Características del desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes de educación primaria (9-12 años)

Ruben Campo; Salvador Llinares

rcampohernanez@hotmail.com; sllinares@ua.es

Universidad de Alicante

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es determinar la influencia que tiene el tipo de razón entera o no entera en las respuestas de los niños de 9 a 12 años (4º a 6º curso de Educación Primaria) a situaciones proporcionales. Los participantes de este estudio fueron 162 estudiantes de Educación Primaria. Los resultados indican que la capacidad para discriminar las situaciones proporcionales y no proporcionales proporciona información sobre las características del desarrollo del razonamiento proporcional en los es últimos años de la Educación primaria. Además, el que la naturaleza entera o no entera de las variables tanto funcional como escalar no influye en el uso de estrategias aditivas o proporcionales. Sin embargo, los datos apoyan la influencia que puede llegar a tener el currículum en la discriminación que los alumnos hacen de las situaciones proporcionales de las que no lo son.

Educación Primaria, Razonamiento proporcional, razón funcional, razón escalar

Introducción

El desarrollo del razonamiento proporcional es un objetivo de aprendizaje en el currículum de enseñanza primaria y secundaria. La importancia del razonamiento proporcional es que es aplicable en distintas áreas como por ejemplo el área de química y ciencias naturales. En el currículum de Educación Primaria y en el área de matemáticas, por ejemplo en la Comunidad Valenciana, el concepto de razón y proporción se introduce en 5º y 6º curso. En estos cursos se introduce la idea de porcentaje y proporcionalidad centradas en el cálculo de porcentajes de una cantidad, en expresar partes de una cantidad y en la introducción de situaciones generales de proporcionalidad con la utilización del algoritmo del producto cruzado (la regla de tres, apoyada en la aritmética de las fracciones) con relaciones entre las cantidades de doble, triple, mitad, etc. Este énfasis procedimental del currículo sobre la idea de razón y proporción contrasta con su complejidad conceptual (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983; Corral, 1986; Lamon, 1993; Litwiller y Bright, 2002; Sanz, Pozo, Puy y Gomez, 1996). Para Freudenthal (1983), “Ratio is a function of an ordered pair of numbers or magnitude values”, es decir, la razón es una función de un par ordenado de números o de valores de una magnitud. Para comprender esta idea, “los alumnos deben comprender la relación entre las dos cantidades y establecer la relación multiplicativa existente entre ellas” (Fernández Lajusticia, 2009; Fernández, et al. 2011).

Diversos estudios han puesto de manifiesto la dificultad de los alumnos de educación primaria en la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo

> *Una característica de la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo es la dificultad de los estudiantes de diferentes edades en diferenciar situaciones proporcionales de situaciones con estructura aditiva, puesta de manifiesto por el uso abusivo de métodos aditivos erróneos para resolver las situaciones proporcionales y, al mismo tiempo, por el uso abusivo de métodos multiplicativos erróneos para resolver situaciones con estructura aditiva* (Fernández, et al. 2012-a).

Los estudiantes de educación primaria suelen usar estrategias aditivas de forma sistemática en situaciones en las que no es adecuado hacerlo. En particular en situaciones en las que la relación entre las cantidades es proporcional. En las situaciones proporcionales, la relación entre las cantidades es multiplicativa y vienen modelizadas por la función $f(x) = ax$. Por ejemplo,

> ***Problema 1***. *Las fabricas A y B producen cajas. Empezaron al mismo tiempo pero la fabrica A es más rápido. Cuando la fábrica A ha fabricado 51 cajas, la fabrica B solo ha fabricado 17. Cuando la fabrica B haya producido 68 cajas, ¿cuántos cajas habrá producido la fabrica A?*

Esta situación es proporcional, y algunas investigaciones han mostrado que antes de la introducción de la idea de razón y proporción, los alumnos emplean estrategias aditivas en este tipo de problemas restando el número de cajas de la fabrica A y B (51-17) y sumándoselo a 68. Por otra parte, en las situaciones aditivas, situaciones en la que la relación entre las cantidades es aditiva y se modelizan mediante la función $f(x) = x + b$ como la siguiente

> ***Problema 2.*** *Las fabricas A y B producen cajas a la misma velocidad pero la fabrica A empezó antes. Cuando la fabrica B ha producido 17 cajas, la fabrica A tiene 51 cajas. Cuando la fabrica B haya producido 68 cajas, ¿cuántas cajas habrá fabricado la fabrica A?*

Se ha visto que cuando ya se ha introducido la idea de razón y proporción los estudiantes que se encuentran finalizando la Educación Primaria suelen aplicar de manera errónea procedimientos de igualdad de razones (la idea de proporción en la regla de tres) para resolverlos (Fernández y Llinares, 2012-b).

Estos dos hechos considerados juntos ponen de manifiesto que la manera en la que los estudiantes aplican sus esquemas para resolver los problemas no se corresponde con la identificación previamente de las relaciones entre las cantidades, sino que responden a otras cuestiones. Parte de la dificultad en reconocer las relaciones multiplicativas entre las cantidades en las situaciones proporciones está vinculada a la existencia de cantidades de dos magnitudes que pueden ser diferentes y por tanto en la posibilidad de establecer razones entre cantidades de magnitudes iguales y diferentes. Como consecuencia, podemos distinguir dos tipos de razones según su relación que se establezcan entre las cantidades. Por un lado, cuando los estudiantes establecen la relación multiplicativa entre dos cantidades de la misma magnitud se denomina razón interna o escalar, y cuando la relación se establece entre cantidades de diferentes magnitudes la llamaremos razón externa o funcional.

Por ejemplo, en la situación proporcional descrita en el problema 1,

	Momento 1	Momento 2
Fabrica A	51	
Fabrica B	17	68

La razón 17/68 entre las dos cantidades de cajas fabricadas por la fabrica B, estaremos estableciendo una razón escalar que se corresponde con la razón 51/ x. En una situación proporcional sabemos que las razones escalares se mantienen, es decir, que al construir una razón escalar, esta será igual a la razón escalar construida con las cantidades correspondientes en la otra magnitud.

Mientras que si construimos la razón 51/17 con cantidades de magnitudes diferentes estaremos estableciendo una razón funcional que se corresponde con la razón x/68. Sabemos que en una situación proporcional la razón funcional es constante, es decir, que cualquier otra razón funcional será igual. Por eso a esta razón se le llama constante de proporcionalidad.

Las investigaciones han empezado a identificar los factores que intervienen en la discriminación que los estudiantes realizan entre las situaciones proporcionales y las situaciones no proporcionales (De Bock, Van Doren, Janssens, y Verschaffel,2010; Fernández y Llinares, 2010, 2011, 2012-a; Kaputy West, 1994; Singer, Kohn, y Resnick,1997). Uno de estos factores es el tipo de relación multiplicativa entera o no entera que se puede establecer entre las cantidades. Teniendo en cuenta estos hechos el objetivo de este trabajo es caracterizar la evolución en los tres últimos años de la educación primaria de la influencia del tipo de relación multiplicativa entre las cantidades sobre la capacidad que discriminar situaciones proporcionales y no proporcionales.

Método

Participantes

Los participantes en este trabajo han sido un total de 162 alumnos de Educación Primaria, 56 alumnos de 4º curso, 55 alumnos de 5º curso y 51 alumnos de 6º curso. Los alumnos proceden de contextos sociales diversos con un nivel socioeconómico medio-alto.

Tabla 1. Participantes del estudio

	PRIMARIA			TOTAL
Curso	4º	5º	6º	
Nº de Estudiantes	56	55	51	162

Instrumento

Se diseñó un cuestionario con 10 problemas usando un contexto continuo (distancia recorrida por dos sujetos). Cuatro de estos problemas respondían a situaciones proporcionales y cuatro a situaciones aditivas. Los números usados eran menores que 100 y consideramos relaciones multiplicativas enteras y no enteras. A esos 8 problemas le hemos añadido 2 problemas distractores para evitar el aprendizaje de los alumnos y las respuestas estereotipadas de los mismos. Un ejemplo de problema proporcional utilizado es el siguiente:

Alejandro y David están corriendo en una pista. Empezaron al mismo tiempo pero David es más rápido. Cuando Alejandro ha corrido 17 metros, David ha corrido 51 metros. Si Alejandro ha corrido 68 metros, ¿cuántos metros ha recorrido David?

Un ejemplo de problema aditivo es el siguiente:

Alejandro y David están corriendo en una pista. Corren a la misma velocidad pero David empezó antes. Cuando Alejandro ha corrido 17 metros, David ha corrido 51 metros. Si Alejandro ha corrido 68 metros, ¿cuántos metros ha recorrido David?

La diferencia entre ambas situaciones viene dada porque en la situación proporcional se establece una relación multiplicativa entre las cantidades dada por la oración "*Empezaron al mismo tiempo pero David es más rápido".* Mientras que en la situación aditiva se establece una relación aditiva entre las cantidades dada por la oración "*Corren a la misma velocidad pero David empezó antes*".

La relación aditiva entre las cantidades en el problema 2 vinculada a "c*orren a la misma velocidad pero David empezó antes*" viene dada por la expresión 51 – 17 = 34. Mientras que la relación multiplicativa entre las cantidades en el problema 1 vinculada a "*Empezaron al mismo tiempo pero David es más rápido"* viene dada por las dos expresiones que se pueden establecer entre las cantidades de la situación: la razón funcional como una constante (51/17 = x/68 o 17/51 = 68/x), o la razón escalar que se mantiene considerando la razón formada por las cantidades que les corresponden (17/68 = 51x o 68/17 = x/51).

Al plantear los problemas hemos tenido en cuenta que la complejidad del cálculo en el sentido de que la relaciones escalares o funcionales sean enteras o no enteras. Finalmente, la posición de la cantidad desconocida siempre es la segunda magnitud que aparece en el problema. Además, se incluyeron 2 problemas distractores de forma que existiera una variación entre las tareas. Un ejemplo de problema distractor es el siguiente:

Un grupo de 5 personas están en una feria. El grupo se monta en una atracción y dura 10 minutos. Si se montara un grupo de 10 personas, ¿cuántos minutos duraría la atracción?

De esta manera, los cuestionarios están formados por una totalidad de 10 problemas los cuales 4 de ellos son proporcionales alternándose las razones funcionales o escalares entre las cantidades (entera/entera, entera/no entera, no entera/entera, no entera/no entera) y cuatro problemas aditivos con la misma alternancia entre las relaciones entre las cantidades (entera/entera, entera/no entera, no entera/entera, no entera/no entera) y dos distractores. En la siguiente tabla hay un ejemplo de los problemas planteados a los estudiantes. También se presenta la respuesta proporcional (Prop.) que sería correcta en los problemas proporcionales e incorrecta en los aditivos y la respuesta aditiva (Adit.) que sería correcta en los problemas aditivas pero incorrecta en los proporcionales.

Tabla 2. Problemas planteados en el cuestionario

	Ejemplos	Escalar: I Funcional: N	Escalar: N Funcional: I	Escalar: I Funcional: I	Escalar: N Funcional: N
Proporcional	Alejandro y David están corriendo en una pista. Empezaron al mismo tiempo pero David es más rápido. Cuando Alejandro ha corrido metros, David ha corrido metros. Si Alejandro ha corrido metros, ¿cuántos metros ha recorrido David?	17 68 45 **Prop.:** 180 **Adit.:** 96	17 45 51 **Prop.:** 135 **Adit.:** 79	17 68 51 **Prop.:** 204 **Adit.:** 102	12 20 18 **Prop.:** 30 **Adit.:** 26

Aditivo	Alejandro y David están corriendo en una pista. Corren a la misma velocidad pero David empezó antes. Cuando Alejandro ha corrido metros, David ha corrido metros. Si Alejandro ha corrido metros, ¿cuántos metros ha recorrido David?	17 68 45 **Prop.:** 180 **Adit.:** 96	17 45 51 **Prop.:** 135 **Adit.:** 79	17 68 51 **Prop.:** 204 **Adit.:** 102	12 20 18 **Prop.:** 30 **Adit.:** 26

El cuestionario se presentó como un conjunto de cinco páginas. Cada uno de los problemas tenía tres cuadros en los cuales el primero correspondía a la operación u operaciones que resolverían el problema. El segundo cuadro corresponde a la solución dónde los alumnos deben escribir una pequeña oración con la solución correcta. Y finalmente un tercer cuadro dónde los alumnos escribían una justificación (escribir lo que ellos realmente piensan) sobre el por qué el problema se resuelve de esa manera.

Análisis

Las respuestas de los estudiantes a los diferentes problemas han sido categorizadas como:

- “Respuestas aditivas” (Ad), en esta categoría se incluyen las respuestas de los alumnos que emplean estrategias aditivas en la resolución de problemas. Estas estrategias son correctas en las situaciones aditivas, pero incorrectas en las situaciones proporcionales.
- “Respuestas proporcionales”: en este apartado, se han incluido las diferentes estrategias que han utilizado los alumnos en sus respuestas cuando usaban una relación proporcional entre las cantidades. Estas estrategias son correctas en las situaciones proporcionales, pero incorrectas en las situaciones aditivas. Hemos podido identificar cuatro grupos de estrategias proporcionales:
    - un enfoque escalar que definimos por la relación que establecen los estudiantes entre cantidades de la misma magnitud,
    - un enfoque funcional que definimos por la relación que establecen los estudiantes entre cantidades de diferentes magnitudes,
    - estrategias constructivas las cuales cumplen $f(a+b)=f(a)+f(b)$, y $f(ax) = a f(x)$
    - el uso del algoritmo de la regla de tres.
- “Otras respuestas”, se incluyen las respuestas que no han podido ser incluidas por su naturaleza en las categorías anteriores, las respuestas sin sentido y las respuestas en blanco. En esta categoría no se incluyen los errores de cálculo.

RESULTADOS

En primer lugar, presentamos los resultados relativos al nivel de éxito teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades (funcionales y escalares, enteras y no enteras). La tabla 3 recoge los porcentajes referidos a las situaciones proporcionales. Las respuestas correctas corresponden a la identificación de las relaciones multiplicativas (Prop). En este caso, las respuestas incorrectas corresponden a las categorías (Ad) y (Otr). La tabla 4 recoge los datos referidos a las situaciones aditivas. Las respuestas correctas corresponden al uso de relaciones aditivas (Ad) y las incorrectas a (Prop) y (Otr).

Tabla 3. Respuesta de los alumnos a las situación proporcional
I = razón entera; N=razón no entera

Situación Proporcional	Cuarto			Quinto			Sexto			Total		
	Prop	Ad	Otr	Prop	Ad	Otr	Prop	Ad	Otr	Prop	Ad	Otr
Escalar: I Funcional: N	1,79	73,21	25,00	1,82	60,00	38,18	21,57	64,71	13,73	8,39	65,97	25,64

Escalar: N Funcional: I	1,79	69,64	28,57	1,82	60,00	38,18	19,61	70,59	9,80	7,74	66,74	25,52
Escalar: I Funcional: I	1,79	69,64	28,57	1,82	58,18	40,00	23,53	70,59	5,88	9,04	66,14	24,82
Escalar: N Funcional: N	1,79	71,43	26,79	1,82	58,18	40,00	17,65	74,51	7,84	7,08	68,04	24,88
Total	1,79	70,98	27,23	1,82	59,09	39,09	20,59	70,10	9,31	8,06	66,72	25,21

Tabla 4. Respuesta de los alumnos a la situación aditiva
I= relación aditiva entera; N= relación aditiva no entera

Situación Aditiva	Cuarto			Quinto			Sexto			Total		
	Prop	Ad	Otr	Prop	Ad	Otr	Prop	Ad	Otr	Prop	Ad	Otr
Escalar: I Funcional: N	1,79	71,43	26,79	0,00	56,36	43,64	13,73	68,63	17,65	5,17	65,47	29,36
Escalar: N Funcional: I	1,79	67,86	30,36	0,00	56,36	43,64	13,73	72,55	13,73	5,17	65,59	29,24
Escalar: I Funcional: I	3,57	67,86	28,57	0,00	56,36	43,64	17,65	72,55	9,80	7,07	65,59	27,34
Escalar: N Funcional: N	1,79	71,43	26,79	0,00	56,36	43,64	5,88	76,47	17,65	2,56	68,09	29,36
Total	2,23	69,64	28,13	0,00	56,36	43,64	12,75	72,55	14,71	5,14	66,19	28,82

Los estudiantes tuvieron un mayor porcentaje de éxito en los problemas aditivos que en los problemas proporcionales en todos los cursos (8,06% frente a un 66,19%). Además, estos datos indican que las situaciones proporcionales fueron muy difíciles para los alumnos de 4º y 5º curso, pero que en sexto aumentó considerablemente el nivel de éxito (20,59% en 6º). Por otro lado, la naturaleza entera o no entera en la relación multiplicativa entre las cantidades no influyó en el nivel de éxito tanto de las situaciones proporcionales como aditivas. Por otra parte, las respuestas aditivas en las situaciones proporcionales fueron mayores que las respuestas proporcionales en las situaciones aditivas (66,72% frente a un 5,14%).

En relación a la situación proporcional, más de los 2/3 de los estudiantes usaban relaciones aditivas de manera incorrecta, con una pequeña variación en 5º curso. Sin embargo, el aumento en el porcentaje de éxito en este tipo de problemas experimentado en 6º se debió mayoritariamente a que la categoria “Otros” disminuyó en 6º.

En relación a la situación aditiva, el nivel de éxito es alto a lo largo de los tres cursos de Educación Primaria. Sin embargo, los resultados indican que entre los tres cursos existe un punto de inflexión en quinto curso. Es decir, en cuarto y quinto curso existe una variación decreciente en el porcentaje de éxito (un 69,64% en cuarto a un 56,36%) para luego en sexto volver a crecer y tener un mayor porcentaje de éxito llegando al 72,55%.

Por otra parte, en relación al uso incorrecto de relaciones aditivas en situaciones proporcionales y al uso incorrecto de las relaciones multiplicativas en las situaciones aditivas, los resultados indican que en las situaciones proporcionales la influencia de la naturaleza de las variables es nula. Sin embargo, en el uso de estrategias proporcionales de forma incorrecta en situaciones aditivas la variación del porcentaje es un poco mayor cuando ambas son enteras que cuando no lo son (7,07% frente a un 2,56%).

Los datos de la tabla 5 indican la evolución de las estrategias a lo largo de cuarto, quinto y sexto de primaria según la tipología de los problemas, siendo estos proporcionales o aditivos.

Tabla 5. Evolución de las estrategias

	Situación Proporcional			Situación Aditiva		
	Cuarto	Quinto	Sexto	Cuarto	Quinto	Sexto

Prop	1,79	1,82	20,59	2,23	0,00	12,75
Ad	70,98	59,09	70,10	69,64	56,36	72,55
Otros	27,23	39,09	25,21	28,13	43,64	14,71

La figura 1 muestra la evolución de estrategias utilizadas por los estudiantes a lo largo de los tres cursos en las situaciones proporcionales. A lo largo de los tres cursos, el uso de estrategias aditivas incorrectas se mantiene por encima de las otras estrategias. La evolución de las estrategias proporcionales experimenta un aumento en sexto emparejado a la disminución de la categoría “Otras”. La categoría “Otras” incluye las respuestas sin sentido y las respuestas en blanco).

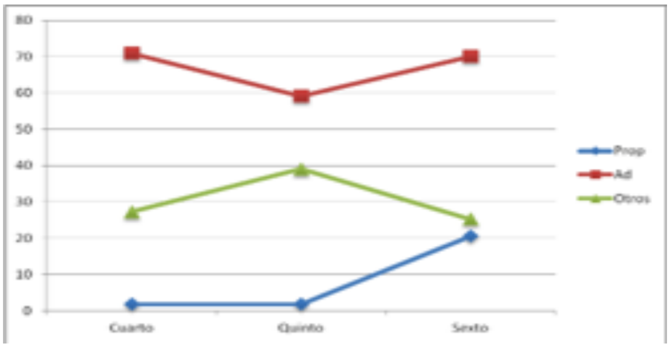

Figura 1- Evolución estrategias utilizadas en las situaciones proporcionales

La figura 2 muestra la evolución de las estrategias utilizadas por los estudiantes a lo largo de los tres cursos en las situaciones aditivas. Igual como en el caso anterior, las estrategias aditivas que en este caso son correctas, se mantienen siempre por encima de las otras estrategias. Sin embargo, el gráfico pone de manifiesto que a partir de 6º existe un incremento del uso de estrategias incorrectas proporcionales en este tipo de situaciones.

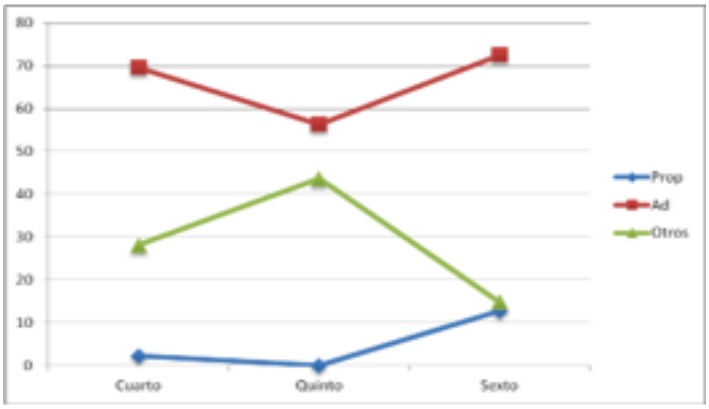

Figura 2. Evolución estrategias utilizadas en las situaciones de naturaleza aditiva.

Conclusiones y discusión

El presente trabajo aporta información sobre la variación de las respuestas de los alumnos (de 4º a 6º curso de primaria) a las situaciones proporcionales y aditivas. Los resultados indican que los problemas aditivos son mejor resueltos que las situaciones proporcionales en los tres cursos. Además, en sexto existe un incremento en el uso de estrategias proporcionales sean o no adecuadas. Este hecho sugiere que la introducción de las ideas de razón y proporción en el currículo (y posiblemente el uso de la regla de tres) no conlleva el que los estudiantes aprendan a discriminar las situaciones proporcionales y no proporcionales lo que implica una aproximación procedimental de la enseñanza en detrimento de una aproximación más conceptual. Este hecho se evidencia ya que el aumento de las estrategias proporcionales en las situaciones proporcionales va emparejado con el aumento de las estrategias proporcionales en las situaciones aditivas, junto con el hecho de que los estudiantes siguen usando relaciones aditivas en las situaciones proporcionales.

El nivel de éxito en los problemas aditivos disminuye porque en quinto curso los alumnos pasan de utilizar de forma sistemática estrategias aditivas de forma abusiva a otras estrategias que no llegan a ser consideradas proporcionales haciendo que el nivel de éxito disminuya. En sexto curso, se introduce la idea de porcentaje y proporcionalidad centradas en el cálculo de porcentajes de una cantidad, en expresar partes de una cantidad y en la introducción de situaciones generales de proporcionalidad con la utilización del algoritmo del producto cruzado.

Estos datos se corresponden con otras investigaciones (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002, 2007; Ebersbach, Van Dooren, Goudriaan & Verschaffel, 2010; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2011; Fernández, et al. 2012) que inciden en dos ideas. En primer lugar, en el uso abusivo de los estudiantes de la linealidad en situaciones no adecuadas, y en segundo lugar, que la introducción en la escuela de la idea de razón y proporción no implica un mayor desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes. Estas dos ideas vienen apoyadas por el comportamiento casi idéntico mostrado por las figuras 1 y 2 que muestran el aumento de las estrategias proporcionales y aditivas en los dos tipos de situaciones. Este aumento de estas dos estrategias está en detrimento de la categoría “otras”. Este hecho pone de manifiesto que los estudiantes no muestran un aumento del razonamiento proporcional a lo largo de los cursos, sino que parece que tienen más procedimientos a usar independientemente de si son correctos o no.

Los resultados de esta investigación ponen de manifiesto una cierta aproximación procedimental en la enseñanza de las matemáticas en los últimos cursos de educación primaria en relación al desarrollo del razonamiento proporcional, junto con la idea de que aprender a discriminar situaciones proporcionales de las aditivas parece ser clave en este desarrollo.

Referencias

[1] Behr, M.; Lesh, R.; Post, T. y Silver,E. (1983). Rational-Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-126).Orlando: Academic Press, Inc.

[2] Corral A. (1986). La dificultad de enseñar el razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje*. 35-36, 47-58

[3] De Bock, D., Van Doren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students’ errors. *Educational Studies in Mathematics,* 50, pp. 311-334.

[4] De Bock, D., Van Doren, W., Janssens, D. y Ver-Schaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement.* Nueva York: Springer.

[5] De Bock, D., Van Doren, W., Janssens, D. y Ver-Schaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back. The development of students’ additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction,* 28(3), pp. 360- 381.

[6] Ebersbach, M., Van Dooren, W., Goudrian, M., & Verschaffel, L. (2010). Discriminating Non-linearity: Its Cognitive Foundations in Five-Year-Olds. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(1), 4-19

[7] Fernández Lajusticia, A. (2009). *Razón y Proporción. Un estudio en la escuela primaria*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de Valencia.

[8] Fernández, C; Llinares S. (2010). "Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria: el caso de la construcción de la idea de razón". *Horizontes Educacionales*,15(1), 11-22.

[9] Fernández, C. & Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia & Aprendizaje,* 34(1), 67-80.

[10] Fernández, C. & Llinares, S. (2012-a). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 129-142.

[11] Fernández, C. & Llinares, S. (2012-b). Relaciones implicativas entre las estrategias empleadas en la resolución de situaciones lineales y no lineales. *RELIME-Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(1), 277-310.

[12] Fernández, C.; Llinares, S.; Van Dooren, W.; De Bock, D. & Verschaffel (2011). Effect on number structure and nature of quantities on secondary school students' proportional reasoning. *STUDIA PSYCHOLOGICA,* 53 (1), 69-81

[13] Fernández, C.; Llinares, S.; Van Dooren, W.; De Bock, D. & Verschaffel, L. (2012). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *European Journal of Psychology of Education, 27*, 421-438

[14] Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht/ Boston/Lancaster: Reidel.

[15] Kaput, J. & West, M.M. (1994). Missing-Value Proportional Reasoning Problmes. Factos Affecting Informal Reasoning Patterns. En G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 235 – 285). SUNNY:New York.

[16] Lamon, S. (1993), Ratio and Proportion: Children's Cognitive and metacognitive Processes.En T. Carpenter, E.Fennema, y T. Romber (Eds.). *Rational Numbers. An Integration of Research* (pp.131-156).Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Ass. Pub.

[17] Litwiller, B. & Bright, G. (2002). *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions.2002 Yearbook.* NCTM: Reston, Va.

[18] Sanz, A. & Pozo J. & Puy M. & Gómez M. (1996). El razonamiento proporcional en expertos y novatos. *Revista de psicología general y aplicada, 49 (*2), 337-352.

[19] Singer, J.; Kohn, A. y Resnick,L. (1997). Knowing about proportions in different contexts. En T. Nunes y P. Bryant (eds.) *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspectives* (pp.115-132). London: Psychology Press –Taylor & Francis group.