

Evolución de las estrategias en la resolución de problemas de estructura multiplicativa en Educación Primaria

Pedro Ivars; Ceneida Fernández

pere.ivars@ua.es; ceneida.fernandez@ua.es

Universidad de Alicante

RESUMEN

Este estudio se centra en examinar la evolución de las estrategias utilizadas por los estudiantes de primero a sexto curso de Educación Primaria cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa. 273 estudiantes de Educación Primaria resolvieron un cuestionario con problemas de estructura multiplicativa. Los resultados indican la sustitución de diferentes estrategias para el uso prioritario de los algoritmos a lo largo de los cursos, vinculado también a la continuación del uso de estrategias aditivas incorrectas y a la aparición del uso incorrecto del algoritmo inverso. Este hecho parece indicar que el énfasis sobre el algoritmo lleva a algunos estudiantes a no centrar su atención sobre la relación entre las cantidades para determinar la adecuación del uso del algoritmo.

Problemas de estructura multiplicativa, estrategias de resolución, Educación Primaria, evolución

Problemas de estructura multiplicativa

En el campo de las estructuras multiplicativas, Vergnaud (1997) identifica tres tipos de problemas multiplicativos diferentes: i) Isomorfismo de medidas, problemas cuya estructura consiste en una proporción entre dos espacios de medidas M1 y M2; ii) Un solo espacio de medidas, problemas en los que se establece una correspondencia entre dos cantidades y un operador escalar designado por la palabra “veces”, y iii) Producto de medidas, problemas cuya estructura consiste en la composición cartesiana de dos espacios de medidas M1 y M2 en un tercero, M3.

En los problemas de isomorfismo de medida existe una relación entre cuatro cantidades, dos cantidades son medidas de un cierto tipo y el resto son medidas de otro tipo (Vergnaud, 1997). Vergnaud (1983) distingue cuatro tipos de problemas en los problemas de isomorfismo de medidas: multiplicación, división partitiva, división medida y problemas de reglas de tres (estos últimos no serán objeto de estudio en el presente trabajo). En los problemas de multiplicación (figura 1a), como por ejemplo: *Si un kilogramo de plátanos vale 2€. ¿Cuánto valen 5 kilogramos?*, se debe trasladar la relación entre 1 y 2 a la relación entre 5 y x para encontrar la incógnita (que es el total de objetos). En los problemas de división partitiva (figura 1b), como por ejemplo: *Ferran compra 4 fichas para la feria que le cuestan 8 euros. Si todas tienen el mismo precio, ¿cuánto le ha costado cada ficha?*, hay que encontrar el valor de la unidad (o número de objetos por grupo). En los problemas de división medida, como por ejemplo: *Júlia ha puesto los 20 lápices de las bandejas dentro de unos botes. Si ha puesto 5 lápices en cada bote, ¿cuántos botes ha utilizado?*, la incógnita es el número de grupos que se forman (Figura 1c).

Kg	Euros	Fichas	Euros	Botes	Lápices
1	2	1	x	1	4
5	x	4	8	x	20

1a. Problemas tipo multiplicación *1b. Problemas tipo división partitiva* *1c. Problemas tipo división medida*

Figura 1. Estructura general de problemas isomorfismo de medida (Vergnaud, 1997)

En los problemas denominados de un único espacio de medidas (Vergnaud, 1997) o de comparación multiplicativa (Nesher, 1992), aparecen dos cantidades de una única magnitud o espacio de medidas que se ven afectadas por un escalar que normalmente viene designado por la expresión lingüística “veces”. Una de estas cantidades actúa como referente y la otra como comparado y la comparación entre ambas se realiza mediante un escalar (b). La estructura general de este tipo de problemas, en función de cuál sea la incógnita que presentan, se muestra en la figura 2, y la dirección de la comparación puede ser “veces más que” y “veces menos que”.

Magnitud	Magnitud	Magnitud
a	X	a
X	c	c
b	b	X

Problemas tipo multiplicación (incógnita cantidad comparada) *Problemas tipo división (incógnita cantidad referente)* *Problemas tipo división (incógnita escalar)*

Figura 2. Estructura general problemas un único espacio de medida

En los problemas de multiplicación de esta categoría, como por ejemplo: *Para realizar una pancarta la clase de 3ºA utiliza 2 metros de tela. La clase de 5ºB utiliza 3 veces más tela que la de 3ºA. ¿Cuánta tela utiliza la clase de 5ºB?*, la incógnita X es una medida (la cantidad comparada). En los problemas de división, la incógnita X es una medida (la cantidad referente), como por ejemplo en: *Para realizar una pancarta la clase de 5ºB utiliza 6 metros de tela. La clase de 5ºB utiliza 4 veces más tela que la de 3ºA. ¿Cuánta tela utiliza la clase de 3ºB?*, o un escalar como en: *Para realizar una pancarta la clase de 3ºA ha utilizado 2*

metros de tela mientras que la de 5ºB ha utilizado 6 metros. ¿Cuántas veces más tela ha utilizado la clase de 5ºB que la de 3ºA? (Figura 2).

La siguiente categoría es el denominado producto de medidas por Vergnaud y está formada por estructuras en las que la relación multiplicativa entre dos medidas elementales (M1 y M2) da como resultado la creación de una nueva medida producto (M3). De esta manera y en función de la incógnita que se deba encontrar, Vergnaud distingue dos tipos de problemas; los problemas de multiplicación en los que se conocen las dos medidas iniciales (a , b) y se busca la medida producto X , como por ejemplo: *A las clases de baile asisten 6 chicas y 4 chicos. ¿Cuántas parejas de baile diferentes se pueden realizar?* y los problemas de división en los que se conoce la medida producto c y una de las dos medidas iniciales (por ejemplo a) y se busca la otra medida X , como en: *La empresa del comedor ofrece 20 menús diferentes formados por un primer y un segundo plato. Si la empresa cocina 5 primeros platos diferentes, ¿cuántos segundos platos cocina?* (Figura 3).



Figura 1. Estructura general problemas producto de medidas

Aunque estos problemas, inicialmente clasificados por Vergnaud, han sido posteriormente reclasificados por otros autores (Greer, 1992), en este trabajo se va a considerar las categorías y tipos de problemas mostrados en la Tabla 1. Este trabajo se centra en examinar cómo evolucionan las estrategias utilizadas por los estudiantes a lo largo de la educación primaria en los problemas de estructura multiplicativa.

Tabla 1. Clasificación de los problemas de estructura multiplicativa

Categoría	Tipo	Incógnita
Isomorfismo de medidas	Multiplicación	Total de objetos
	División Partitiva	Número de objetos por grupo
	División medida	Número de grupos
Comparación multiplicativa Un único espacio de medidas	Multiplicación	Una medida (comparado)
	División	Una medida (referente)
	División	Un escalar
Producto de medidas	Multiplicación	Medida Producto (cantidad compuesta. Se conocen las dos medidas elementales o componentes)
	División	Una medida elemental (uno de los componentes)

Estrategias usadas por los estudiantes de educación primaria

Investigaciones posteriores a la de Vergnaud han establecido niveles de dificultad para estas categorías identificando que los problemas más fáciles son los de isomorfismo de medidas y los más difíciles los de producto de medidas (Nesher, 1992). Por otra parte, las investigaciones también han centrado su atención en las estrategias utilizadas por los estudiantes de educación primaria. Así, Mulligan (1992) con problemas de las tres categorías y en estudiantes de 7 y 8 años, identificó tres grupos de estrategias:

- Modelización con conteo: representación de la acción o relación descrita en el problema con algún material concreto o con los dedos
- Conteo: La formación de grupos equivalentes para representar cantidades del

problema. También estarían incluidos los conteos siguiendo un patrón, o conteo a saltos. En esta misma estrategia básica también incluye la multiplicación como suma de sumandos iguales y la división como restas sucesivas

- Aplicación de hechos numéricos conocidos y derivados de la adición y multiplicación.

Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Epton (1999) afirmaron que los estudiantes van sustituyendo gradualmente las estrategias de modelización por las de conteo. Estos investigadores además indicaron que es más difícil aplicar el conteo en los problemas de estructura multiplicativa que en los de estructura aditiva. Neuman (1999) subrayó que el conteo es una de las estrategias más frecuentemente utilizadas en alumnado de 2º curso habiendo una progresión desde el uso de las estrategias de conteo hasta el uso de la más eficiente, hechos numéricos conocidos (Verschaffel, Greer y Torbeyns, 2006).

Mulligan (1992) con problemas de las tres categorías (alumnos de 7 y 8 años) también mostró algunas dificultades de los estudiantes: fijarse en palabras clave del enunciado, elegir la operación en función del tamaño de los números o el uso de hechos numéricos incorrectos. Por otra parte, Verschaffel y De Corte (1997) en la revisión realizada de la literatura destacan que las estrategias incorrectas más comunes utilizadas en los problemas de estructura multiplicativa son: la estrategia aditiva, uso de todos los números del enunciado y fijarse en las palabras clave del enunciado.

Aunque se han realizado otras investigaciones aportando información sobre las estrategias utilizadas por los estudiantes, éstas se han centrado en la identificación de estrategias en tipos particulares de problemas. Por ejemplo en los problemas de división medida y división partitiva (tipos de problemas de isomorfismo de medida) en alumnos de 2º a 6º curso (7 a 12 años) (Neuman 1999), o en los problemas de comparación multiplicativa con estudiantes de 5º y 6º curso (Castro, 1995). En el caso particular de los problemas de comparación multiplicativa, las estrategias correctas empleadas con más frecuencia por los niños de 5º y 6º curso son: a) Multiplicar referente por escalar en problemas de comparación de aumento con comparado desconocido, b) Multiplicar comparado por escalar en problemas de comparación de disminución de referente desconocido, c) Dividir referente entre escalar en problemas de comparación de disminución de comparado desconocido, d) Dividir comparado entre escalar en problemas de comparación de aumento de referente desconocido, e) Dividir comparado entre referente en problemas de escalar desconocido, tanto de aumento como de disminución.

También Castro (1995) identificó estrategias erróneas en la resolución de problemas de comparación multiplicativa en alumnado de 5º y 6º curso (10 a 12 años): (a) Resolver los problemas de comparación sumando o restando al referente el escalar (Aditiva), (b) Restar el referente del comparado cuando el escalar es desconocido (Aditiva), (b) Comparar el referente con la diferencia entre el comparado y el referente, (c) En los problemas en los que se desconoce el referente se da como solución la operación inversa (Algoritmo inverso). En cuanto a los problemas de producto de medidas, Nesher (1992) con alumnos de 3º a 6º curso obtuvo que uno de los errores más comunes es realizar una suma cuando lo que se requiere es la realización de una multiplicación.

Aunque estas investigaciones han identificado estrategias correctas e incorrectas usadas por los estudiantes de educación primaria en las categorías de problemas o en tipos particulares de problemas y en un rango de edad específico, la evolución de las estrategias en las distintas categorías a lo largo de la educación Primaria (alumnos de 6 a 12 años) es un campo poco explorado. Teniendo en cuenta estos estudios previos, el objetivo de esta investigación es examinar la evolución del tipo de estrategias utilizadas por estudiantes de Educación Primaria (desde 1º a 6º curso) cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa. El foco será identificar características de la evolución de las estrategias que utilizan en los diferentes tipos de problemas.

Método

Participantes

Participaron 273 estudiantes de educación primaria de seis a doce años. El número de

participantes clasificados por curso se detalla en la tabla 2:

Tabla 2. Participantes por curso

CICLO	CURSO	PARTICIPANTES
Primero	Primero	42
	Segundo	44
Segundo	Tercero	47
	Cuarto	47
Tercero	Quinto	52
	Sexto	41

Instrumento

Los participantes contestaron a un cuestionario formado por 8 problemas, uno de cada tipo en las tres categorías (tabla 3). Se diseñaron 3 modelos de cuestionario, uno para cada ciclo. La diferencia radicaba en el tamaño de los números enteros de los enunciados. Para el primer ciclo se emplearon números enteros menores de 20, para el segundo ciclo números menores de 50 y para el tercer ciclo números menores de 200. En la tabla 3 se presentan los enunciados propuestos para el 2º ciclo.

Tabla 3. Problemas propuestos en el cuestionario de segundo ciclo

Categoría	Tipos	Problema
Isomorfismo de medidas	Multiplicación	En el patio del colegio hay 17 farolas. Si en cada farola hay 4 bombillas. ¿Cuántas bombillas hay en total?
	División Partitiva	Juan tiene 39 caramelos que quiere repartir en partes iguales entre sus 3 mejores amigas. ¿Cuántos caramelos dará a cada una de ellas?
	División medida	Ana quiere repartir 35 caramelos entre sus amigas. Si le da 7 caramelos a cada una de ellas, ¿cuántas amigas tiene Ana?
Comparación multiplicativa	Multiplicación	La clase de 3ºA para confeccionar sus disfraces de superhéroes ha utilizado 15 metros de tela. La clase de 5º B ha utilizado 4 veces más de tela que la de 3º A. ¿Cuánta tela ha empleado la clase de 5ºB?
	División	Este año los alumnos de 5º B para realizar un mural han utilizado 3 veces más de papel continuo que utilizaron el año pasado. Si este año se han utilizado 36 metros de papel. ¿Cuántos metros de papel se utilizó el año pasado?
	División	El padre de Julián tiene 42 años y Julián tiene 6 años. ¿Cuántas veces más años tiene el padre que el hijo?
Producto de medidas	Multiplicación	El menú escolar está formado por dos platos principales, el primero y el segundo. Si la empresa que realiza el menú escolar tiene 12 primeros platos y 11 segundos. ¿Cuántos menús diferentes puede realizar?
	División	La empresa escolar combinando los primeros y los segundos platos ofrece 42 menús diferentes. Si hay 7 primeros platos diferentes, ¿cuántos segundos platos hay?

Para cada uno de los tres ciclos realizamos 3 diferentes modelos de cuestionario (modelos tipo A, B y C) alterando el orden de presentación de los problemas. Los estudiantes dispusieron de 60 minutos para resolver los problemas recibiendo como única instrucción la conveniencia de justificar aquello que se hiciese. Las únicas dudas que se resolvieron fueron aquellas que hacían referencia a vocabulario incluido en los enunciados.

Análisis

Revisamos las estrategias usadas por los alumnos tanto correctas como incorrectas. El procedimiento seguido consistió, en un primer momento, en un análisis conjunto por parte de dos investigadores de una muestra de respuestas a los diferentes problemas, para generar descriptores de las estrategias que parecían estar utilizando los estudiantes en cada tipo de problema. Estos descriptores para cada problema se fueron refinando según se iban analizando nuevas respuestas. Este proceso se repitió para cada uno de los problemas, y finalmente, se consideraron las estrategias de manera conjunta para ver si había evidencia de solapamiento entre ellas.

Agrupamos en cinco categorías las estrategias correctas: *i)* modelización, *ii)* conteo, *iii)* hechos numéricos *iv)* uso del algoritmo y *v)* multiplicación como suma de sumandos iguales. A continuación se ejemplifican estas estrategias.

Modelización.

En este tipo de estrategia los alumnos utilizan una representación gráfica para representar la relación entre las cantidades. Esta estrategia adoptó diferentes formas según el tipo de problema. Se obtuvieron tres subtipos:

- a. *Agrupamiento*. Estrategia utilizada en los problemas de isomorfismo de medidas de multiplicación en la que se forman grupos con el mismo número de elementos. Posteriormente se cuentan todos los elementos que se tienen. Por ejemplo, el estudiante de la Figura 4 forma 4 grupos (farolas) con 3 bombillas en cada una y posteriormente cuenta el número total de bombillas.

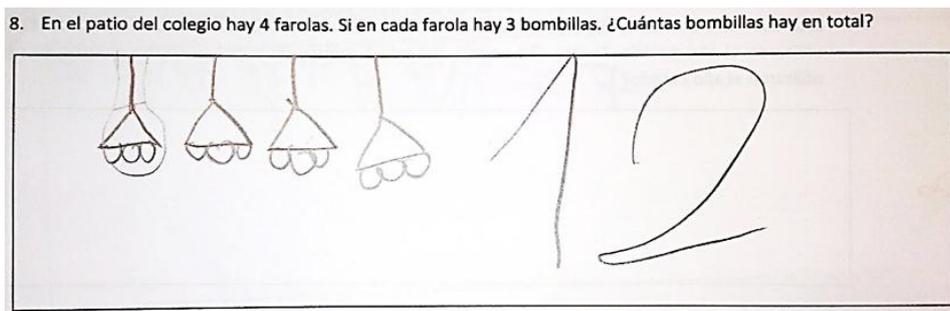


Figura 4. Estrategia Modelización Agrupamiento (2º curso)

- b. *Reparto*. Utilizada en los problemas de isomorfismo de medidas de tipo división partitiva. Para la resolución del problema el estudiante realiza una modelización en la que va repartiendo cada elemento en los grupos y posteriormente cuenta los elementos que tiene el grupo. El estudiante de la Figura 5 reparte un caramelo a cada grupo, representado por el dibujo de un niño, hasta que ya no le quedan caramelos para repartir. Posteriormente cuenta los caramelos en cada grupo y da como respuesta “dos a cada uno”.

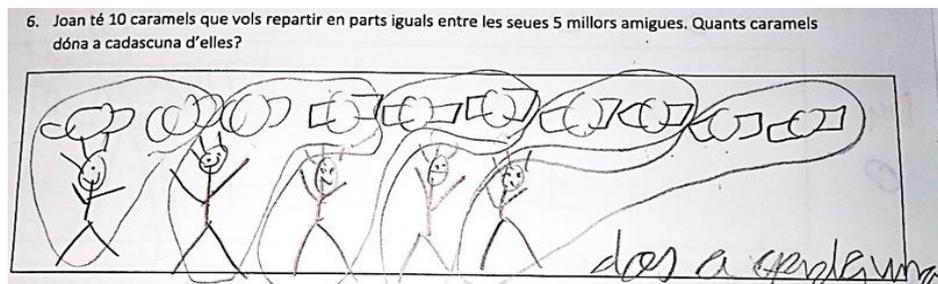


Figura 5. Estrategia Modelización- reparto (2º curso)

- c. *Medida*. Estrategia empleada en problemas de isomorfismo de medidas de división medida (figura 6) y también en los problemas de división partitiva. El estudiante realiza una representación gráfica del total de caramelos y los agrupa para dar como respuesta el número total de grupos que obtiene. En el ejemplo de la Figura 6 el estudiante representa los 8 caramelos y los agrupa de 2 en 2 dando por respuesta

los grupos que ha realizado "a 4 amigas le puede dar".

3. Ana quiere repartir 8 caramelos entre sus amigas. Si le da 2 caramelos a cada una de ellas, ¿cuántas amigas tiene Ana?

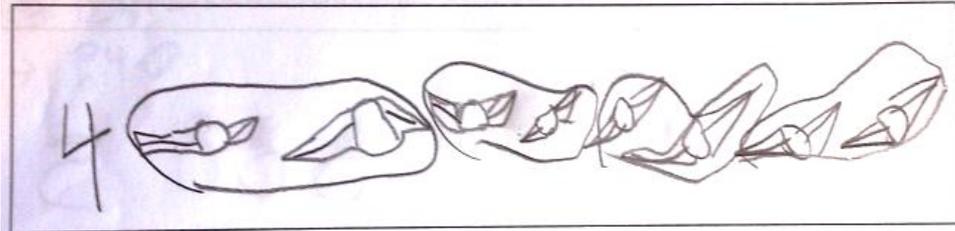


Figura 6. Estrategia modelización medida (1er curso)

Conteo

Las resoluciones mediante este tipo de estrategias se han empleado en los problemas de tipo isomorfismo de medidas división partitiva y división medida que adoptan diferente forma según el tipo de problema. Se han considerado dos subtipos.

- a. *Conteo a saltos*: Por ejemplo el estudiante de la Figura 7 cuenta de 3 en 3 hasta que se llega al número proporcionado para posteriormente ofrecer como solución el número de grupos formados.

6. Joan té 39 caramels que vols repartir en parts iguals entre les seues 3 millors amigues. Quants caramels dóna a cadascuna d'elles?

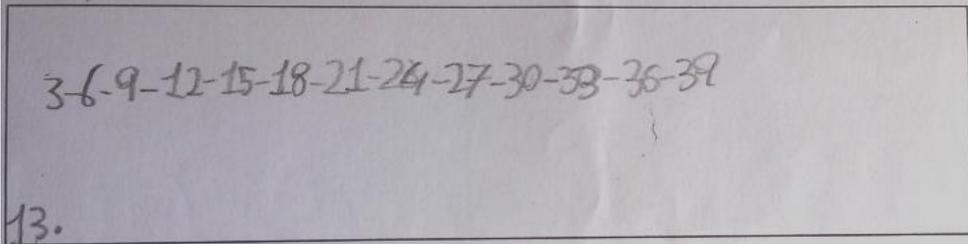


Figura 7. Estrategia conteo a saltos (3er curso)

- b. *Conteo por ensayo y error*: Se realizan tantos grupos como el problema indica probando con un número de objetos determinado cada vez. Cuando el conteo coincide con el número total de objetos responde al problema con el número de objetos que hay en cada grupo. En este caso el estudiante, al ser cuestionado verbalmente por el investigador por su estrategia, muestra contando con los dedos que si le daba 1 caramelo a cada amiga no llegaba a 10 y por eso le daba 2 a cada amiga y los estaba repartiendo todos (figura 8)

2. Joan té 10 caramels que vols repartir en parts iguals entre les seues 5 millors amigues. Quants caramels dóna a cadascuna d'elles?

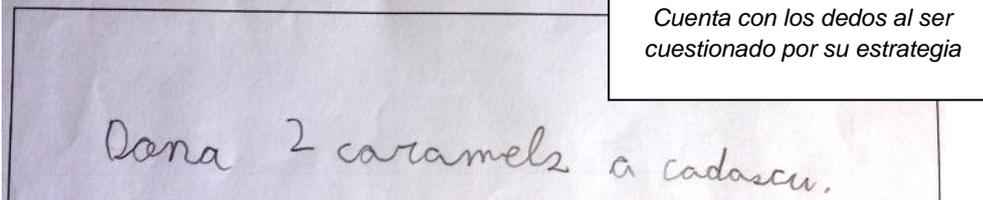


Figura 8. Estrategia conteo por ensayo error (1er curso)

Hechos numéricos

Esta estrategia implica el uso de las tablas de multiplicar. Se ha observado su uso en los problemas de isomorfismo de medidas de tipo división medida (figura 9), así como en los de comparación multiplicativa en los que se busca el referente o el escalar. En el ejemplo se observa cómo el estudiante ha realizado el algoritmo de la multiplicación (aunque posteriormente lo borró) para comprobar que si reparte 7 caramelos a 5 amigas, ha repartido los 35 caramelos de que disponía y ofrece la respuesta correcta.

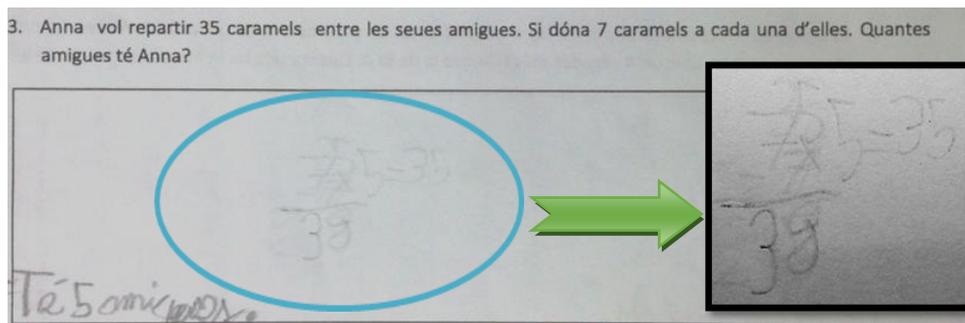


Figura 9. Estrategia hechos numéricos (3er curso)

Algoritmo

En este tipo de resolución de los problemas, detectada para todas las categorías a partir de tercer curso, los estudiantes utilizan el algoritmo. Por ejemplo el alumno de la Figura 10, multiplica los 12 primeros platos del menú escolar con los 11 segundos para responder al total de menús diferentes que pueden realizarse.

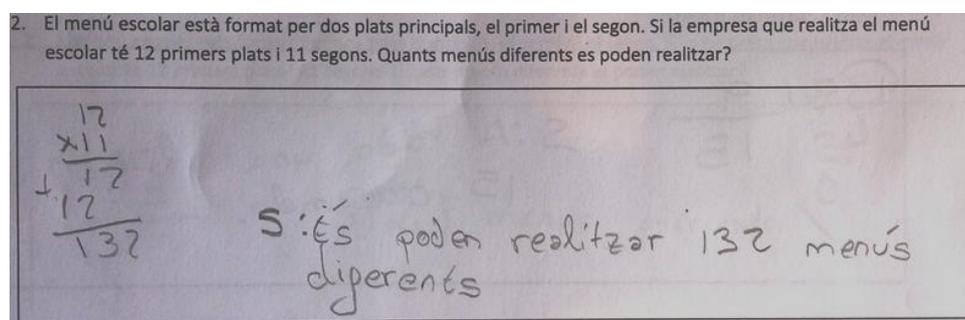


Figura 10. Estrategia algoritmo (3er curso)

Multiplicación como suma de sumandos iguales

Se utilizan la multiplicación como suma de sumandos iguales. La utilización de esta estrategia se ha detectado en los problemas de la categoría isomorfismo de medidas de tipo multiplicación y división medida, en la categoría de comparación multiplicativa de tipo multiplicación y de división en los que la incógnita es el referente y en la categoría de producto de medidas en los problemas de tipo multiplicación. En el ejemplo mostrado en la figura 11, el estudiante suma las bombillas de cada farola tantas veces como farolas le indica el problema que hay, para dar la respuesta correcta.

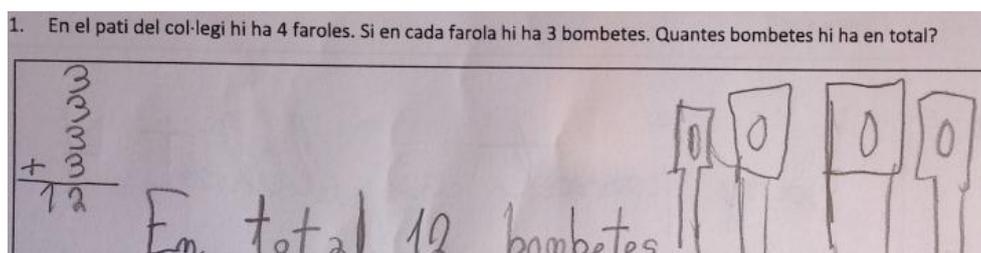


Figura 11. Estrategia Multiplicación como suma de sumandos iguales (2º curso)

Las estrategias incorrectas se agruparon en cinco categorías *i)* uso del algoritmo inverso *ii)* aditivas, *iii)* uso de todos los números del enunciado, *iv)* combinación uno a uno y *v)* estrategias sin sentido o en blanco.

Uso del algoritmo inverso

Hemos detectado la utilización de esta estrategia incorrecta en los problemas de isomorfismo de medidas (multiplicación y división partitiva), en los de comparación multiplicativa (división en los que la incógnita es el referente o el escalar) y en los de

producto de medidas (división). El procedimiento seguido por los estudiantes se basa en la aplicación del algoritmo inverso al correcto, para ofrecer una solución. Por ejemplo el estudiante de la Figura 12 resuelve el problema mediante el algoritmo de la división, cuando el algoritmo correcto es la multiplicación (problema de multiplicación).

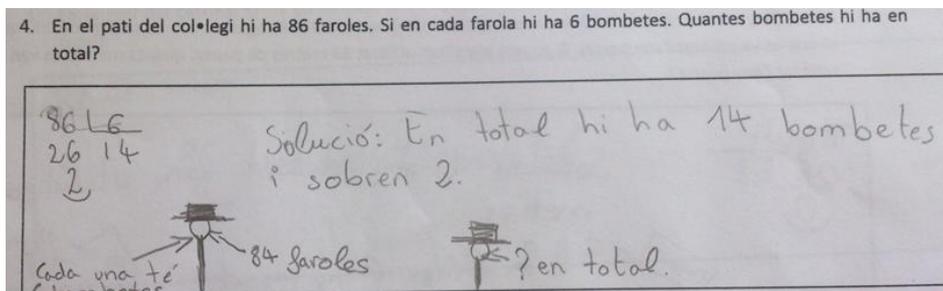


Figura 12. Estrategia algoritmo inverso en problema isomorfismo de medida tipo multiplicación

Uso de estrategia aditiva

Se realizan sumas o restas con los datos que proporciona el enunciado. Este tipo de estrategia se ha detectado en todas las categorías de problemas empleados aunque con una mayor incidencia en los problemas de comparación multiplicativa donde la incógnita es el escalar y en los de producto de medidas (multiplicación y división). Por ejemplo, el estudiante de la Figura 13 suma los 12 primeros platos y los 11 segundos para obtener la solución del problema (las distintas combinaciones).

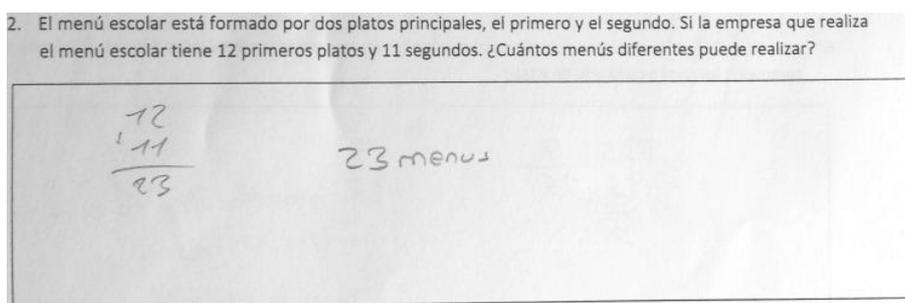


Figura 13. Estrategia aditiva (6º curso)

Uso de todos los números del enunciado

Se utilizan todos los números del enunciado independientemente de que estos sean datos o simples caracteres numéricos. La figura 14 muestra un ejemplo de utilización de esta estrategia en un problema de comparación multiplicativa (multiplicación) en la que se utilizan tanto los datos del problema (8 metros de tela y 3 veces más tela) como los que indican el curso (1ºA y 5ºB).

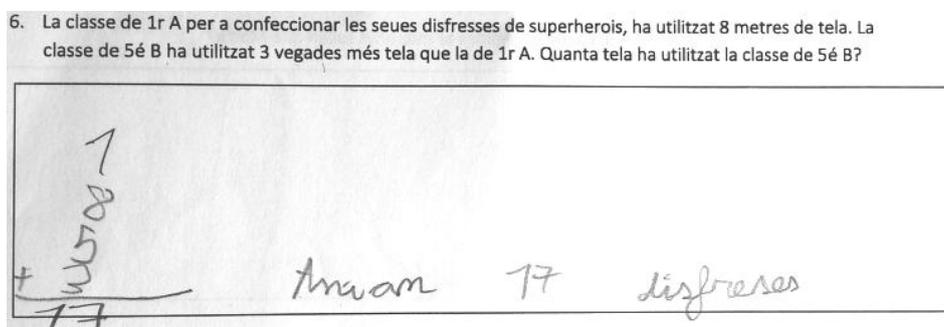


Figura 14. Uso de todos los números del enunciado (2º curso)

Combinación

En los problemas de producto de medidas (multiplicación), se combinan los elementos 1 a 1, sin tener en cuenta que pueden realizarse repeticiones tal y como puede observarse en la

Figura 15. El estudiante responde que si hay 12 primeros y 11 segundos, pueden prepararse 11 menús diferentes y sobra un plato.

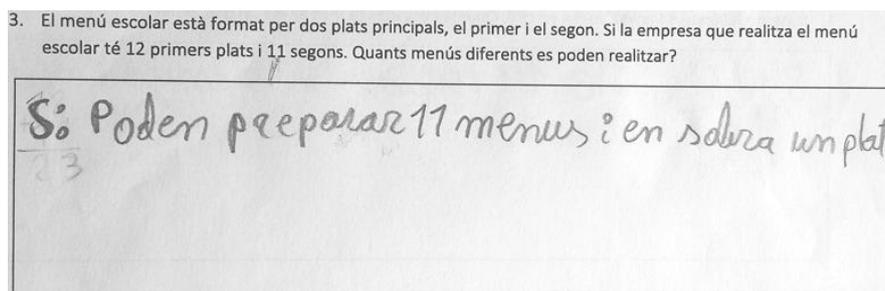


Figura 15. Estrategia combinación (5º curso)

Resultados

En primer lugar, se presentan cómo evolucionan de manera general las estrategias correctas e incorrectas identificadas de 1º a 6º curso. En segundo lugar, se presenta cómo evolucionan las estrategias correctas e incorrectas por categoría y tipo de problema a lo largo de los cursos.

Evolución de las estrategias de 1º a 6º curso

La evolución del porcentaje de uso de las estrategias correctas utilizadas por los estudiantes de educación primaria se muestra en la Figura 16.

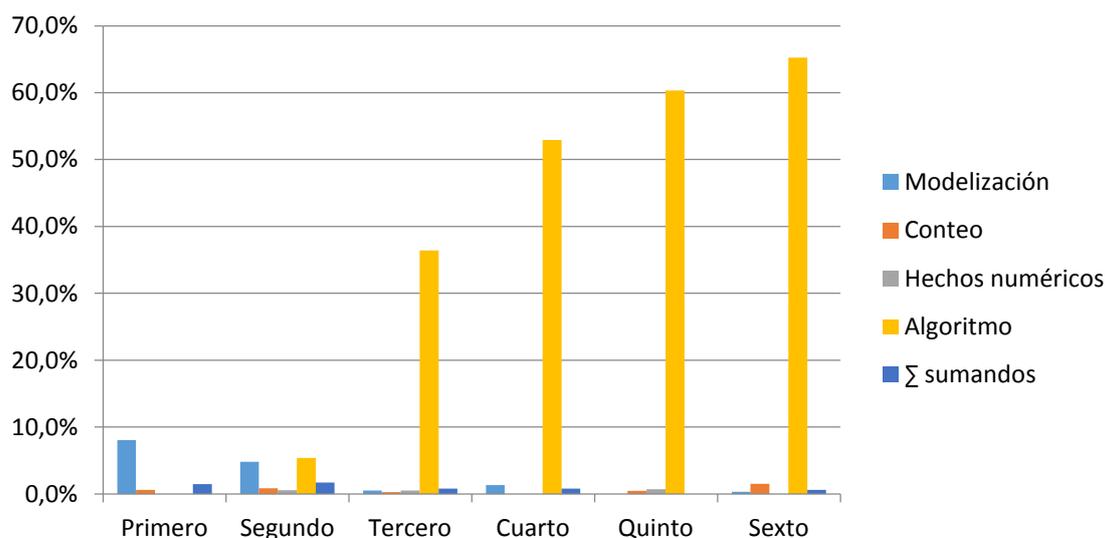


Figura 16. Evolución del porcentaje de uso de estrategias correctas por curso

El uso de estrategias correctas de 1º a 6º curso aumentó paulatinamente, con un crecimiento más pronunciado a partir de 3º vinculado al uso de los algoritmos. En los primeros cursos los estudiantes emplean un mayor número de estrategias diferentes siendo la más usada la estrategia de modelización, aunque se observa en segundo un aumento del algoritmo (coincidiendo con la instrucción curricular que los estudiantes reciben del algoritmo de la multiplicación). A partir de este curso, y coincidiendo con la introducción del algoritmo de la división en tercer curso, vemos como el uso de la estrategia “algoritmo” crece rápidamente y que el uso del resto de estrategias tiende a desaparecer (la siguiente estrategia más utilizada en 6º curso es la de conteo con un 1.5%).

La Figura 17 muestra la evolución del porcentaje de uso de las estrategias incorrectas de 1º a 6º curso. En primer curso el porcentaje más alto corresponde al uso de estrategias sin sentido (incluyendo las respuestas en blanco), a partir del segundo curso la estrategia incorrecta más utilizada es la aditiva. Ambas estrategias muestran porcentajes cada vez

menores a medida que los cursos avanzan. A partir de segundo curso emerge la utilización de la estrategia “*uso del algoritmo inverso*” que se consolida como la tercera estrategia errónea más utilizada en todos los cursos a partir de ese momento. El uso de la estrategia “*combinación 1 a 1*” aparece a partir de 4º curso.

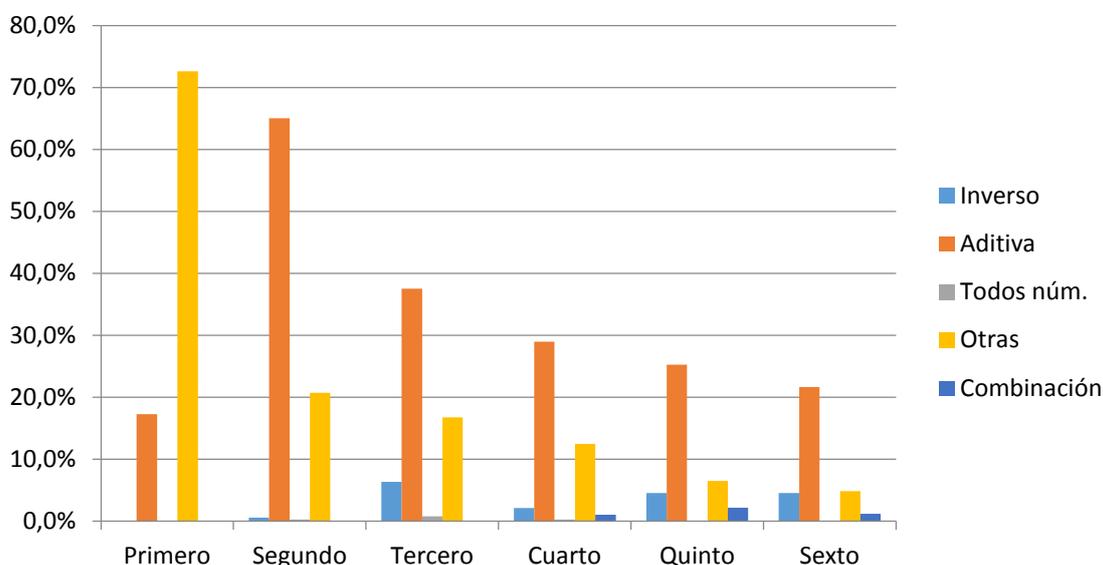


Figura 17. Evolución del porcentaje de uso de estrategias incorrectas por curso

Evolución de las estrategias correctas e incorrectas por tipo de problema y curso

Las tablas 4, 5 y 6 muestran el porcentaje de uso de las estrategias correctas e incorrectas por tipo de problema y curso.

Tabla 4. Estrategias correctas e incorrectas utilizadas en primer ciclo por tipo de problema

Problemas		Estrategias correctas					Estrategias incorrectas					
Categ	Tipo	Mod	Cont	Hec.	Algo	Σ de	Alg.inv	Adit.	Tod.	Otras	Comb.	
PRIMERO	Isom. Med.	Multiplicación	26%	0%	0%	0%	10%	0%	24%	0%	40%	0%
		Div. partitiva	14%	5%	0%	0%	0%	0%	21%	0%	60%	0%
		Div. medida	24%	0%	0%	0%	2%	0%	21%	0%	53%	0%
	Comp. Mult.	Mult./Comparado	0%	0%	0%	0%	0%	0%	17%	0%	83%	0%
		Div./Referente	0%	0%	0%	0%	0%	0%	12%	0%	88%	0%
		Div./Escalar	0%	0%	0%	0%	0%	0%	17%	0%	83%	0%
	Prod Med	Mult./Total	0%	0%	0%	0%	0%	0%	14%	0%	86%	0%
		Div./Parte	0%	0%	0%	0%	0%	0%	12%	0%	88%	0%
SEGUNDO	Isom. Med.	Multiplicación	9%	0%	0%	36%	2%	0%	44%	0%	9%	0%
		Div. partitiva	11%	5%	0%	0%	0%	5%	68%	0%	11%	0%
		Div. medida	18%	2%	0%	0%	7%	0%	62%	0%	11%	0%
	Comp. Mult.	Mult./Comparado	0%	0%	0%	7%	0%	0%	68%	0%	25%	0%
		Div./Referente	0%	0%	5%	0%	5%	0%	68%	2%	20%	0%
		Div./Escalar	0%	0%	0%	0%	0%	0%	80%	0%	20%	0%
	Prod Med	Mult./Total	0%	0%	0%	0%	0%	0%	70%	0%	30%	0%
		Div./Parte	0%	0%	0%	0%	0%	0%	61%	0%	39%	0%

La tabla 4 muestra la utilización, en los primeros cursos (1º y 2º), de estrategias de modelización y de suma de sumandos iguales para dar respuesta a los problemas de isomorfismos de medidas. Esta última estrategia, que proviene de las estructuras aditivas, tiene una aparición casi nula en cursos posteriores. Esta categoría de problemas es la única que resuelven los estudiantes de primer curso. En el segundo curso se produce una

disminución de ambas estrategias y emerge, situándose sobre las demás, la estrategia del uso del algoritmo en los problemas de multiplicación (36%) y para dar respuesta a problemas de comparación multiplicativa donde la incógnita es la cantidad de referencia o la cantidad comparada. Sin embargo, el aumento del uso del algoritmo va ligado a un aumento del uso de la estrategia incorrecta aditiva y una disminución de las estrategias sin sentido y en blanco (Otras).

El salto más importante, en cuanto a estrategias utilizadas, se produce entre el segundo y tercer curso (Tabla 5). A partir de tercero, todas las categorías de problemas se resuelven de manera correcta, mayoritariamente, utilizando el algoritmo. Este hecho coincide con la aparición en el currículo de dicho contenido matemático (tanto el de la multiplicación, que ya se trabaja en segundo, como el de la división que se introduce en tercer curso). Sin embargo el uso del algoritmo no implicó la desaparición del uso de estrategias incorrectas sino que un alto porcentaje de alumnos continuaron utilizando estrategias aditivas incorrectas en la mayoría de problemas (el porcentaje es mayor en las categorías de comparación y producto de medidas) y de estrategias sin sentido (Otras). Se destaca también en tercer curso la aparición de otra estrategia incorrecta ligada a la aparición del algoritmo, el uso del algoritmo inverso.

Tabla 5. Estrategias correctas e incorrectas utilizadas en segundo ciclo por tipo de problema

Problemas		Estrategias correctas					Estrategias incorrectas					
Categ	Tipo	Mod	Cont	Hec. N.	Algo	Σ de Sum.	Alg.inv	Adit.	Tod.	Otras	Comb.	
TERCERO	Isom. Med.	Multiplicación	4%	0%	0%	64%	4%	0%	24%	0%	4%	0%
		Div. partitiva	0%	0%	0%	66%	0%	9%	14%	0%	11%	0%
		Div. medida	0%	0%	2%	53%	0%	2%	22%	0%	21%	0%
	Comp. Mult.	Mult./Comparado	0%	0%	0%	49%	2%	4%	28%	2%	15%	0%
		Div./Referente	0%	0%	0%	15%	0%	28%	32%	4%	21%	0%
		Div./Escalar	0%	0%	2%	13%	0%	2%	70%	0%	13%	0%
	Prod Med	Mult./Total	0%	0%	0%	17%	0%	0%	51%	0%	32%	0%
		Div./Parte	0%	0%	0%	15%	0%	6%	52%	0%	17%	0%
CUARTO	Isom. Med.	Multiplicación	0%	0%	0%	81%	0%	0%	13%	0%	6%	0%
		Div. partitiva	4%	0%	0%	85%	0%	0%	6%	0%	5%	0%
		Div. medida	6%	0%	0%	81%	0%	0%	9%	0%	4%	0%
	Comp. Mult.	Mult./Comparado	0%	0%	0%	70%	2%	0%	24%	2%	2%	0%
		Div./Referente	0%	0%	0%	43%	0%	17%	25%	0%	15%	0%
		Div./Escalar	0%	0%	0%	21%	0%	0%	64%	0%	15%	0%
	Pro Med	Mult./Total	0%	0%	0%	17%	4%	0%	40%	0%	30%	9%
		Div./Parte	0%	0%	0%	26%	0%	0%	52%	0%	23%	0%

El aumento de los porcentajes en la estrategia del uso del algoritmo en todos los tipos de problemas, es prácticamente progresivo a medida que avanzan los cursos (tabla 6). Encontramos alguna excepción, como en los problemas de comparación multiplicativa de tipo multiplicación (se busca el comparado) y de tipo división (se busca el referente) en los que los porcentajes disminuyen considerablemente en sexto curso. De un 92% de los de tipo multiplicación que utilizan el algoritmo en quinto, se pasa a un 85%, aunque hay un crecimiento del 2% en el uso de la estrategia de suma de sumandos iguales, el resto de estudiantes utilizaron estrategias incorrectas (aumenta la aditiva y otros). En los de tipo división, la diferencia es de 65% en quinto frente al 59% en sexto, esta vez no aumentó ninguna estrategia correcta por lo que los estudiantes utilizaron estrategias incorrectas (aumentó el uso del algoritmo inverso y otras estrategias sin sentido).

De igual modo, para el sexto curso, se puede observar el aumento del uso de la estrategia de conteo para dar resolución a los problemas de comparación multiplicativa tipo división en los que se busca el escalar aumentando hasta un 7%. Es utilizada también la estrategia de conteo, en este curso, para resolver los problemas de isomorfismo de medidas de tipo división medida (5%).

Tabla 6. Estrategias correctas e incorrectas utilizadas en tercer ciclo por tipo de problema

		Problemas		Estrategias correctas				Estrategias incorrectas				
Categ.		Tipo	Mod	Cont	Hec.	Algo	Σ de	Alg.inv	Adit.	Tod.	Otras	Comb.
QUINTO	Isom. Med.	Multiplicación	0%	0%	0%	87%	0%	6%	7%	0%	0%	0%
		Div. partitiva	0%	0%	0%	98%	0%	0%	2%	0%	0%	0%
		Div. medida	0%	0%	0%	77%	0%	4%	6%	0%	13%	0%
	Comp. Mult.	Mult./Comparado	0%	0%	0%	92%	0%	2%	4%	0%	2%	0%
		Div./Referente	0%	0%	0%	65%	0%	15%	12%	0%	8%	0%
		Div./Escalar	0%	2%	2%	19%	0%	8%	63%	0%	6%	0%
	Prod Med	Mult./Total	0%	0%	0%	19%	0%	0%	52%	0%	12%	17%
Div./Parte		0%	2%	4%	25%	0%	2%	55%	0%	12%	0%	
SEXTO	Isom. Med.	Multiplicación	0%	0%	0%	93%	0%	7%	0%	0%	0%	0%
		Div. partitiva	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
		Div. medida	2%	5%	0%	85%	2%	0%	0%	0%	6%	0%
	Comp. Mult.	Mult./Comparado	0%	0%	0%	85%	2%	0%	8%	0%	5%	0%
		Div./Referente	0%	0%	0%	59%	0%	24%	7%	0%	10%	0%
		Div./Escalar	0%	7%	0%	41%	0%	0%	49%	0%	2%	0%
	Prod Med	Mult./Total	0%	0%	0%	24%	0%	5%	51%	0%	10%	10%
Div./Parte		0%	0%	0%	34%	0%	0%	59%	0%	7%	0%	

Discusión y conclusiones

El objetivo de este estudio es examinar la evolución del tipo de estrategias utilizadas por estudiantes de Educación Primaria (desde 1º a 6º curso) cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa. Globalmente los resultados indican la sustitución de diferentes estrategias para el uso prioritario de los algoritmos en los momentos en que se introduce en el currículo (segundo y tercer curso), pero este aumento también va vinculado a la continuación del uso de estrategias aditivas incorrectas y a la aparición del uso incorrecto del algoritmo inverso. Este hecho puede ser interpretado en el sentido de que el énfasis sobre los procedimientos (el algoritmo) puede llevar a algunos estudiantes de primaria a no centrar su atención sobre la relación entre las cantidades en las situaciones para determinar la adecuación del uso del algoritmo.

Los resultados también indican que, en el primer ciclo, los estudiantes emplearon estrategias de modelización para resolver problemas de isomorfismo de medidas y estrategias de conteo para dar respuesta a los de división partitiva y división medida, desapareciendo el uso de esta estrategia en los demás cursos. El uso de la estrategia conteo, tiene una presencia poco importante a lo largo de toda la Educación Primaria y cuando se utiliza, se asocia a los problemas de división. En este sentido, nuestros resultados parecen indicar que no siempre los estudiantes se trasladan desde las estrategias de modelización a las estrategias de conteo, resultado obtenido en estudios previos (Carpenter et al., 1999).

A partir del tercer curso, la estrategia más empleada en todas las categorías de problemas es la de aplicación del algoritmo (aunque ya en segundo tiene una gran relevancia para dar respuesta a problemas de las categorías de isomorfismo de medidas y comparación multiplicativa (ambos de tipo multiplicación). Este resultado confirma los resultados de Verschaffel, Greer y Torbeyns (2006) que postularon que, a pesar de que el alumnado posee un elevado número de estrategias informales, tras la introducción del algoritmo se observa una tendencia a dejar de utilizarlas para aplicar el algoritmo, incluso en situaciones donde dichas estrategias serían más eficientes (p.54). Este hecho incide en la idea comentada antes de la manera en la que el énfasis sobre los procedimientos (algoritmo) impide a los niños de educación primaria desarrollar otras estrategias que puedan poner de manifiesto su comprensión de las relaciones entre las cantidades, llevándoles a aplicar estrategias incorrectas como la estrategia aditiva o el uso del algoritmo inverso.

Referencias Bibliográficas

- [1] Vergnaud, G. (1997): "The nature of mathematical concepts". En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective*, 5-28, Hove (United Kingdom).
- [2] Vergnaud, G. (1983): "Multiplicative structures". R. Lesh & M. Landau. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 127-174, New York (United States of America).
- [3] Nesher, P. (1992): "Solving multiplication word problems". En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrop (Eds.) *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, 189-219, Hillsdale, NJ (United States of America).
- [4] Greer, B. (1992): "Multiplication and division as models of situations". En D. Grows (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 276-295, New York (United States of America).
- [5] Mulligan, J. (1992): "Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study". *Mathematics Education Research Journal*, 4, 1, 24-41.
- [6] Carpenter, T. P.; Fennema, E.; Franke, M. L.; Levi, L.; Empson, S. B. (1999): "Children's mathematics: Cognitively guided instruction". Portsmouth (United Kingdom).
- [7] Neuman, D. (1999): "Early learning and awareness of division: A phenomenographic approach". *Educational Studies in Mathematics*, 40, 2, 101-128.
- [8] Verschaffel, L.; Greer, B.; Torbeyns, J. (2006): "Numerical thinking". En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 51-82. Rotterdam (The Netherlands).
- [9] Verschaffel, L.; De Corte, E. (1997): "Word Problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school?" En T. Nunes y P. Bryant (Eds.) *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective*, 69-98, London (United Kingdom).
- [10] Castro, E. (1995): "Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa" (Tesis doctoral) Colección Mathema, Granada (España).