questionados sobre como realizar as operações aritméticas envolvidas na questão e como se extrai a raiz quadrada exata e aproximada de um número. Ao analisarmos os registros dos estudantes na segunda fase, obtivemos os seguintes resultados:

<b>Grupo 1</b>	E1 não tentou refazer a atividade;
----------------	------------------------------------

	<p>E15 apenas marcou os pontos indicados no enunciado no plano cartesiano demonstrando uma nova forma de percepção do enunciado;</p> <p>E19 apresentou uma resolução similar à apresentada pelo estudante E17 na primeira fase, em que não desenvolveu corretamente os itens propostos na questão;</p> <p>E32 desenvolveu corretamente ambos os itens na segunda fase, demonstrando compreensão da atividade proposta.</p>
<b>Grupo 2</b>	<p>E17 não modificou sua resolução;</p> <p>E18 Desenvolveu corretamente o primeiro item e parcialmente correto o segundo item, progredindo em comparação a resolução anterior;</p> <p>E24 Desenvolveu parcialmente correto ambos os itens, progredindo em comparação a resolução anterior.</p>
<b>Grupo 3</b>	<p>E2 fez a correção do item b, realizando a fatoração e simplificação da raiz irracional;</p> <p>E7 fez apenas a correção do item b, sem realizar a fatoração e a simplificação da raiz.</p>
<b>Grupo 4</b>	<p>E35 não modificou a resolução.</p>

**Quadro 2: Síntese das resoluções da questão 4 na segunda fase**

Em geral, os estudantes progrediram nas suas resoluções se comparados ao desenvolvimento realizado na primeira fase, demonstrando que a metodologia empregada contribuiu para o processo de reflexão desses estudantes em relação a aprendizagem desse conteúdo.

### **Referências bibliográficas**

DUVAL, R. (2011). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. 8. ed. pp. 11-33. São Paulo: Papirus.

DUVAL, R. (2009) *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Livraria da Física.

TALL, D. (2004). *Thinking through three worlds of mathematics*. Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. pp. 281–288. Bergen, Norway: [s.n.].

TALL, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics education research journal*, 20 (2), 5-24.

DE LANGE, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht: OW &OC.