RECURSOS PARA EL DESARROLLO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN PRIMARIA, SECUNDARIA Y UNIVERSIDAD

Antonio Bueno Aroca

Departamento de Matemáticas, IES Parque Lineal de Albacete
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Educación, UCLM

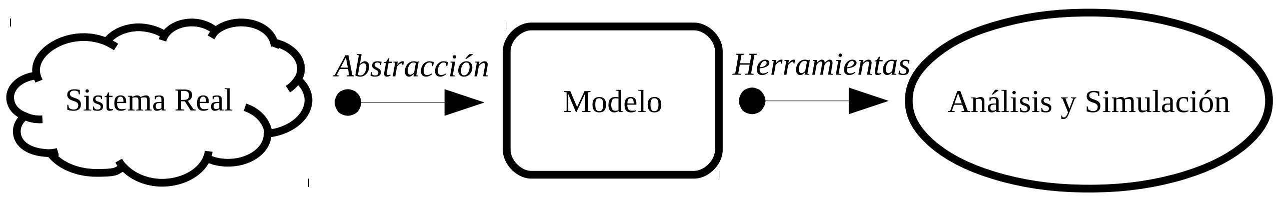
Antonio.Bueno@edu.jccm.es
Antonio.Bueno@uclm.es

RESUMEN
En este trabajo se aborda la necesidad de adecuar el concepto de modelo y los recursos utilizados al nivel educativo en el que se desarrolla la práctica docente, extendiendo el estudio a varios niveles educativos, poniendo el acento en lo relevante y teniendo en cuenta el objetivo que se ha propuesto conseguir con el diseño del modelo, tomando en consideración los recursos intelectuales y materiales, la capacidad de manipulación, propia de cada nivel, y la inclusión, como factores relevantes, del tiempo y el contexto. El elemento conductor para desarrollar este trabajo será la presentación de actividades en los niveles de primaria, secundaria y universidad.

A la querida memoria de mi amigo Bernardino.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los fenómenos de interés científico no puede realizarse, generalmente, de forma directa, sino mediante el uso de modelos simplificados. Un modelo es una representación de una situación en la que algunos aspectos, considerados relevantes, han sido tenidos en cuenta, mientras que otros aspectos han sido obviados o considerados en menor medida [3, 4, 8, 21, 23].



Esta representación emplea algún tipo de formalismo matemático, que permite capturar de forma precisa las características que se pretende estudiar del sistema, para lo que se estructuran los denominados ciclos de modelización [18, 21]. Esta faceta del concepto de modelo es, sin duda, muy importante y de su correcto desarrollo depende un gran número de investigaciones. Otro importante campo donde es posible utilizar modelos es el de la didáctica [2, 4, 5, 7, 11, 15, 18], este uso es especialmente útil cuando se centra en los aspectos educativos de las matemáticas para la preparación de futuros ciudadanos y ciudadanas [19], permitiendo implicar en el desarrollo de la clase de matemáticas a personas con características diferentes [23], también realizando aportaciones al desarrollo de lo que se conoce como alfabetización o competencia matemática general [20], que se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.

Presentar a los alumnos un determinado concepto puede tener un alto grado de complejidad, ya que hay un gran número de factores que pueden influir en este proceso. El docente puede entonces utilizar diferentes estrategias para llevar a cabo esta tarea, adaptando la metodología a la situación. El uso de modelos, combinado con otros métodos, pueden ayudar a hacer las ideas matemáticas más concretas y asequibles a la reflexión [15], es una alternativa costosa pero eficiente, ya que permite presentar a los alumnos la materia de forma distinta y atractiva, cambiando de ritmo del transcurso de la tarea docente.

Desde el punto de vista del profesor el uso de modelos requiere de un esfuerzo extra de preparación y la asunción de una forma de trabajo distinta [2, 11], no siendo eficiente ni necesario, en los niveles pre-universitarios, utilizar esta metodología para obtener simulaciones precisas de situaciones reales, ni resultados exportables para resolver un problema, aunque si es interesante que los alumnos sean capaces de relatar a otros sus resultados.

En este trabajo se presenta el concepto de modelo como recurso didáctico comparado con otras opciones didácticas [2, 7, 11, 18]. El uso de modelos se presenta como una herramienta disponible para ser utilizada en los diferentes niveles académicos, para lo que es necesario adaptar el concepto de modelo a cada uno de estos niveles.

En primer lugar se ofrecen unas consideraciones previas acerca de lo que puede aportar el uso de modelos a la docencia de las matemáticas, planteando la conveniencia de mezclar métodos didácticos y de definir los objetivos que se pretenden lograr con su uso. En el segundo apartado se trata el concepto de modelo, buscando una aproximación que permita su adaptación a las características de los diferentes niveles educativos. A continuación se presentan una serie de actividades que desarrollan la idea del uso de modelos en el aula en los diferentes niveles, comenzando por primaria, nivel en el que utilizaremos la manipulación de materiales adecuados para presentar conceptos a los alumnos y para que practiquen con estos materiales [4, 5, 6, 15]. En el siguiente apartado se presentan actividades para secundaria, tratando la didáctica usando modelos desde el punto de vista del desarrollo de proyectos de construcción de modelos físicos [9, 10, 14], o utilizando un software adecuado para modelar la realizad utilizando funciones [7, 13, 17, 21, 23]. Por último se presentan ideas para desarrollar actividades de nivel universitario, en particular utilizando ecuaciones diferenciales [12], usando herramientas para construir modelos gráficos [16], concretamente se utilizarán Redes de Petri, un tipo de grafo dirigido con dos tipos de lugares que se caracteriza por tener una gran expresividad y un amplio respaldo formal, en este apartado se presentan actividades aplicables a bachillerato en las que se usan herramientas diseñadas utilizando Redes de Petri [1, 3, 8, 6]. Por último se presenta un software realizado específicamente para el modelado de sistemas informáticos, con un alto contenido matemático en su diseño [22].

2. APORTACIÓN DEL USO DE MODELOS EN EL AULA

Durante los últimos años se han producido una gran cantidad de avances, tanto tecnológicos como de conceptos, que han hecho evolucionar el modo en el que un profesor o profesora puede hacer que sus alumnos se acerquen a un determinado concepto. Debido a la gran dificultad que supone el desarrollo de la practica docente en nuestra materia, cualquier aportación para mejorar la práctica docente que pueda obtenerse a partir de estos avances debe ser bien recibida.

El uso del denominado "path-smoothing model", modelo según el cual los alumnos son conducidos a través de los conceptos matemáticos por las explicaciones del profesor y por colecciones de ejercicios seleccionados a tal efecto, tiene, entre otras, la carencia de que los alumnos no desarrollan su sentido crítico ante las matemáticas, ya que no se producen debates acerca de como atacar problemas, con lo que pueden quedar ocultas muchas dudas que no somos capaces de detectar. Una importante limitación de este modelo es que los alumnos pueden encontrarse con grandes dificultades al enfrentarse a un problema que no les sea familiar.

El desarrollo del sentido crítico se produce cuando se presentan en el aula actividades que permiten a los alumnos tomar decisiones, de manera que estas sean tan importantes en el desarrollo de los proyectos que hagan al equipo de trabajo plantearse si han sido decisiones correctas. La madurez de los alumnos será determinante a la hora de proponer actividades de este tipo.

Es importante destacar que los modelos didácticos no son excluyentes, y que, en mi opinión, el uso de uno u otro no puede ser considerado pernicioso, muy al contrario, pienso que es necesario utilizar métodos variados para que los alumnos no desarrollen todo su aprendizaje sin tener la posibilidad de trabajar con varios enfoques pedagógicos distintos. La dificultad estriba en utilizar de forma adecuada uno u otro enfoque dependiendo del contexto, es decir, de las características del grupo, del momento del curso en que nos encontremos, de la dificultad del concepto a presentar o desarrollar, etcétera.

Podríamos decir que hay un antiguo debate abierto en el colectivo de docentes, que tiende a tratar el problema de presentar matemáticas a un grupo de alumnos como una relación de dicotomías enfrentadas: exploración o instrucción, métodos inventados o métodos dados, presentaciones formales o informales, profesor que habla y alumno que escucha o profesor que escucha y alumno que habla,... No obstante, independientemente de debates teóricos, cada profesor o profesora trata de resolver cada situación particular según el contexto en que se produce. Dentro de este contexto podemos incluir las propias características del docente, tanto personales, ya que cada uno de nosotros tiene una forma de ser que puede encajar mejor con un determinado tipo de docencia, como de formación.

También dentro del contexto debemos incluir las características del grupo de alumnos y de los propios alumnos como individuos. Es, por todo, ello muy difícil dar una respuesta concreta a cada una de las dicotomías presentadas, quizá la respuesta más correcta para la mayoría de los docentes sea "*¡depende!*".

El hecho es que, por lo general, la mezcla de propuestas didácticas es lo que más se suele utilizar, de esta forma se procura incorporar al proceso de enseñanza y aprendizaje, una mezcla de métodos que permita mantener el equilibrio entre lo que nuestros alumnos pueden aprender y lo que nuestros alumnos tienen que aprender. Dentro de esta mezcla de métodos, el desarrollo de modelos es una alternativa que presenta ciertas características diferentes al resto, siendo muy conveniente su uso en determinados momentos.

Para utilizar modelos como elemento didáctico el profesor debe seleccionar un problema que se ajuste al nivel de los alumnos, ni demasiado fácil, ni demasiado complejo, además debe darles tiempo suficiente para desarrollar correctamente cada una de las fases que implica el diseño de modelos. Estar atento a las ideas que los alumnos van proponiendo en cada momento, para ir guiando las decisiones que se deben tomar, intentando que los alumnos no consideren esta ayuda como excesivamente relevante, ya que, el modelo debe ser, desde su punto de vista, suyo. En caso de que, a pesar del intento del profesor, se tomen malas decisiones, se debe ayudar a los alumnos en la revisión de su trabajo. También conviene ayudar a los alumnos a reconocer que es lo que han aprendido y como está relacionado con otros conocimientos adquiridos.

3. EL CONCEPTO DE MODELO MATEMÁTICO

El uso de modelos en clase de matemáticas se caracteriza por la propuesta que se hace a los alumnos para que investiguen, desde un punto de vista matemático, los hechos que suceden en un experimento o lugar determinado. Así, con ayuda de las matemáticas, obtendrán representaciones y podrán realizar simulaciones o interpretaciones acerca de un determinado fenómeno.

Sin embargo, el concepto de modelo matemático es muy amplio. Podemos considerar dentro de este concepto a un conjunto de símbolos y sus relaciones, y expresar modelos utilizando diferentes herramientas matemáticas, como gráficos, tablas, grafos, ecuaciones, etc... También podemos considerar otro tipo de modelos que implican el uso de materiales, en algunos casos se puede producir un resultado físico, tipo maqueta o construcción, que se obtiene gracias a las cualidades matemáticas y artísticas del grupo de alumnos implicados, en estos casos, el modelo es presentado utilizan cierto material.

En este sentido, el uso de modelos en educación tiene ciertas características que lo diferencian del uso de modelos en investigación, incluso dentro del concepto de modelo para su uso en educación podemos establecer diferencias dependiendo del nivel educativo y del concepto a cuyo estudio deseemos aplicarlo.

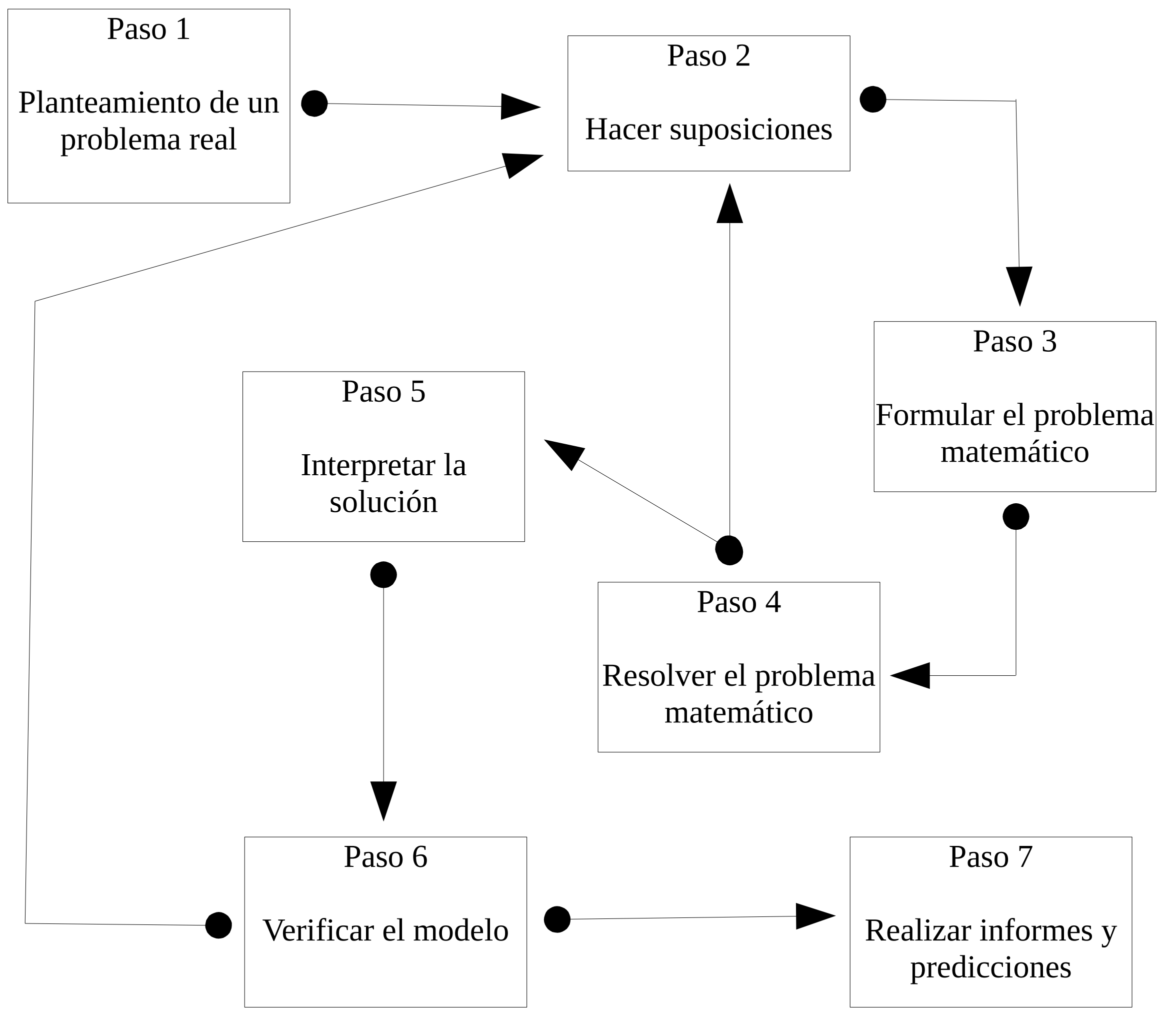
Un modelo puede consistir en un material que esquematiza y ejemplifica un concepto abstracto o en una relación formal que proporciona estructura a unos fenómenos por medio de conceptos matemáticos, en añl caso de usar un material, éste debe estar sometido a unas reglas que muestran el concepto. En general, podemos clasificar a los modelos en concretos, si usan un material físico, y pictóricos si representan ideas mediante diagramas o ilustraciones. Para el nivel de primaria es más adecuado el uso de modelos que utilizan materiales para ejemplificar un concepto abstracto, y este será el concepto de modelo que utilizaremos en las actividades presentadas en este trabajo para este nivel, como el modelo lineal y el de medida, que se asocian con la multiplicación y la división, aunque también son útiles para tratar otros conceptos. Sin embargo no debemos olvidar que no todos los materiales son igualmente aconsejables, la cualidad de un material de hacer ver con mayor claridad las acciones propias de un problema en la situación en que se inscribe se denomina transparencia, según esta idea, se debe intentar seleccionar un material lo más transparente posible para desarrollar nuestra didáctica utilizando modelos.

Para el desarrollo de un concepto usando modelos podemos considerar varios pasos, todos ellos son útiles, pero dependiendo de las características del modelo, o el uso que se le va a dar, algunos de estos pasos pueden ser obviados. Frecuentemente el proceso comienza planteando un problema real, de manera que para la resolución de este problema se precise del uso de herramientas matemáticas.

Antes de describir el modelo se suele comenzar con la selección de los elementos relevantes, candidatos por tanto a ser tenidos en cuenta para la construcción del modelo, y la selección de los elementos no fundamentales o no relevantes. En este proceso de filtrado de parámetros, debemos considerar elementos tanto matemáticos como de otra índole, en caso de ser necesarios debido a las características del modelo.

Tras realizar ciertas suposiciones o simplificaciones, se obtiene como resultado el denominado modelo conceptual, que será traducido a un modelo matemático, a continuación se analiza el problema utilizando las variables seleccionadas para establecer relaciones entre ellas, y así se obtiene un modelo matemático que será analizado para obtener un resultado. Este resultado matemático debe ser traducido de nuevo al contexto original, es lo que se denomina interpretar el modelo. Por último se deben validar las soluciones obtenidas.

Frecuentemente es necesario reiniciar este proceso de modelado ajustando algunas suposiciones o replanteando las variables elegidas, en definitiva, replanteando el modelo dependiendo del funcionamiento de las simulaciones que con él se realicen. El siguiente esquema ilustra este proceso:



Esta estructura permite muchas variantes para la aplicación de modelos en la docencia de matemáticas, a continuación se describen estos pasos con mayor detalle:

- Paso 1: El planteamiento de un problema real añade un toque de motivación al estudio, en este momento se presenta a los alumnos la situación que se intentará modelar, estos realizarán un primer análisis. Para ello es conveniente dividir la clase en grupos, de manera que cada grupo realice una primera planificación del trabajo.
- Paso 2: De manera individual o en grupo, se harán suposiciones acerca de qué variables es preciso tomar en consideración para planificar el estudio del modelo, para ello se puede generar una discusión en el aula después, de realizar una búsqueda de información usando diferentes medios.
- Paso 3: La formulación del problema matemático consiste en discutir acerca de qué elementos matemáticos podemos utilizar para relacionar las variables seleccionadas, quizá sea necesario utilizar alguna expresión algebraica o determinados cálculos. Estos elementos necesarios para nuestro estudio serán incorporados al proyecto en este momento.
- Paso 4: Con este paso se destaca la necesidad de conocer ciertas técnicas adecuadas de cálculo y de resolución de problemas para obtener resultados.
- Paso 5: Los alumnos deben comprobar sus resultados para decidir si han dado una respuesta al problema planteado dentro de los límites establecidos por las suposiciones que han hecho.
- Paso 6: La verificación consiste en explorar maneras de mejorar el modelo, esta mejora puede llegar por medio de la inclusión de nuevas variables, por la supresión de algunas o replanteando alguna de las fórmulas utilizadas.
- Paso 7: La muestra de resultados es una parte muy importante para el desarrollo de la didáctica utilizando modelos. En el caso de estar realizando una investigación, es fundamental realizar la presentación de lo que se ha obtenido para realizar predicciones y para explicar al resto de la comunidad los avances que se han conseguido. Desde un punto de vista didáctico, los alumnos reconocen la presentación de los resultados a su entorno como un logro, sirviendo el reconocimiento recibido como motivación para realizar estudios posteriores y como motivo de satisfacción.

Este esquema es adaptable al nivel educativo en el que se va a implementar el uso de modelos y a los objetivos que nos proponemos. El uso que se dará al modelo determinará su grado de complejidad, su nivel de precisión y las etapas que se utilizarán para su descripción. No es lo mismo utilizar un modelo para investigar que como método docente, en el primer caso los requerimientos serán muy estrictos, en el segundo se hará especial hincapié en los aspectos que el profesor considere necesarios para lograr que los alumnos trabajen un determinado concepto.

3. MODELOS PARA PRIMARIA

El uso de modelos en primaria aporta una colección de actividades que se puede encadenar para presentar a los alumnos las matemáticas desde un punto de vista manipulativo. La edad y madurez de los alumnos de primaria es muy variada, por lo que en este apartado se presentarán varias propuestas de trabajos con modelos, adaptadas al nivel al que van dirigidas.

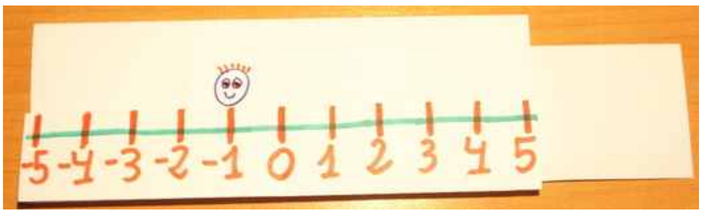
En este nivel el modelo es, generalmente, una herramienta hecha, ya que se hará especial hincapié en manipular objetos ya hechos para adquirir conceptos de forma significativa. También se presentarán juegos relacionados con el modelo utilizado.

Propuesta 1: Modelo lineal.

Utilizaremos herramientas como las regletas de Mª Antonia Canals, la libreta de los números y construcciones software para ilustrar el uso de este modelo en combinación con el juego para introducir algunas relaciones numéricas básicas.

- Descomposición de números en sumandos: usando las regletas de Mª Antonia Canals, planteamos a los alumnos la descomposición de un numero en diferentes sumandos, de forma manipulativa. Por ejemplo podemos representar el número 16 tomando una regleta de longitud 10 y otra de longitud 6. A continuación formamos otra distribución, utilizando otras regletas, por ejemplo una de longitud 7, otra de longitud 5, una más de longitud 4.

- Construcción del juego de la línea: los alumnos realizarán una actividad en la construirán con papel una recta numérica sobre la que situarán una marca móvil. Utilizarán para ello dos hojas de papel, una para construir una línea sobre la que se deslizará la marca, y otra para la marca móvil. La línea construida servirá para introducir los números enteros, para ello estará dividida con marcas representando los números del -10 al 10. Se propone como actividad que los alumnos coloquen la marca móvil en el punto que se dé de la forma:
    1. Directamente: se dice un número y todos colocan la marca en su lugar.
    2. A partir de un determinado lugar, aumentando o disminuyendo según un valor dado.
    3. Por parejas, jugar a la cuerda: un alumno será “positivo” y el otro “negativo”, se sitúa la marca en el cero, y por turnos los alumnos lanzan un dado, cada uno moverá la marca hacia un lado el lado que le corresponde según su papel, tantos lugares como indique el dado lanzado. Gana el jugador que consigue que la marca “caiga” por su lado, es decir, cuando se alcanza como resultado el valor 10 o -10.

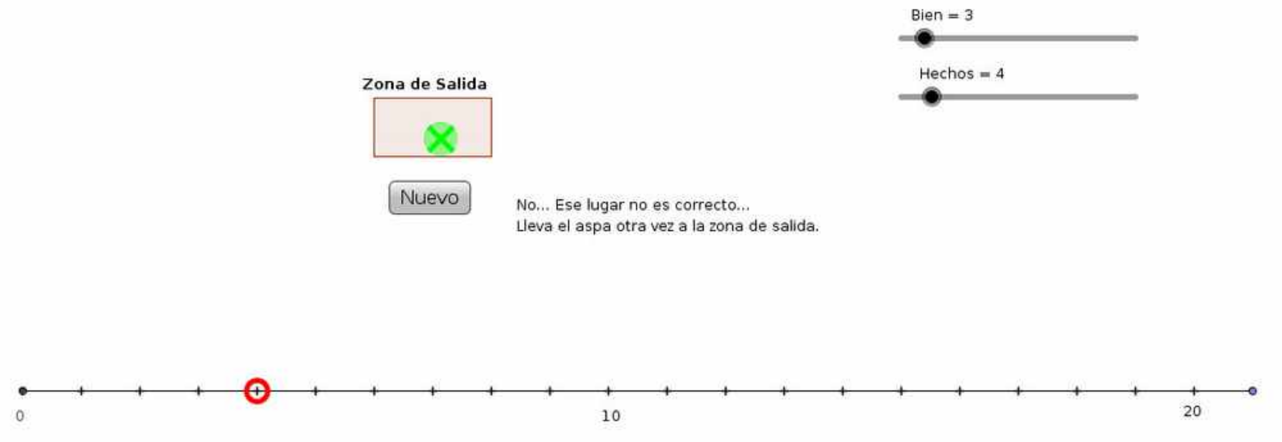


- Uso de software para que los alumnos practiquen, a su ritmo, la colocación de números enteros en la recta o las operaciones de suma y resta de números enteros. Las características de un software de este tipo son:

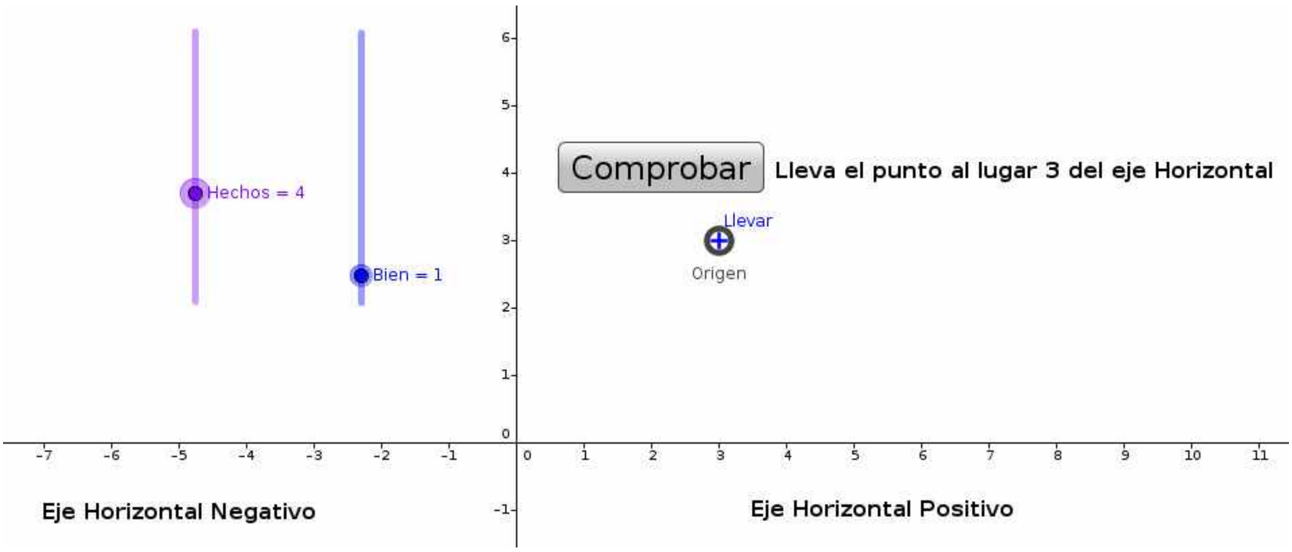
1. El alumno puede realizar cuantos ejercicios desee.
2. El software indica si un ejercicio se ha realizado correctamente o no.
3. El software anota los resultados, de manera que cualquier persona puede comprobar la evolución del alumno.

A continuación se incluyen imágenes de dos ejemplos de este tipo de aplicaciones:

- Modelo para practicar el cambio aumentando: se da un número, señalado sobre la recta con un redondel rojo, y se pide que se coloque sobre la recta un aspa en un lugar relacionado con el primero por la descripción de un cambio aumentando, por ejemplo, sitúa el aspa en el lugar que le corresponde si añadimos 8 unidades al punto rojo.



- Modelo para practicar la colocación de números enteros en la recta: en este software se ofrece un aspa que debe estar situada en un determinado lugar del escenario, denominado origen, para que, pulsando sobre el botón etiquetado con "Nuevo" se obtenga el valor del punto de la recta sobre el que debemos colocar el aspa, una vez situado, podemos pulsar sobre el botón "Comprobar" y podremos entonces saber si hemos situado el aspa en el lugar correcto.



Propuesta 2: Modelo de áreas.

Utilizaremos bloques multibase para introducir las operaciones básicas, con esta herramienta se presentarán las operaciones básicas de forma manipulativa. Para formar las áreas de cada operación se utilizarán bloques multibase, herramienta que permite realizar descomponer una pieza 100×100 en 10 piezas 10×1 y estas en 10 piezas 1×1.

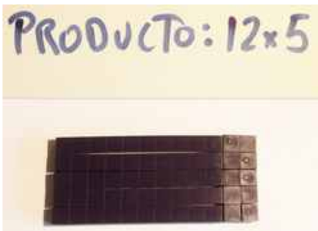
- Practicando la conversión de unidades: esta actividad servirá para presentar los bloques multibase a los alumnos y para tomar conciencia de la posibilidad de utilizar cambios de piezas en función de la necesidad. Formamos tres montones de piezas:
    1. Una pieza cuadrada grande, una barra y 15 piezas pequeñas.
    2. Doce barras.
    3. 35 piezas pequeñas.

  Se deben hacer los cambios necesarios para que los montones tengan el mismo valor, pero con diferente distribución de piezas.

- La suma: se presentarán dos números escritos y los alumnos tendrán que obtener una representación en bloques de cada número y unir los dos, para, finalmente, realizar las conversiones necesarias para obtener el resultado.

- La resta: se presentarán dos números escritos y los alumnos obtendrán sus respectivas representaciones en dos montones separados, deben reconocer cuál de ellos es mayor. Para restar retirarán de cada montón el mismo número de piezas hasta que uno de ellos se quede sin piezas. Para ello realizarán las conversiones de unidades que necesiten.

- La multiplicación: se presentarán dos números de 1 a 9 escritos, los alumnos obtendrán el resultado de su multiplicación construyendo un rectángulo que tenga como longitud de los lados los números dados, contando los cuadraditos que forman el rectángulo. A continuación se toman dos números un poco mayores, de 10 a 20, y se repite el proceso.



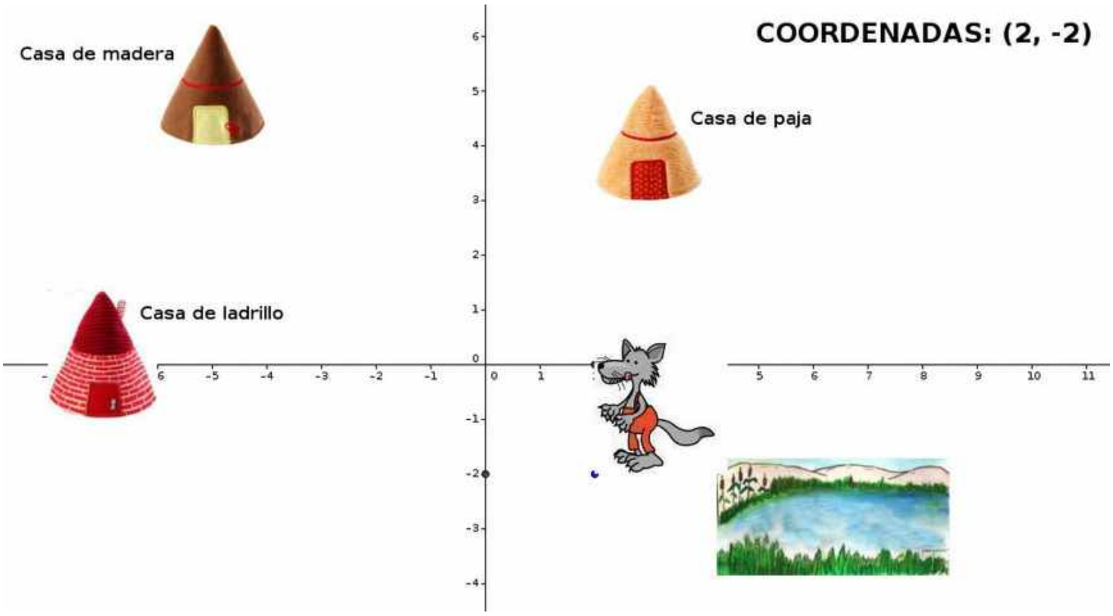
- La división: se presentan dos números para dividir el mayor entre el menor. Inicialmente serán dos números no muy altos, incrementando la dificultad poco a poco. Para resolver la división que se proponga se utilizarán los bloques multibase, construyendo líneas con una cantidad de bloques unidad o piezas de decenas, la longitud de cada línea será igual a la cifra menor de las dos propuestas, que es el divisor. Vamos añadiendo líneas hasta utilizar tantos bloques unidad como indique la cifra mayor propuesta, es decir, el dividendo. Es posible que la última línea esté completa, en ese caso la división es exacta y el resultado es el número de filas, pero si la última fila esta incompleta, retiramos de la construcción los bloques que la forman, y obtenemos como cociente el número de filas que han permanecido en la construcción, siendo el resto el número de piezas retiradas en esta última acción.

Propuesta 3: Modelo de coordenadas

Utilizaremos Geogebra para introducir el concepto de coordenadas, junto con una recreación del cuento de los tres cerditos para introducir el movimiento lineal entre cuadrantes del plano:

- El cerdito pequeño se hizo una casa de paja en el primer cuadrante, en el que tanto la coordenada X como la coordenada Y son positivas.
- El cerdito mediano se hizo una casa de madera en el segundo cuadrante, en el que la coordenada X es negativa y la coordenada Y es positiva.
- El cerdito mayor se hizo una casa de ladrillo en el tercer cuadrante, en el que tanto la coordenada X como la coordenada Y son negativas.
- El lobo, que estaba junto al lago en el cuarto cuadrante, donde la coordenada X es positiva y la coordenada Y es negativa, se encontró al cerdito pequeño y lo persiguió hasta su casa. El cerdito se escondió en ella, pero el lobo sopló y la casita voló...
- El cerdito huyo a refugiarse a la casa de su hermano mediano, pero el lobo lo persiguió. El cerdito se escondió con su hermano, entonces el lobo sopló y la casita también voló...
- Lo dos cerditos huyeron a refugiarse a la casa de su hermano mayor, pero el lobo los persiguió. Los cerditos se escondieros con su hermano, entonces el lobo sopló y sopló, pero la casa no voló.
- Intentó entrar por la chimenea, pero los cerditos hicieron fuego y entonces el lobo se quemó. El lobo quemado huyó corriendo hasta el lago, que, como hemos dicho antes, estaba en el cuarto cuadrante, donde la coordenada X es positiva y la coordenada Y es negativa, y en el lago se metió.
- Y colorín colorado, ahora reproduce con el ordenador el cuento que te he contado...

Una vez que se ha leído el cuento utilizando la descripción de las coordenadas, se propondrá que se recree lo sucedido utilizando un software con el que podrán recorrer el plano moviendo la imagen de un lobo, con el que visitarán las casas de los cerditos.



4. MODELOS PARA SECUNDARIA

En esta etapa podemos distinguir una gran variedad de alumnado y problemáticas, tanto educativas como sociales, los alumnos son adolescentes y, en ocasiones, crear un buen clima en el aula es un factor muy importante para el desarrollo de la tarea docente. En este contexto, el trabajo con modelos en el que los alumnos deben realizar una construcción física, introduce una tarea en la que todos los alumnos deben cooperar en mayor o menor medida.

Conviene que los modelos se desarrollen mediante la división de la tarea propuesta en tareas menores ofertadas a grupos, de manera que los grupos cooperen para el diseño final del modelo, y que dentro de cada grupo los alumnos colaboren para obtener el resultado parcial que deban añadir a las de los otros grupos para completar la tarea.

Propuesta 1: Modelo lineal para representar el sistema solar.

Se propone a los alumnos la construcción de un modelo del sistema solar en el que representar el Sol y los planetas manteniendo la proporcionalidad de las distancias entre las órbitas de los diferentes planetas, y para poder visualizar esta proporcionalidad se representarán los planetas alineados.

Las fases para realizar esta actividad pueden ser:

1. Presentación de la tarea al grupo: el grupo recibirá la propuesta.
2. Reparto de la tarea por grupos: a cada grupo se asignarán dos objetos del sistema solar. Tendrán que buscar información y llevarla a clase para compartirla. Dentro de cada grupo se realizará el reparto de tareas, y en este momento cada alumno puede aportar ideas acerca de como desarrollar la tarea encomendada. El profesor ejercerá de guía para que las decisiones sean adecuadas para que la tarea pueda desarrollarse de forma aceptable.
3. Se establecen las proporciones que se utilizarán para el diseño: esta parte es muy importante, porque concierne al concepto matemático que se pretende trasladar a los alumnos, deben quedar muy claras las proporciones tanto de tamaño como de distancia que se deberían utilizar, aunque luego solo se trasladen al modelo con diferente grado de aproximación a la

realidad, ya que, en este ejemplo se hará especial hincapié en la proporcionalidad con respecto a las distancias entre planetas.

4. Se realizan los planetas físicamente, utilizando los materiales adecuados: ahora los grupos son casi totalmente autónomos. Deben utilizar la información obtenida con anterioridad para realizar un diseño aceptable de cada planeta, con el objeto de que los planetas sean reconocibles y que aporten vistosidad al resultado final.
5. Se colocan en un lugar bien visible por toda la comunidad educativa: utilizando los objetos construidos y los datos de proporcionalidad calculados, se buscará un lugar en el vestíbulo del centro, que puede ser el techo, en el que ubicar lo objetos.
6. Se realizan turnos para explicar a los compañeros del centro que así lo requieran el modelo, explicando el sistema solar y las particularidades de los diferentes planetas, haciendo especial hincapié en la proporcionalidad usada para la representación.

En las siguientes imágenes se muestra un ejemplo del resultado que se pretende obtener con esta actividad. En la primera se muestra el modelo del sistema solar en toda su extensión, en las otras dos se muestran detalles de la zona cercana al Sol.

Propuesta 2: Modelo funcional para representar el comportamiento del agua.

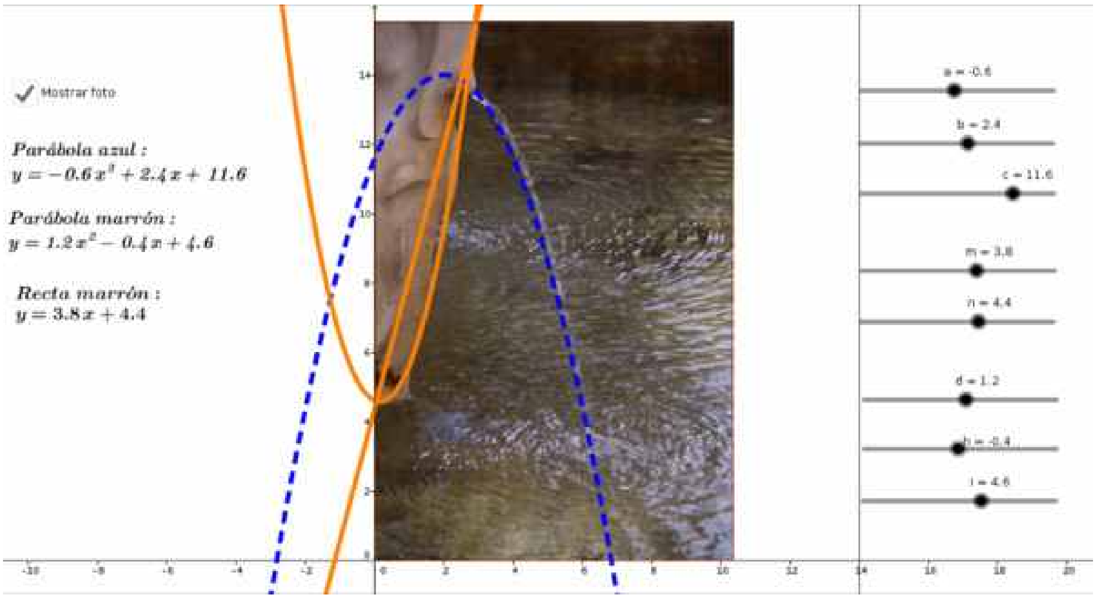
Se propone a los alumnos la construcción de un modelo por ordenador para estudiar la trayectoria que siguen los chorros de agua. La idea es que se obtengan las ecuaciones de las parábolas y rectas que pueden servir para representar matemáticamente un objeto real, utilizando una fotografía y un software que permita su estudio.

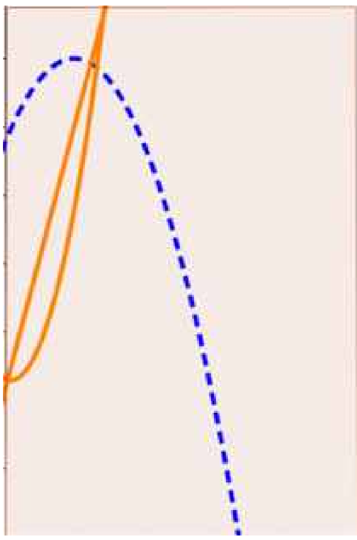
Las fases para realizar esta actividad pueden ser:

1. Presentación de la tarea al grupo: se explicará en qué consiste la actividad. En este momento se propondrá a los alumnos que hagan fotos de una fuente que encuentren durante un fin de semana, o de algún lugar que contenga formas lineales y de parábola.
2. Reparto por grupos: se formarán grupos para que cada uno realice un modelo.
3. Selección de la fotografía: cada grupo cargará las fotografías realizadas por sus miembros en

los ordenadores del aula de informática y decidirán cuál es la más conveniente para realizar el modelo. En este paso el profesor puede asesorar al grupo, intentando que la fotografía elegida sea, efectivamente, adecuada.

4. Se realiza el reparto de tareas dentro de cada grupo: los alumnos deben estudiar varios objetos en la fotografía, este estudio se puede hacer subdividiendo el grupo, para que cada pareja de alumnos se dedique a modelar un objeto diferente. Cada objeto debe ser modelado por una o varias funciones lineales o parábolas, después se pondrá en común el resultado obtenido.
5. Se realiza el montaje de los diferentes objetos diseñados por los componentes del grupo, los alumnos realizan el montaje global de la escena que eligieron.
6. Los grupos imprimen su diseño, que será montado en cartulinas con el objeto de realizar una exposición en un lugar bien visible del centro. Cada lugar se presentará junto al listado de las ecuaciones que sirven para realizar el modelo y con el nombre del lugar al que hacen referencia. También se puede colocar al lado del modelo la foto que ha servido de guía para su realización.





Parábola azul :
$y = -0.6\,x^2 + 2.4\,x + 11.6$

Parábola marrón :
$y = 1.2\,x^2 - 0.4\,x + 4.6$

Recta marrón :
$y = 3.8\,x + 4.4$

5. MODELOS PARA UNIVERSIDAD

En este nivel educativo los modelos deben incluir todas las fases que están implicadas en el concepto dado de modelo, de este modo, se puede introducir al alumno en el mundo de la investigación mediante el uso de modelos para obtener resultados rigurosos y aplicables a la solución de problemas reales.

Como elementos destacados en el campo de la producción de modelos se encuentra el uso de ecuaciones diferenciales, por ello se presenta en este trabajo un ejemplo de una actividad de este tipo. También se presenta en este trabajo un procedimiento para generar modelos utilizando Redes de Petri. Los modelos generados usando esta herramienta son aplicables a otros niveles educativos, en este caso se utilizarán en bachillerato. Para terminar, se presenta un software para generar modelos que sirven para estudiar el rendimiento de sistemas informáticos.

Propuesta 1: Modelos utilizando Ecuaciones Diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales son una gran herramienta para describir fenómenos de la vida diaria de forma matemática cuando en el proceso de construcción del modelo se tiene en cuenta la razón de cambio de una variable.

En esta propuesta consideramos el ejemplo del modelo asociado a la caída libre. El planteamiento es el siguiente: los alumnos deben estudiar la caída de un cuerpo desde cierta altura, tomando en consideración los elementos que están implicados en esta caída. La pregunta a la que deben responder es: ¿Cuanto tarda un cuerpo en caída libre en alcanzar el 95% de su velocidad terminal? Para ello se pueden formar grupos de trabajo.

1. Cada grupo elegirá un objeto sobre el que realizar el estudio, conviene que sea un objeto sobre el que después se puedan realizar experimentos que corroboren los resultados.
2. Los grupos, guiados por el profesor, tomarán en consideración las fuerzas que actúan sobre el objeto, la gravedad y la resistencia que ejerce la atmósfera terrestre.
3. La variable independiente será el tiempo, en segundos, y la variable dependiente la velocidad de la caída, en metros por segundo. Como parámetros tomaremos la constante gravitatoria, g, en metros por segundo al cuadrado, la masa del objeto que cae en kilos y el coeficiente de arrastre, k, en kilos por metro.
4. El modelo se obtendrá a partir de la fórmula de la segunda ley de Newton: F=m.a.

El desarrollo del trabajo será guiado por el profesor, de manera que se considere que hay dos fuerzas opuestas actuando sobre el objeto que cae, la atracción terrestre y la fuerza de resistencia:

- Atracción terrestre: $m.g$
- Resistencia: $k v^2$

Estas dos fuerzas actuando sobre el objeto en sentidos opuestos, dan como resultante una fuerza cuya inclusión en la fórmula de la segunda ley de Newton, produce:

$$m.g - k v^2 = m.\frac{dv}{dt}$$

Y esta es la ecuación diferencial de primer orden que modela la caída libre de un cuerpo. El punto de equilibrio se obtiene despejando el término diferencial e igualándolo a cero:

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{k}{m}v^2 \quad \Rightarrow \quad g-\frac{k}{m}v^2=0 \quad \Rightarrow \quad v=\pm\sqrt{\frac{g.m}{k}}$$

La solución positiva es $v=\sqrt{\frac{g.m}{k}}$ así, suponiendo que $v(0)>0$ se obtiene:

$$\lim_{t\to+\infty} v(t)=\sqrt{\frac{g.m}{k}}$$

Siendo este el valor de la velocidad terminal que alcanza el cuerpo en su caída. Ahora cada grupo aplicará este modelo al objeto seleccionado.

Un ejemplo puede ser un objeto de 54 kg, tomando g= 9.8 m/seg^2, k=0.18 kg/m. En este caso tenemos:

$$\sqrt{\frac{54\times 9.8}{0.18}}=54.22 \quad \Rightarrow \quad 95\% \text{ de } 54.22=51.51$$

Tomando como condición inicial (t,v)=(0,0), el resultado en este caso es que t=10.12 segundos.

Propuesta 2: Modelos generados utilizando Redes de Petri.

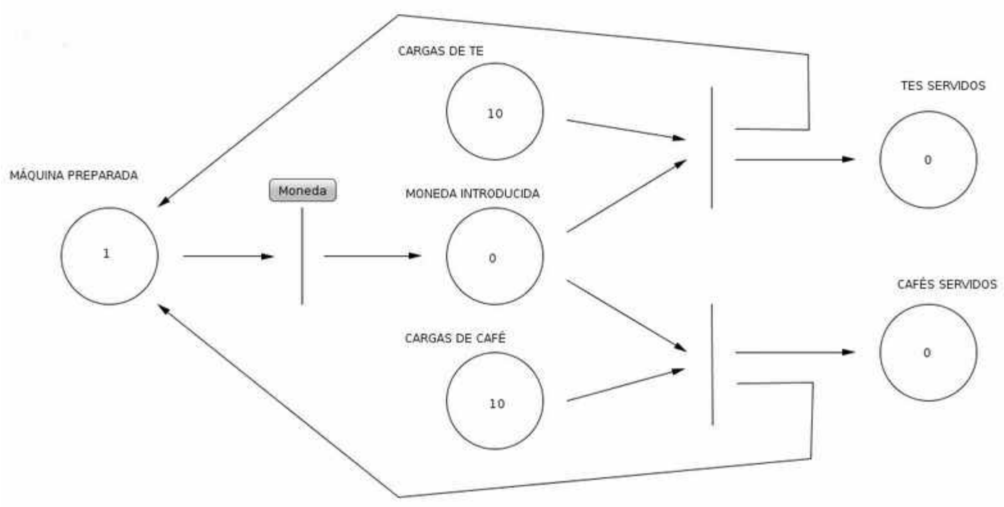
El uso de Redes de Petri permite el diseño de modelos de una forma rigurosa, capturando aquellos parámetros que se consideran importantes de forma eficiente. Las redes de Petri son una extensión del concepto de grafo dirigido, incluyendo arcos dirigidos y dos tipos de nodos: lugares y transiciones. Los P-elementos, o lugares, representan entidades del mundo real que se interpretan como elementos pasivos, pueden ser condiciones, recursos o instancias de recursos, variables, colas de espera, etc. Por otra parte, las entidades que se interpretan como elementos activos se modelan por medio de T-elementos, y pueden ser eventos, acciones, sentencias, transmisión de mensajes, etc.

La evolución de los sistemas se produce por medio de los elementos activos, ya que los lugares contienen tokens, es decir, marcas que permiten determinar el estado del sistema, en función de la cantidad de marcas que ocupan cada lugar. Una característica de estos modelos es que dos transiciones pueden ser realizadas, o disparadas, simultáneamente, a esto se le conoce como principio de concurrencia, teniendo en cuenta que la posible simultaneidad de acciones no impone en absoluto la necesidad de hacerlas coincidir en el tiempo, este principio únicamente indica que varias transiciones pueden dispararse a la vez porque que no hay una relación de causalidad entre ellas, pero no se impone su ejecución solapada.

Existe una gran variedad de redes de Petri, usándose un tipo u otro en función del sistema que se desea modelar. En cualquier caso, el modelo de red de Petri que se necesite debe estar bien definido, para que los resultados que se desprendan de su uso sean válidos. Podemos encontrar redes que incluyen en su definición probabilidades, tiempo, urgencia o todos estos elementos, también hay redes con diferentes tipos de arcos y con tokens que pueden contener cierto tipo de información de manera intrínseca. Con todo ello se pueden construir modelos muy expresivos, teniendo en cuenta que cuanto más elementos incluya un modelo más complejo será su estudio.

Gráficamente, los lugares se representan con círculos, mientras que las transiciones se representan con rectángulos o líneas. Los tokens sobre los lugares se representan mediante puntos, o mediante un número situado en el lugar, indicando la cantidad de tokens que lo ocupan.

Un ejemplo sencillo para ilustrar la potencia descriptiva de los modelos generado usando redes de Petri es el siguiente: una máquina, que ofrece al usuario la posibilidad de elegir café o té, teniendo una cantidad limitada de cada producto, supongamos que la máquina tiene 10 cargas de cada producto. El siguiente esquema sería el modelo:



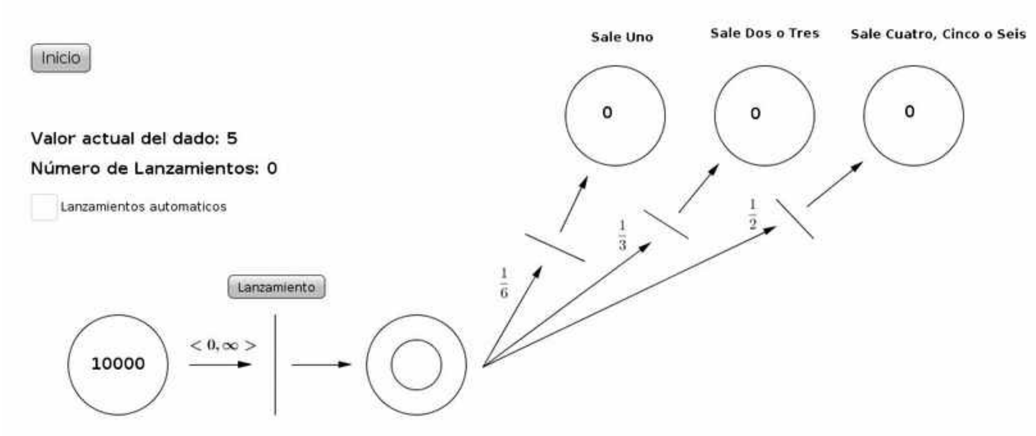
En este ejemplo, un cliente inserta una moneda en la máquina, ejecutando la transición etiquetada con la leyenda *moneda*, en ese momento se habilitan las transiciones que permiten que el usuario pida un café o un té. Una vez pulsada la transición correspondiente a la elección, se acumula la petición en el registro, se disminuye la carga del producto en la máquina en una unidad y la máquina vuelve a estar preparada para un nuevo cliente.

En este trabajo vamos a utilizar un modelo probabilístico y temporizado de redes de Petri, incluyendo urgencia. La inclusión del tiempo significa que cada arco que sale de un lugar tendrá asignado un intervalo temporal de la forma $< a , b >$, con $b \geqslant a$, que indica que para que se pueda disparar la pos-transición asociada deben transcurrir *a* unidades de tiempo desde que el token llega al lugar y la ejecución podrá realizarse durante (*b–a)* unidades de tiempo, transcurrido este tiempo el token no podrá ser utilizado para disparar esta transición. Para ello es necesario incluir un mecanismo que permita capturar la antigüedad de tiene un token en un determinado lugar, es decir, las unidades de tiempo que transcurren desde que llega a lugar hasta el momento actual. La inclusión de la urgencia significa que podemos marcar a un arco que salga de un lugar con un asterisco, en vez de con un intervalo temporal, esto significa que la correspondiente pos-transición será disparada en cuanto este preparada para ello, sin dejar pasar el tiempo, es decir, la pos-transición apuntada por este arco se convierte en urgente. Por último la inclusión de la probabilidad en el modelo se realiza por medio de lugares de decisión, cuyo diseño gráfico serán dos circunferencias concéntricas, la característica de estos lugares de decisión es que todas sus pos-transiciones tendrán asignada una probabilidad, de manera que la ejecución de una u otra dependerá de la distribución de probabilidad asignada al conjunto de pos-transiciones, además la ejecución en este caso se realizará con urgencia.

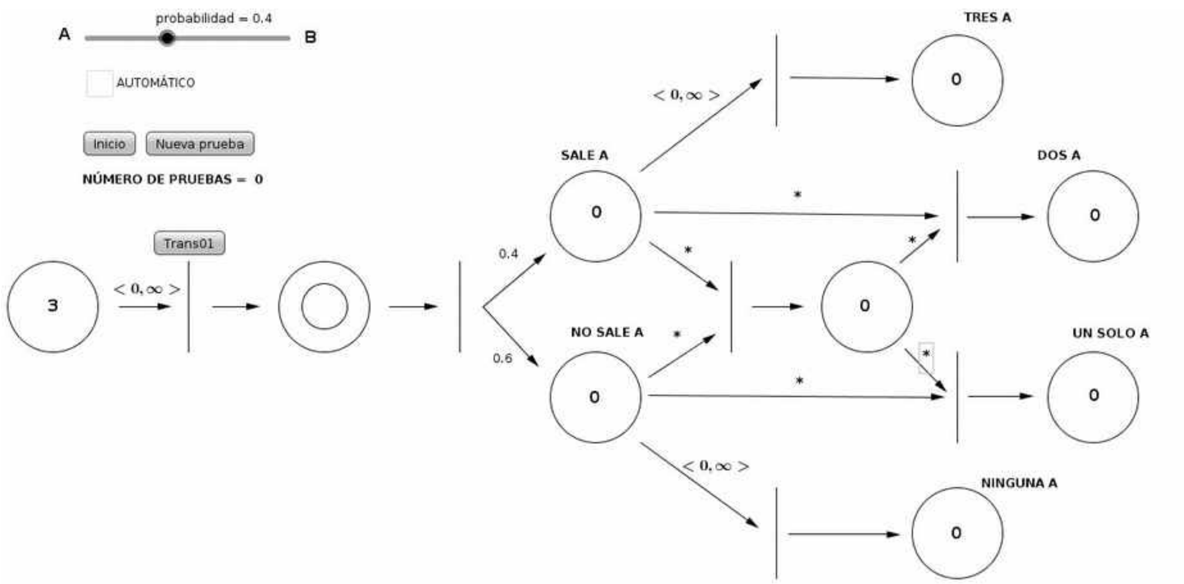
Incluimos a continuación algunos modelos de ejemplo, que pueden ser utilizados en secundaria o bachillerato:

1. Lanzamiento de un dado: en este ejemplo se simula el lanzamiento de un dado, capturando el resultado en el caso de que salga un uno, de que salga un dos o un tres y de que salga un

cuatro, un cinco o un seis. Este modelo utiliza una transición no urgente, cuyo único pre-arco está etiquetado con el intervalo temporal $<0,\infty>$, de manera que estará disponible para ser ejecutada cuando el usuario lo desee, siempre que queden tokens en el lugar inicial. Además incluye un lugar de decisión con una distribución de probabilidades ajustada al enunciado. El software permite además que se realicen lanzamientos de manera automática, con lo que los alumnos pueden simular hasta diez mil lanzamientos de un dado, observando como la tendencia de las frecuencias relativas es la probabilidad conforme crece el número de lanzamientos.

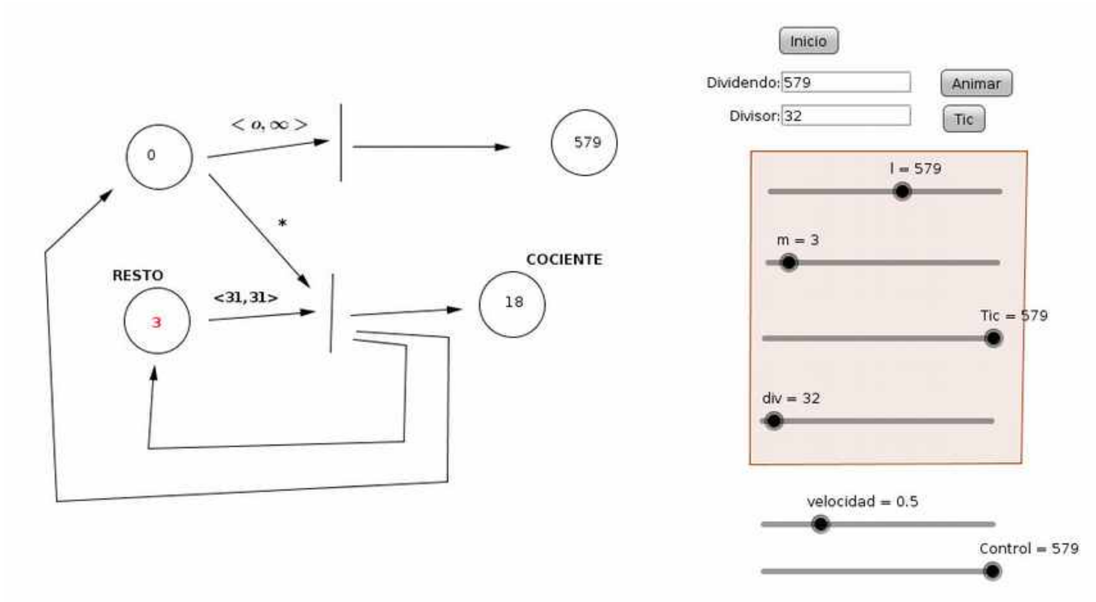


2. Simulación de tres experimentos independientes que pueden dar un resultado, con cierta probabilidad: se trata de estudiar cuál es la probabilidad de que cierto resultado se de una sola vez. El modelo de red de Petri generado utiliza un lugar de decisión y arcos etiquetados con tiempo y con urgencia. Un ejemplo puede el lanzamiento de tres monedas y estudiar la probabilidad de que salga una sola cara, para ello situaremos el deslizador correspondiente a la probabilidad en el valor 0.5, si lo usamos para lanzar tres dados y preguntamos por la probabilidad de que salga un solo 2, por ejemplo, situaremos el valor de la probabilidad en 0.16, de este modo, podemos adaptar el software a diferentes problemas. De nuevo, los alumnos podrán simular gran cantidad de lanzamientos, utilizando para ello la opción de ejecución automática.



3. Modelo para estudiar la división con resto: en este modelo se incorpora un arco etiquetado con un intervalo temporal que permite la ejecución de su pos-transición después de que

pasen una cantidad de unidades de tiempo igual al divisor menos una unidad, además esta ejecución será urgente. De este modo, en el lugar etiquetado con la leyenda “cociente” se acumularán tantas agrupaciones de tamaño el divisor como puedan hacerse con la cantidad de tokens incluida en el cuadro de texto “Dividendo”. Para la simulación se supondrá que en cada unidad de tiempo se ejecuta una transición, si está disponible la transición urgente se ejecutará la urgente, en otro caso se ejecuta la transición que sirve para descargar el lugar en el que se incluyen los tokens correspondientes al dividendo.



Propuesta 3: Modelo para simular sistemas informáticos.

El funcionamiento de sistemas puede verse afectado por una gran cantidad de variables, por ello, para estudiar el rendimiento de los mismos, es conveniente utilizar modelos con los que obtener la configuración más conveniente o los factores que están ralentizando su funcionamiento. En un modelo podemos modificar determinadas condiciones, realizar la simulación y tras obtener resultados sacar conclusiones acerca del diseño que resulta más eficiente.

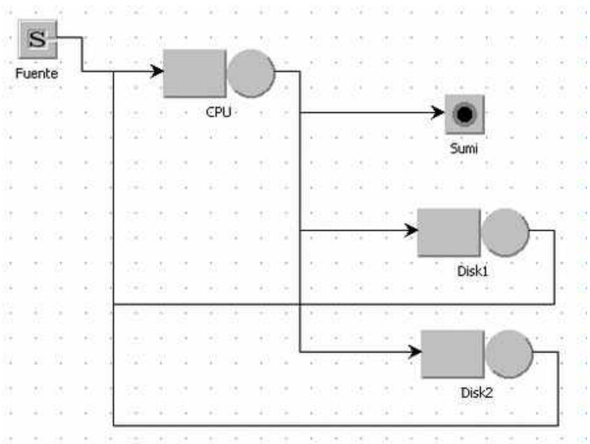
Utilizar modelos en este contexto es muy común, a la vez que rentable, porque los resultados de las simulaciones permiten decidir cuál es el diseño más conveniente para el sistema real, haciendo que la posible inversión en una mejora se haga de forma eficiente. Para que este procedimiento sea efectivo es necesario contar con herramientas que reproduzcan el sistema de manera fiable, cuya base teórica sea consistente y que permita obtener resultados que puedan se utilizados en la construcción o mejora de sistemas reales.

En el desarrollo de esta propuesta utilizaremos la herramienta gráfica JSIMgraph, incluida en la suite JMT (Java Modelling Tools), con ella podemos generar modelos de sistemas informáticos utilizando una interfaz amigable, utilizando elementos de teoría de colas y definiendo la carga del sistema para evaluar su rendimiento. Esta herramienta ha sido desarrollada por el Departamento de Electrónica e Información del Politécnico de Milán.

El uso de modelos, como ya hemos comentado en otros apartados, implica la realización de un estudio previo del sistema que se desea modelar para seleccionar las variables relevantes, es decir, acotar los elementos que influyen en la característica que deseamos estudiar, tomar los datos necesarios y con ellos realizar un modelo que se ajuste a la situación real. En este caso, lo primero que hay que hacer es definir la topología del sistema y las tareas que se incorporarán, de manera que el proceso de simulación con JMT constará de:

1. Definición de las clases, o tareas: son peticiones que se hacen al sistema por parte de otros sistemas, se pueden definir clases abiertas, que entrarán en el sistema desde un objeto denominado fuente, y lo abandonarán después de atravesar varios elementos, al llegar a un objeto de tipo sumidero. También se pueden definir clases cerradas, es decir, tareas que no abandonan el sistema. Estas tareas se definen con una determinada prioridad, para que, en el caso de que se tenga que compartir un determinado recurso, éste sea usado antes por la tarea de la clase que tenga mayor prioridad.
2. Crear objetos y conexiones: son los objetos que componen el sistema y que, unidos con las correspondientes conexiones, dan forma al modelo. Más adelante comentaremos algunos de estos objetos con mayor extensión.
3. Asignación de objetos a clases: cada clase tendrá una estación de referencia, las clases abiertas necesitan una fuente como puerta de entrada al sistema, mientras que las clases cerradas pueden definirse en cualquier objeto, excepto en los sumideros.
4. Configuración de los parámetros de la simulación: en este apartado se define la extensión de la simulación, o bien con un tiempo o con una cantidad de tareas, también se define un valor que se utilizará como semilla para generar valores aleatorios.
5. Definir las propiedades a estudiar: pueden ser tiempo en cola, tiempo de servicio o de respuesta, utilización, productividad, etc.
6. Ejecución de la simulación: mientras que se realiza esta simulación el software va recogiendo datos.
7. Observación de los resultados.

En este trabajo se presenta una actividad para que se diseñe un modelo abierto con dos tareas, su topología será la siguiente:



Los objetos que se incluyen en este modelo son:

- Fuente: simula la llegada de tareas abiertas al modelo. En este lugar se asigna a cada clase una distribución de probabilidad para definir el tiempo medio que transcurrirá entre la llegada de dos tareas consecutivas al sistema.
- Sumidero: simula la salida de tareas del modelo.
- Estación de servicio: es un objeto que se compone de cola de espera y servidor, incluyendo una sección de enrutamiento, de manera que...
    - En la cola de espera se pueden definir la capacidad, y la política de uso para cada

tipo de tarea.

- En el servidor se puede determinar el número de servidores de la estación y la distribución de probabilidad que se asigna al tiempo de servicio para cada tarea.
- En el enrutamiento se define la estrategia de salida para las diferentes clases.

Se incluirán dos clases abiertas de tareas con las características siguientes:

Clase A: tasa de llegada: 0,15 tareas/seg; estación de referencia: Fuente.
Clase B: tasa de llegada: 0,35 tareas/seg; estación de referencia: Fuente.

Tiempos de servicio:

	CPU	Disk1	Disk2
Clase A	0,006	0,038	0,030
Clase B	0,014	0,062	0,080

Razón de visitas, se definirán dos posibles casos, en el primero se pedirá que se estudie un sistema en el que el porcentaje de tareas que sale desde la CPU al sumidero es alta, en el segundo se modifica este porcentaje y se hace que las tareas duren más en el sistema:

	CPU	Disk1	Disk2
Clase A	100	30	20
Clase B	100	16	27

	CPU	Disk1	Disk2
Clase A	100	32	51
Clase B	100	45	37

Parámetros de la simulación: duración máxima 30 seg.

Se pedirá que se usen las simulaciones para completar unas tabla de datos, similar a la siguiente, para cada clase y simulación:

Clase A			
	CPU	Disk1	Disk2
Productividad			
Número medio de tareas en cola			
Tiempo de Respuesta			
Utilización			

Las conclusiones del estudio deben ser presentadas por los alumnos mediante un informe al que pueden incorporar algunos de los datos o gráficas obtenidas, junto con las recomendaciones que se darían al administrador del sistema para mejorar su rendimiento.

CONCLUSIÓN

La pretensión de este trabajo es aportar ideas para el desarrollo de actividades con alumnos basadas en el uso de modelos como herramienta didáctica, herramienta cuyo uso presenta ventajas y desventajas. Por una parte los alumnos parecen mostrar un mayor interés al trabajar en un proyecto en el que encuentran conexiones con el mundo real, los conceptos se trabajan con mayor profundidad y los alumnos encuentran sentido a su trabajo, además la participación suele ser muy amplia, ya que casi todos los alumnos se implican en el proyecto intentando aportar cosas al mismo, dentro de sus capacidades, también podemos añadir que la relación profesor-alumno mejora notablemente durante el trabajo.

Sin embargo, este modo de trabajar también tiene desventajas, por una parte es preciso dedicar un tiempo que, en muchos casos, no se tiene, también es necesario buscar situaciones y problemas adecuados, no siendo en ocasiones fácil encajar un determinado concepto en este esquema da trabajo. También, en ocasiones, es preciso vencer ciertas reticencias que pueden tener algunos alumnos a trabajar con métodos diferentes a los habituales.

Sin embargo, esta forma de trabajar puede ser de gran ayuda para luchar contra ciertos tabús que rodean a las matemáticas, como ser una materia asequible para muy poca gente, o ser una especie de tormento para muchos. Después de realizar un proyecto siguiendo el esquema del trabajo con modelos, podríamos plantear a nuestros alumnos si prefieren una clase de matemáticas trabajando para construir un modelo o una clase de educación física en la que se practique un determinado deporte, seguramente, un alto porcentaje se mostrará a favor de la clase de deporte, pero si les planteamos que elijan entre una clase de modelos matemáticos o una clase de educación física teórica, quizá las preferencias se decanten hacia la clase de matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] G.W. Brams. *“Las Redes de Petri. Teoría y práctica”*. ED. Masson. 1986.

[2] Alan Wigley. *“Models for teaching Mathematics”*. Association of Teachers of Mathematics, MT141. Disponible en http://nrich.maths.org/content/id/7767/Models_for_teaching.pdf. 1992.

[3] Valentín Valero. Antonio Bueno. *“Modelado de Sistemas Concurrentes con Redes de Petri”*. XI Escuela de Verano de Informática (UCLM). Sistemas Distribuidos: Modelos y Aplicaciones, pp 83-98. 2001.

[4] Isidoro Segovia. Luís Rico. *“Unidades didácticas. Organizadores”*. Didáctica de la matemática en la Educación Primaria, pp 83-104. Síntesis Educación. 2001.

[5] Carlos Maza. *“Adición y sustracción”*. Didáctica de la matemática en la Educación Primaria, pp 177-202. Síntesis Educación. 2001.

[6] Enrique Castro. *Multiplicación y división.* Didáctica de la matemática en la Educación Primaria, pp 203-230. Síntesis Educación. 2001.

[7] Ang Keng Cheng. *“Teaching Mathematical Modelling in Singapore Schools”*. The Mathematics Educator, Vol. 6, Nº 1. Disponible en http://math.nie.edu.sg/kcang/TME_paper/teachmod.html. 2001.

[8] Antonio Bueno. Valentín Valero. Fernando Cuartero. *“A translation of TPALp into a class of timed-probabilistic Petri nets”*. Theoretical Computer Science 338, pp 350-392. ELSEVIER. 2005.

[9] Antonio Bueno. *“Elementos matemáticos en máquinas de Leonardo”*. Actas del congreso XIII JAEM, C6-01. 2007.

[10] María José Arnau. *“Modelos en la enseñanza secundaria: EL BARCO SOLAR”*. Modelling in Science Education and Learning Volume 1, No. 6. Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada. 2008.

[11] Jeroen Spandaw. *“Modelling in Mathematics' Teeachers' Professional Development”*. Proceedings of CERME 6, Lyon France. 2009.

[12] MA García-March. JM Isidro. M Zacares. M Arevalillo. González-Santander. Ll Monreal. CI López-Javier. *“Teaching classical mechanics using an applied example: Modelling and Software”*. Modelling in Science Education and Learning Volume 2, No. 4. Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada. 2009.

[13] Antonio Bueno. *“Modelos para aprender jugando”*. Actas del congreso XIV JAEM, C6-01. 2009.

[14] Manel Sol. *“Modelització́n en la ESO”*. Actas de las XIV JAEM. 2009.

[15] Ángel Alsina. *“Primeros pasos en la modelización y representación del conocimiento matemático”*. Actas de las XIV JAEM. 2009.

[16] Joaquina Berrall. Inmaculada Serrano. *“Todos para uno y uno para todos”*. Actas de las XIV JAEM. 2009.

[17] Antonio Bueno. *“La costa de los fractales”*. Actas de las XIV JAEM. 2009.

[18] Asian Doosti. Alireza M Ashtiani. *“Mathematical modelling: a new approach for mathematics teaching in different levels”*. II ENREDE, Universidade Federal de Sao Carlos. Disponible en http://www.enrede.ufscar.br/participantes_arquivos/E4_Ashtiani_TC.pdf. 2010.

[19] Claudi Alsina. *“Modelización para formar ciudadanos”*. Modelling in Science Education and Learning Volume 4, No. 1. Instituto Universitario de Matem´ atica Pura y Aplicada. 2011.

[20] Sixto Romero. *“La resolución de problemas como herramienta para la modelización matemática”*. Modelling in Science Education and Learning Volume 4, No. 4. Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada. 2011.

[21] Manel Sol, Joaquín Giménez, Nuria Rosich. *“Trayectorias modelizadoras en la ESO”*. Modelling in Science Education and Learning Volume 4, No. 27. Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada. 2011.

[22] G.Casale, G.Serazzi. “*Quantitative System Evaluation with Java Modelling Tools”*. 2nd ACM/SPEC International Conference on Performance Engineering (ICPE). 2011.

[23] Javier Falcó. *“Actividades matemáticas que incitan a la modelización”*. Modelling in Science Education and Learning Volume 5, No. 6. Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada. 2012.