Encuentros en la tercera o cuarta fase.
Una ventana a otros mundos

Constantino de la Fuente Martínez
IES Cardenal López de Mendoza. Burgos
consdelafu@gmail.com

Introducción

Gabi Gleichman, en su novela *El elixir de la inmortalidad* cuenta que el segundo rey nazarí de Granada, Muhammad II (1235-1302), pasados cuarenta días después de la muerte de su hijo mayor, Faray, a manos del segundo de sus hijos, Muhammad, mandó llamar a este último y al más pequeño, Naser, y les propuso:

- Tras una época de luto llena de silencio y reflexión pretendo averiguar qué tipo de hombres sois. Quiero que me sirváis dos cenas cada uno. En la primera me serviréis la mejor comida que pueda brindar la tierra. En la segunda me daréis lo peor que se os ocurra.

- Disculpa la pregunta, padre -preguntó Muhammad, que era impaciente y estaba empezando a enfadarse-, pero ¿qué sentido tiene esto? ¿Es una especie de prueba?

- Quiero ver vuestro verdadero rostro –respondió el sultán serenamente, con el elocuente gesto de un hombre consciente de su vasta experiencia- La comida que me sirváis reflejará vuestra alma. En esas cenas se oculta el futuro.[1]

Muhammad, que tenía claro lo que le gustaba y lo que no, y pensaba que emplear el tiempo en algo tan intranscendente como cocinar le parecía tan absurdo como innecesario, presentó la primera noche un exquisito faisán acompañado de deliciosas verduras. A la siguiente noche le ofreció a su padre tocino frito con puré de colinabo.

El hijo menor, no sabía qué ofrecerle ni cómo acometer las tareas… Tras pedir consejo a su madre, que le dijo que *fuera humilde, le diera la espalda a las palabras vacías y así saldría adelante*[2]*,* la primera noche sirvió lengua hervida cortada en finas rodajas, sin nada más en la fuente. El sultán no entendió nada.

- Hazme el honor, Naser, de explicarme lo que es esto –dijo.

- Es una delicada lengua, padre –respondió el hijo menor- Me pediste que te sirviera la mejor comida que puede brindar la tierra. Por eso me he tomado la libertad de servir lengua. Porque, a mi juicio, la lengua es la mejor parte de nuestro cuerpo. La lengua puede articular bellas palabras, presentar verdades y ayudarnos a vivir en armonía con la enseñanza del Corán. Las

[1] Gleichman, G. *El elixir de la inmortalidad,* pág. 120
[2] Ib. Cit. pág. 122

palabras correctas proporcionan fuerza y valor a la persona. La lengua puede extender la armonía , el amor y la justicia, y reforzar la unión de nuestras gentes.[3]

Al día siguiente el sultán se encontró la misma cena que la noche anterior. Se quedó sorprendido y pensó, en un primer momento que era un error de su hijo pequeño. Antes de tocar la comida, le pidió una explicación:

- Padre, nos pediste que te sirviéramos lo peor que se nos ocurriera a mi hermano y a mí. Esta noche me he tomado la libertad de servirte lengua. A mi juicio, la lengua puede ser el peor enemigo del hombre. La lengua puede expresar la furia y el odio, puede hacer llorar y puede aplastar las esperanzas de las personas. La lengua puede extender mentiras y difamaciones. La lengua, sobre todas las cosas, puede sembrar discordia y dañar las relaciones entre nuestras gentes.[4]

1. *La pregunta* como parte de la respuesta

Centrémonos en la conferencia y apliquemos un poco de las enseñanzas contenidas en los párrafos anteriores. Supongamos que nos planteamos una pregunta análoga a la de Muhammad II: en el campo de las matemáticas, en relación con su enseñanza y aprendizaje, ¿qué *plato matemático*, es el que más nos gusta y cuál el que menos? Dar respuestas a esta pregunta y justificarlas va a ser el principal contenido de esta disertación.

Para mí, después de reflexionar sobre mis experiencias en esta profesión, a lo largo de más de 30 años, las respuestas son claras: mi mejor plato matemático es una situación problemática a resolver, un problema desnudo, en su propio contexto, sin condimentos ni aditivos. En general, esto comprende, además de un contexto y unas condiciones o datos, el planteamiento de preguntas: a uno mismo, a los demás, o que los demás nos las plantean a nosotros. De ahí que la/s pregunta/s forme parte de la respuesta a la pregunta inicial.

En cuanto al peor plato matemático, el que menos me gusta también puede ser una situación problemática a resolver, un problema desnudo, en su propio contexto, sin condimentos ni aditivos. Desarrollaremos estas dos ideas a lo largo de la conferencia, aunque nos fijaremos más en la parte positiva de la misma

2. El peor *plato matemático*

Comenzaremos por la parte negativa: una situación matemática a resolver puede ser uno de los peores platos matemáticos que nos pueden servir, o que nos podemos servir a nosotros mismos.

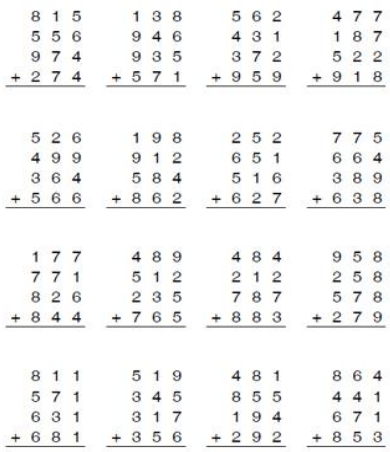
---

[3] Ib. Cit. pág. 123
[4] Ob. Cit. pág. 123-124

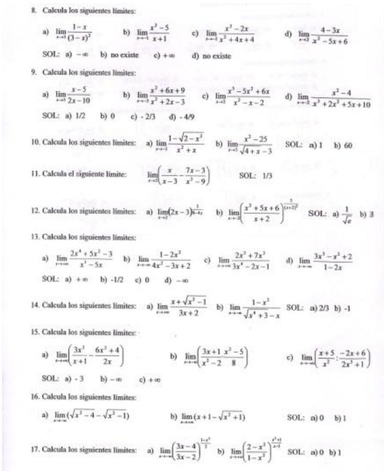
2.1. Fomentar la estupidez y enmascarar la verdad

Hay un tipo de situaciones y preguntas que pueden generar aburrimiento en nosotros y en nuestros alumnos/as, que no tienen interés cuando se repiten y se repiten, convirtiéndose en un puro ejercicio de rutinas y habilidades previamente enseñadas y aprendidas. Unos ejemplos de este tipo de preguntas son las siguientes: sumas, cálculos repetidos, sin otro objetivo que el ejercitar la suma y el cálculo, sin ningún otro tipo de preguntas.

Estas preguntas tienen, a veces, entre sus objetivos, algunos no explícitos que a menudo pertenecen al subconsciente colectivo del profesorado, por ejemplo los de controlar, dirigir y dominar las mentes libres e ingenuas. En definitiva son preguntas que, repetidas hasta la saciedad, socavan lentamente otras facetas de la mente de los alumnos/as, como por ejemplo su creatividad, y sus *gérmenes inventivos*[5].



815	138	562	477
556	946	431	187
974	935	372	522
+ 274	+ 571	+ 959	+ 918
526	198	252	775
499	912	651	664
364	584	516	389
+ 566	+ 862	+ 627	+ 638
177	489	484	958
771	512	212	258
826	235	787	578
+ 844	+ 765	+ 883	+ 279
811	519	481	864
571	345	855	441
631	317	194	671
+ 681	+ 356	+ 292	+ 853



Esta idea queda muy ilustrada en palabras de Lockhart (2008):

…si tuviese que diseñar un mecanismo con el único propósito de destruir la curiosidad natural y el amor a la creación de patrones de un niño, no podría hacer un trabajo mejor que el que se está haciendo actualmente; simplemente no tendría la imaginación necesaria para llegar al tipo de desalmadas e inconscientes ideas que constituyen la enseñanza contemporánea de las matemáticas.[6]

En un contexto de Secundaria, en el trabajo con números, su significado y operaciones, sería mucho más eficaz plantear menos operaciones descontextualizadas (los castillos de fracciones, de raíces, etc.) y más preguntas que ayuden a dar significado a la idea de número, no sólo en cuanto a cantidad, sino también como razón entre magnitudes, como proporción numérica:

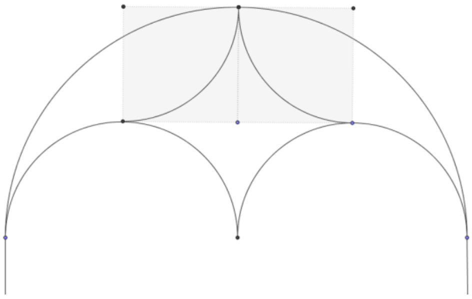
---

[5] Idea de G. Polya cuando plantea que la enseñanza debe preparar para la invención y que no debe suprimir los *gérmenes inventivos de los estudiantes*. Puede consultarse la nota a pie de página nº 24.

[6] Lockhart, P. *Lamento de un matemático*, pág. 741

Si un número acaba en un cero, ¿qué factores primos sabemos que tendrá? ¿y si acaba en dos ceros? … ¿Y si acaba en 8 ceros? ¿En cuántos ceros acaba 100!?

Poner los + y los – entre números consecutivos para obtener como resultado 0 ¿Cuándo se puede obtener y cuándo no? ¿qué resultados podemos obtener?



Estudiar el modelo matemático, simplificado, del arco e identificar patrones numéricos que representen razones y proporciones entre longitudes o distancias y radios.

Otra característica que, a veces, tiene el plato matemático que menos nos gusta es que oculta el verdadero rostro de las matemáticas, sirviendo de vehículo para generar creencias falsas en los estudiantes sobre qué son las matemáticas.

Apostolos Doxiadis, autor de *El tío Petros y la Conjetura de Goldbach,* nos pone en boca del narrador de la obra, el sobrino del *tío Petros,* unas ideas muy apropiadas para este fin:

La conferencia sobre los fundamentos de las teorías matemáticas según la lógica formal obró su poderosa magia sobre mi alma adolescente […] Por fin entendía el cartel situado en la entrada de la Academia de Platón: Oudeis ageometretos eiseto (prohibida la entrada a los ignorantes en geometría). La moraleja de la tarde emergió con claridad cristalina: las matemáticas eran una disciplina infinitamente más interesante que resolver ecuaciones de segundo grado o calcular el volumen de sólidos, las insignificantes tareas que realizábamos en el colegio. Sus practicantes vivían en un auténtico paraíso conceptual, un majestuoso reino poético inaccesible. […] Fue allí y entonces cuando decidí convertirme en matemático.[7]

Pero este descubrimiento no sólo se da cuando alguien interesado en las matemáticas, como el personaje anterior, escucha una conferencia de tan alto nivel como *fundamentos de las teorías matemáticas según la lógica formal*, sino que también se puede llegar a esta conclusión cuando el profesor Barragues (2008) reflexiona sobre la escasez, en la universidad, de estudiantes de matemáticas:

Lo sorprendente sería lo contrario. Tras ocho cursos de matemáticas, los chicos y las chicas adquieren una visión tan penosa de los que las matemáticas significan que sólo

[7] Doxiadis, A. *El Tío Petros y la Conjetura de Goldbach,* pág. 29-30

las vocaciones más irreductibles permanecen a flote. Las demás surgirán tardíamente o no lo harán nunca, enterradas bajo toneladas de algoritmia descontextualizada. La oportunidad para cambiar está en la enseñanza media, pero hay mucho que hacer.[8]

2.2. Aumentar la frustración

Pongamos un ejemplo que ilustre la idea. Supongamos que planteamos en clase la siguiente situación:

Justificar que si $x \in R, x \geq 1$*, entonces* $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Como lo más probable es que no se les ocurra nada, para resolverla, hacemos lo siguiente: *como* $x \geq 1$*, entonces* $x > 0$*. Multiplicando por x en la desigualdad queda* $x^2 + 1 \geq 2x$*, o lo que es lo mismo,* $x^2 - 2x + 1 \geq 0$*. Escribiendo esta expresión como* $(x-1)^2 \geq 0$ *tenemos que esto es siempre verdadero pues* $x \geq 1$ *por hipótesis*.

Para resaltar la sencillez de la cuestión comentamos en clase algo parecido a: *fijaos que la desigualdad inicial es equivalente a una expresión notable, el cuadrado de una diferencia, que sabéis desde hace años. También se puede resolver por otros caminos más largos, pero éste es muy sencillo y corto.*

Si reflexionamos sobre el proceso anterior e intentamos averiguar los pensamientos de aquellos estudiantes que tienen interés en la materia y no tenían ni idea de cómo abordar la cuestión, seguro que la mayoría de ellos habrían pensado: *pero si es muy fácil y muy corto… Y a mí no se me ha ocurrido nada. ¡Qué mal! ¡no tengo ni idea!...*

Desde nuestro punto de vista, la situación planteada es de una alta dificultad y el método empleado para resolverla se basa en una de las tradicionalmente denominadas *idea feliz*, lo que aumenta aún más la dificultad. En cambio los estudiantes no son conscientes de ello y, si nosotros no se lo advertimos, estamos reforzando en su mente ideas nefastas para su autoconfianza y autoestima con respecto a la resolución de determinadas situaciones matemáticas. La moraleja que subyace es que no podemos plantear situaciones *problema* como si fueran *algorítmicas.*

Aprovechando la mención de situaciones algorítmicas, también generan mucha frustración este tipo de situaciones cuando se plantean como meta en sí mismas y tienen una dificultad alta. No vamos a incidir en esta idea, pues pensamos que todos estamos de acuerdo en ello.

Otra idea que queremos presentar de este tipo de situaciones es que, a veces, la cuestión es muy clara para nosotros desde nuestra experiencia, pero no lo es tanto

[8] Barragués, J.I. Sé lo que hicimos el curso pasado. Pág. 60.

para los estudiantes. Por ejemplo, presentamos la situación siguiente en clase o en un examen:

Tenemos la función $y = \frac{1}{a - bsenx}$ con a y b números reales positivos. ¿Qué relación debe existir entre a y b para que la función sea siempre continua?

Como vemos, esta cuestión no tiene clara la meta concreta a la queremos que lleguen nuestros estudiantes. Por esa causa nos podemos encontrar con respuestas bastante diferentes, como por ejemplo:

a) $senx \neq \frac{a}{b}$ b) $\frac{a}{b} > 1$ c) $a > b$

¿Daremos como válidas y correctas las tres? Está claro que la más correcta es la tercera, pero también es verdad que la primera y la segunda son equivalentes a ella. Si no damos como totalmente correctas las dos primeras, siempre nos encontraremos con alumnos/as contrariados con la decisión, que se sentirán mal por no tenerles en cuenta todos los puntos (si es un examen). En estos casos, sería mejor modificar la redacción de la pregunta, adoptando un enunciado similar a: *Demostrar que si a>b, la función es siempre continua.*

Quizás sea este el momento de señalar que todo verdadero problema matemático conlleva, al menos inicialmente una carga de incertidumbre y de frustración, con las que se tiene que acostumbrar a convivir el resolutor, ya sea profesor o estudiante. Está en nuestras manos el enseñar a controlar y canalizar esos episodios que, como hemos señalado más arriba, son naturales en una primera aproximación a un problema.

3. El mejor plato matemático

Dejemos a un lado lo negativo del plato matemático y centrémonos ya en los aspectos positivos, téngase en cuenta que la ausencia de lo positivo también nos ilustra lo negativo. ¿Por qué para nosotros las situaciones a resolver pueden ser el mejor plato matemático que podemos servir? Veamos algunas razones de ellos

3.1. Entender el laberinto

Hay una célebre frase del célebre escritor y ensayista José Bergamin (1895-1983) en la que nos hemos basado para reflexionar sobre un aspecto positivo del mejor plato matemático: *El que sólo busca la salida no entiende el laberinto, y, aunque la encuentre, saldrá sin haberlo entendido*.

Las situaciones problemáticas en matemáticas las podemos equiparar a un laberinto, que recorremos durante el proceso de resolución. ¿Qué puede significar *entender el laberinto?* Veamos algunas ideas, referidas a los problemas, contenidas en el mismo.

3.1.1. El ritmo y la música escondidos

Aunque las preguntas de los problemas nos parezcan aburridas, repetidas, etc., no por ello, en la mayoría de los casos, la situación suele tener un ritmo y una música escondida. Veamos un ejemplo tomado de Ogawa (2008):

Todos los problemas tienen un ritmo, ves. Es igual que la música. Si consigues encontrar el ritmo al enunciarlo, leyendo en voz alta, descubres la totalidad del problema e incluso puedes adivinar las partes sospechosas en las que puede haber una trampa escondida.

Root se ponía entonces a leer en voz alta con una voz clara, que resonaba en las cuatro esquinas del estudio:

- "He comprado dos pañuelos y dos pares de calcetines con trescientos ochenta yenes. El otro día compré dos pañuelos y cinco pares de calcetines con setecientos diez yenes. ¿Cuánto vale un pañuelo y un par de calcetines?"

- Bueno, primero hay que saber por dónde se empieza.

- Ejem… es un poco difícil

- Efectivamente, es probablemente el más complicado de todos los deberes. Pero acabas de leerlo estupendamente en voz alta. El problema está constituido por tres frases. Los pañuelos y los calcetines salen tres veces. Has dado perfectamente con el ritmo de x pañuelos, x pares de calcetines y x yenes que se repite. Esta pregunta sosa y aburrida me ha sonado como un poema.

[…]

- Veamos, ¿por qué no dibujamos las compras de esta persona? Primero dos pañuelos. Luego dos pares de calcetines y ….[9]

Con el ritmo y la música nos estamos refiriendo a las relaciones entre los datos: en este ejercicio, como el número de pañuelos no varía, la segunda frase nos da la clave para calcular el valor de un par de calcetines. Esto forma parte del acercamiento a la primera fase de cualquier modelo de resolución de problemas. Otro ejemplo muy interesante puede ser el siguiente:

Una tienda vende bicicletas y coches para niños. Si tiene en existencias 25 vehículos y, en total, suman 84 ruedas, ¿cuántos hay de cada clase?

En este caso el ritmo también comprenderá la idea de que si fijamos el número de vehículos, el número de ruedas debe ser un número par, comprendido entre el doble del número de vehículos (cuando todos sean bicicletas) y el cuádruple (cuando todos sean coches). O recíprocamente, fijado el número de ruedas, el número de vehículos será un número entre la mitad del de ruedas (si todos son bicicletas) y la cuarta parte (si todos son coches).

[9] Ogawa, Y. *La fórmula preferida del profesor*. Pág. 62-63

La búsqueda del ritmo y la música escondida es una tarea que se puede realizar antes de resolver las preguntas o después, pero, al menos en algunos problemas, debemos iniciar a nuestros estudiantes en ello.

3.1.2. La tensión entre datos y soluciones

Por último, con el laberinto también nos estamos refiriendo a las relaciones de tensión entre el carácter y número de los datos o condiciones y el número de soluciones del problema. Esta tensión está condicionada por el carácter de la información que nos proporciona el enunciado: redundante, incompatible o incoherente, etc. En el laberinto, la tensión se traduce en posibles caminos que nos llevan a callejones sin salida o a plazas amplias, con multitud de calles que desembocan en ella, etc. Por ejemplo:

En una reunión hay chicos y chicas. En total hay 100 cabezas y 200 manos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay?

Como la información es redundante, ya que el dato del número de manos no aporta nada al dato del número de cabezas, el número de soluciones es grande, formalmente 101 soluciones. Ocurriría algo análogo si el segundo dato no aporta información cuantificable, por ejemplo: *a todas las chicas les gustan las matemáticas*; o el dato *hay más chicos que chicas.*

Si modificamos las condiciones, por ejemplo: *hay 100 personas y 3 chicas más que chicos*, vemos que la segunda condición es incompatible con la primera, por lo que el problema no tiene ninguna solución. En este contexto, si hay distinto nº de personas de cada sexo, la diferencia entre esos dos números siempre es un número par.

Si modificamos de nuevo las condiciones, por ejemplo: *hay 100 personas y cada chica ha ido a la reunión acompañada de tres chicos*, entonces el problema tiene solución única. También ocurriría lo mismo si, como hemos dicho en el párrafo anterior, la diferencia entre el nº de chicos y el de chicas es par; por ejemplo: hay 8 chicos más que chicas.

Por tanto, en un problema el número de soluciones está condicionado por el carácter y el número de condiciones o datos. Esta tensión entre datos y soluciones se construye para cada enunciado.

3.2. Sembrar y cazar

Las situaciones problemáticas nos permiten llevar a cabo dos tareas que han sido fundamentales en la prehistoria y en la historia de la humanidad: sembrar y cazar. Pero, ¿qué se siembra y qué se caza? Dos ejemplos sacados de Davis y Hersh (1988) nos ilustrarán las dos ideas:

Comienzo con un enunciado inicial, al que llamaré "semilla". Este enunciado ha de ser interesante y muy sencillo. El ejercicio tiene por propósito regar la semilla y hacerla crecer y *convertirse en una planta recia. De ordinario ofrezco a mi clase una variedad de "simientes", y ellos eligen la que quieren regar, en función de su experiencia.*[10]

Esta forma de situarse y plantear situaciones problemáticas, que podríamos denominar *problemas semilla,* nos puede resultar muy eficaz para que nuestros alumnos/as puedan descubrir ideas matemáticas desconocidas para ellos. Pongamos dos ejemplos:

Un número que acaba en 4, ¿puede ser un cuadrado perfecto? ¿Y uno que acaba en 3? ¿En qué cifras puede acabar el cuadrado de un número? ¿En qué cifras puede acabar el cubo de un número? Una potencia cualquiera (de exponente natural) de un número, ¿en qué cifra puede acabar?

Los problemas semilla son la simiente para el autoplanteamiento de nuevos retos y la consiguiente resolución. De ahí que la simiente puede dar lugar a una planta recia y, a veces, a un bosque frondoso.

En cuanto a la *caza,* hemos podido observar que las semillas germinan y crecen por medio de la generación de conjeturas. A propósito de ellas, Mason, Burton y Stacey (1988) nos dicen:

Las conjeturas se producen como resultado de dos actividades fundamentales. Particularizar, probablemente la más usual, y el uso de la analogía, que es en realidad una forma de generalización.[11]

Las conjeturas son como mariposas. Cuando una revolotea, suele haber muchas más alrededor. Según van apareciendo, cada una distrae la atención de la anterior, y esto hace que sea más fácil perder el hilo. (...) Descubrirás que, como las mariposas, no son fáciles de capturar. Puedes requerir varios intentos, y en esos intentos tu mente se concentra y la conjetura va adquiriendo forma y perdiendo imprecisión.[12]

La caza de las *mariposas-conjeturas* nos permite plantearnos la verificación o refutación de nuevas ideas, el descubrimiento de regularidades, propiedades y leyes desconocidas para nosotros y el acercamiento al proceso de descubrimiento y creación. Por ejemplo:

La suma de dos números naturales consecutivos no es múltiplo de 2. La suma de tres números naturales es múltiplo de 3. La suma de cuatro consecutivos no es múltiplo de 4…. La suma de n naturales consecutivos, con n impar, es un múltiplo de n.

---

[10] Davis, P. y Hersh, R. *Experiencia Matemática, p. 216*.

[11] Mason, J; Burton, L; Stacey, K. *Pensar matemáticamente,* pág. 87

[12] Ib. Cit. pág. 85

3.3. Encuentros en la tercera o cuarta fase

Todos los modelos teóricos de resolución de problemas (p.e. Polya, 1945; Mason, Burton y Stacey; 1982 (edic. española 1988); Schoenfeld, 1985; Guzmán, 1987) mencionan, entre los aspectos heurísticos de cada modelo, que existe una última fase del proceso de resolución de problemas, (para unos la tercera fase y para otros la cuarta) denominado de diferentes maneras: visión retrospectiva, revisión-extensión, reflexión sobre el proceso, etc. En esta fase se analiza y se reflexiona sobre el proceso llevado a cabo. ¿Qué tiene que ver esta tercera o cuarta fase con nuestro plato matemático? Veamos algunas explicaciones.

3.3.1. La disección y la deconstrucción del *plato*

En la impresionante biografía de Miguel Ángel Buonarroti, de Martín Gayford (2014), podemos leer que, Miguel Ángel, durante las interrupciones del trabajo sobre el techo de la Capilla Sixtina, seguramente que se entretuvo en la disección de cadáveres:

El estudioso James Elkins ha demostrado que prácticamente no hay rasgo anatómico representado en ninguna de las obras de Miguel Ángel que no pudiera descubrirse observando a un modelo desnudo. Esto indica su motivación para diseccionar cadáveres: quería comprender mejor lo que podía ver. Los músculos y los huesos del cuerpo eran el vocabulario fundamental de su arte: todo lo que hizo se basaba en eso. Al ir más allá de la piel, fue capaz de comprender e interiorizar estos complejos rasgos biológicos, para luego poder analizarlos, simplificarlos, subrayarlos y memorizarlos, y después inventar cuerpos nuevos y bellos a voluntad.[13]

De manera análoga, nuestro plato matemático, que era de nuestro gusto tal como estaba, puede ser diseccionado y deconstruido. El enunciado es la piel que oculta la verdadera estructura contenida en el interior. Veamos un ejemplo:

Comencemos con una situación sin interés aparente:

Calcular el siguiente límite: $lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-3x+5}\right)$

Si $lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+k.x+1}-\sqrt{x^2-3x+5}\right)=1$, *¿cuánto vale k?*

Calcular algunos valores de p y q si $lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+p.x+1}-\sqrt{x^2+q.x+5}\right)=1$. *¿Qué relación deben cumplir p y q para que se cumpla la igualdad anterior? ¿Y para que ocurra que* $lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+p.x+1}-\sqrt{x^2+q.x+5}\right)=k$

Si cambiamos los términos independientes de esas expresiones, ¿varía el resultado del límite? Si modificamos los valores de los coeficientes de los términos de segundo grado, ¿Qué posibles valores tiene el límite?

[13] Gayford, M. *Miguel Ángel: Una vida épica,* pag. 299

Calcular el valor de $lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{a.x^2+b.x+c}-\sqrt{p.x^2+q.x+r}\right)$ *en función de los valores de los coeficientes.*

Después de resolver el *ejercicio* inicial, mediante nuevas preguntas, se puede propiciar el acercamiento de nuestros estudiantes al esqueleto del problema, a su estructura interna (sus músculos, huesos, tendones, etc.). Este proceso nos permite descubrir nuevos contextos relacionados con la pregunta inicial, generar nuevos problemas, descubrir verdaderas familias de problemas y obtener las leyes y patrones que rigen las soluciones. Al final tenemos una *escultura* con un esqueleto, unos músculos, etc. nuevos creados por nosotros.

Pero las ideas de Miguel Ángel para la escultura, también eran los fundamentos de sus ideas para la arquitectura:

Era indiscutible, escribió Miguel Ángel, "que los miembros de la arquitectura dependen de los miembros del hombre y quien no ha sido o no es un buen maestro de la figura y de la anatomía nada puede entender sobre el particular".[…] sólo si se habían estudiado e interiorizado a fondo las interrelaciones de los músculos, los huesos, los tendones, como había hecho Miguel Ángel, podía concebirse un diseño arquitectónico dotado de auténtica vida y energía. Este era su credo como arquitecto…[14]

La idea que subyace en el párrafo anterior es que Miguel Ángel ya concebía la arquitectura orgánica; es decir, las obras arquitectónicas que, a semejanza de los seres vivos, poseían unas relaciones inevitables, fuertes y convincentes entre sus partes y el todo (simetría, proporciones, dimensiones, etc.) como en los seres vivos o en un cuerpo humano.

Ilustremos estas ideas para el caso de nuestro plato matemático. Supongamos que planteamos la siguiente situación:

2						
3	5					
6	8	10				
11	13	15	17			
18	20	22	24	26		
…	…	…	…	…	….	

La tabla lateral se puede continuar indefinidamente si seguimos añadiendo números en ella. Averigua el primer número y el último situados en la fila 20ª, así como la suma de todos los que componen esa fila.

A partir del enunciado inicial, podemos resolver las cuestiones planteadas y pasar a otro problema. En este caso la tarea no deja de ser una actividad de resolución de problemas con una meta clara y cerrada. También podemos plantearnos más preguntas; para ello deberíamos hacer una lista de cualidades, cada una con sus alternativas, para obtener

[14] Ib. Cit. pág. 560

nuevos problemas. Este proceso, que requiere un análisis pormenorizado del enunciado inicial, lo podemos resumir en la tabla 1 siguiente:

CUALIDADES	ALTERNATIVAS
Primer y último número de la fila 20ª	Primer y último número una fila cualquiera (n-ésima)
La suma de los números de la fila 20ª	La suma de los números de una fila cualquiera (n-ésima)
El primer número de la tabla es el 2	El primer número de la tabla es uno cualquiera: m
La diferencia entre el último número de una fila y el primero de la siguiente es 1	La diferencia entre el último número de una fila y el primero de la siguiente es p
La diferencia de los elementos de cada fila es 2	La diferencia entre los elementos de cada fila es d
En la 1ª fila hay un nº y en cada una de las siguientes hay un número más que en la anterior	En la 1ª fila hay q números y en cada una de las siguientes hay r números más que en la anterior

Tabla 1 Listado de cualidades y alternativas

También pueden identificarse otras cualidades que no figuran en el enunciado inicial, por ejemplo: a) estudiar si el número 2014 está en la tabla, y si es así averiguar la fila y la columna en la que está situado: b) las columnas forman sucesiones de las que puede ser interesante calcular el término general: c) calcular la suma de todos los números de la tabla que son menores que uno dado y conocido de ella.

Estas cualidades, si se incluyen en la búsqueda de alternativas, pueden generar también nuevos problemas.

Una vez identificados valores alternativos para las cualidades del problema, combinando algunas de las posibles variantes, podemos plantearnos nuevos problemas. Por ejemplo:

- Averiguar el primer y último número de la fila n-ésima.

- Calcular la suma de los números que componen una fila cualquiera (n-ésima).

- Para un número cualquiera, averiguar si está en la tabla y, si está, dar sus coordenadas (fila, columna) (x, y) en las que se encuentra.

- Calcular la suma de todos los números de la tabla, que sean anteriores a uno conocido A.

- Calcular los términos generales de las sucesiones que forman las columnas.

*- Resolver las preguntas anteriores si la diferencia entre los elementos de cualquier fila es **d**, en vez de 2.*

*- Resolver las preguntas anteriores si el primer número de la tabla es **m**, en vez de 2.*

*- Lo mismo cuando el primer número de la tabla es **m** y la diferencia entre los elementos de una fila cualquiera es **d**.*

*- Analizar lo que ocurre cuando la diferencia entre el último número de cada fila y el primero de la siguiente es **p,** en vez de 1 como en el problema inicial.*

- Colocar, con otro criterio, los números en la tabla. Estudiar su estructura con preguntas similares a las anteriores.

Como podemos observar, y sin ánimo de ser exhaustivos, aparecen muchas cuestiones complejas, pequeños problemas de investigación, que pueden ser muy atractivos para los niveles de ESO o Bach. Hemos construido varios edificios, cada uno con una puerta de entrada, cada uno formando parte de una estructura superior, de un todo global, cada uno íntimamente relacionado y tensionado con ese todo general del que forman parte.

3.3.2. Las conexiones con otros contextos. Ventanas a otros mundos

Para adentrarnos en la búsqueda de conexiones entre contextos, primero situaremos los procesos de matematización y contextualización en el quehacer del aula. Ilustraremos estas dos ideas a partir de la comparación que hace de ellas Arcavi (2002):

Es notablemente evidente el éxito de este enfoque [proceso de matematización]. No obstante, la matematización aparece como una vía de sentido único: desde lo cotidiano a lo académico. Propongo considerar otra idea que podría resultar importante cuando se trate de conectar significativamente lo académico con lo cotidiano: la noción de contextualización. La contextualización va en sentido opuesto de la matematización, pero la complementa. Así, para dar significado a un problema presentado con vestido académico, se puede recordar, imaginar o, incluso, construir un contexto, de manera tal que las particulares características contextuales sirvan de andamio y ampliación de las matemáticas relativas a dicho problema.[15]

En conversaciones con el profesor Arcavi, para aclarar si la contextualización siempre se da entre el mundo matemático y el mundo real, él mismo nos ha aclarado la idea:

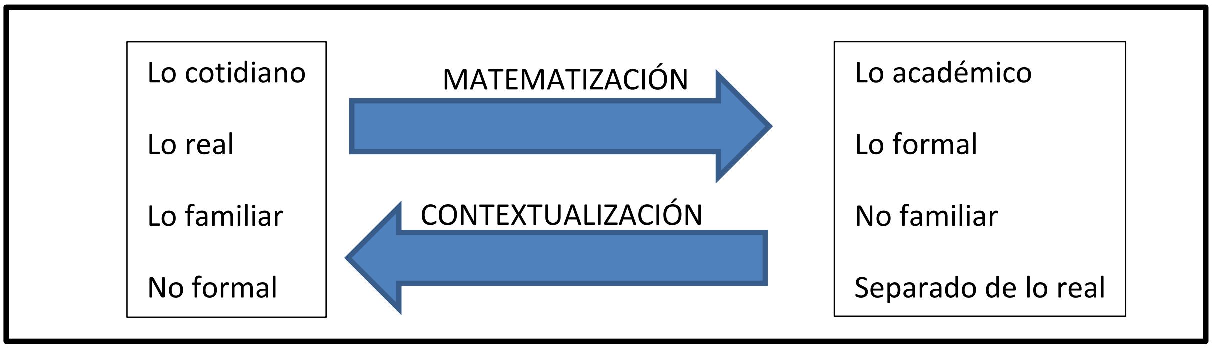
Concuerdo con que la contextualización puede ser un nexo entre dos situaciones o temas cualesquiera y no necesariamente cuando uno de ellos es de la "vida real", sino cuando una sirve de contexto (o de modelo) para la otra.[16]

Las ideas anteriores las podemos resumir en el cuadro siguiente:

---

[15] Arcavi, A., (2002). Everyday and Academic Mathematics in the Classroom, p. 13

[16] Tomado de un mensaje, por correo electrónico, del profesor Arcavi.



Por tanto, al contextualizar imaginamos o construimos un contexto que sirve de modelo o andamio a la situación de partida; esta última se situaba en un contexto diferente, alejado de lo cotidiano y la contextualización nos conecta los dos contextos: el inicial (académico) y el construido (cotidiano o familiar). Esta conexión entre ellos nos puede ayudar a resolver el problema o a descubrir, por analogía o por generalización, nuevos resultados matemáticos que conectan los dos contextos. Sobre esto último, Cañon (1993) nos dice:

Los nuevos objetos sólo llegan a serlo si el mundo de los objetos y relaciones anteriormente existentes encaja dentro de lo nuevo. En la actividad del matemático, ***su alumbramiento*** *requiere una familiaridad previa con el universo de relaciones con el que trabaja, y su aportación consiste precisamente en ofrecer la explicitación de nuevas conexiones, nuevos niveles de abstracción desde los que resituar lo ya conocido.*[17]

Terminaremos este análisis con las palabras de Taton (1973) sobre la idea de las conexiones:

… los hechos matemáticos dignos de estudiarse son los que ponen de manifiesto "parentescos insospechados entre otros hechos matemáticos" ya conocidos. [18]

Después de adentrarnos en el problema, para conocer su estructura y asomarnos al mundillo que componen sus órganos, también vemos que podemos conectar ese mundillo con otros mundos y contextos, para obtener verdaderas constelaciones. Pongamos un ejemplo motivador en el campo de la arquitectura, usando para ello un motivo del patrimonio:

- Sea esta imagen el problema inicial. Supongamos que ya lo tenemos resuelto.

- Una pregunta que podríamos plantearnos es la siguiente: si lo resolvemos de otra manera; es decir, si lo miramos desde otro punto de vista, desde otro lado, ¿la comprenderemos mejor? ¿la conoceremos aún más? ¿enriquecerá esta nueva visión nuestro conocimiento? ¿qué vemos?

---

[17] Cañón, C. *La matemática: creación y descubrimiento*, p. 356.
[18] Taton, R. *Causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos,* p. 15.

- La respuesta es la imagen del margen. Como vemos al lado hay otro problema en forma de caballo; vemos nuestro problema de perfil, lo que cambia totalmente el enfoque; nos da otros datos del problema, otra imagen del mismo, y nos permite conocer cómo se sitúa en los contextos y problemas cercanos.

- Pero si hemos mirado hacia un lado, intentaremos mirar ahora hacia el otro, a ver qué otras vistas y otros problemas nos proporciona. A su vez podemos ir estableciendo conexiones entre los contextos que vamos obteniendo. De esta manera podemos visualizar una imagen como la del margen izquierdo.

- A la vez que otros contextos, también podemos apreciar detalles y patrones cercanos a nuestro problema.

- Esto nos permite estudiar casos particulares de interés, como el de la figura del margen, singularidades que nos ayudan a situar nuestro problema inicial en un contexto más amplio y más general, identificar invariantes de este nuevo contexto, etc.

- La profundización y contextualización del problema inicial, nos permite llevar a cabo generalizaciones para la obtención de un problema más general, que constituye el mundo que estaba oculto en el del inicio.

- En ese problema más general se encuentra difuminado el problema inicial; este último pasa a ser un caso particular muy secundario, aunque con interés (como ocurre en la figura del margen).

- Este problema más general lo podemos conectar con otros contextos cercanos y relacionados con él, lo que nos permite indagar en otros mundos, con sus propios patrones, singularidades, invariantes, etc. Con ello habremos visitado un *universo local*, que era desconocido en un primer momento.

Pasemos ahora a ver un ejemplo sacado de la historia de las matemáticas, que ilustra la importancia de la misma y sus aplicaciones didácticas, a la vez que nos permite establecer conexiones entre contextos elementales de nuestro currículo. Para ello partiremos del texto histórico conocido como una de las Reglas de Hudde (1628-1704):

Si una ecuación tiene dos raíces iguales y multiplicamos la ecuación por una progresión aritmética arbitraria de manera que el primer término de la ecuación queda multiplicado por el primer término de la progresión y así sucesivamente, entonces digo que el producto obtenido será una ecuación que tiene de nuevo la raíz dada.[19]

Como se puede observar, tenemos dos contextos claros: ecuaciones con una raíz doble y progresiones aritméticas (en adelante p.a.) Como queremos trabajar esta idea en 4º ESO, concretamos los contextos en: ecuaciones polinómicas de segundo grado con una raíz doble, progresiones aritméticas y funciones polinómicas de segundo grado (las parábolas del currículo de ESO). Todos los contenidos son concreciones de los contenidos del currículo de la enseñanza obligatoria.

Sean:

E1 la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con una solución doble;

p, p+d, p+2d los tres primeros términos de una p.a. de primer término p y diferencia d;

E2 la ecuación transformada: $apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d) = 0$;

F1 la función $y = ax^2 + bx + c$ una parábola cuyo vértice está en el eje OX;

F2 la función transformada $y = apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d)$ de F1 por la progresión aritmética anterior.

Con estas condiciones, partiendo del hecho de que los estudiantes saben resolver ecuaciones de segundo grado, conocen las p.a. y han estudiado los principales conceptos de las parábolas (vértice, puntos de corte con los ejes, etc.), podemos plantearles tratar diversos *problemas de investigación*, con el objetivo de acercar a los estudiantes al proceso de descubrimiento mediante el establecimiento de conexiones entre los tres conceptos que intervienen. A modo de resumen, presentamos una tabla con algunas de las ideas trabajadas:

[19] Hudde, J. Johannis Huddenii epistola secunda de maximis et minimis, pág. 507

<table>
<tr><th>CONTEXTOS</th><th>ALGUNAS LÍNEAS DE TRABAJO</th></tr>
<tr><td>Historia
de las
matemáticas</td><td rowspan="4">-Momento de la historia de las matemáticas: búsqueda de soluciones dobles de ecuaciones, método del círculo de Descartes,…
- Expresión de las ecuaciones que tienen una solución doble y de las funciones cuadráticas que tienen el vértice en el eje OX.
- Condiciones equivalentes a “solución doble” en el contexto de las ecuaciones de segundo grado y en el de las parábolas.
- Comprobación y demostración de la Regla de Hudde para ecuaciones de segundo grado.
- Relación entre los discriminantes y las soluciones de una ecuación E1 y su transformada E2. Casos particulares (p=0, d=0).
- Buscar una p. a. adecuada para que las ecuaciones tengan las raíces que deseemos.
- Relación entre los vértices de una parábola y su transformada.
- Posiciones de una parábola F1 y su transformada F2, en función de p (primer término) y d (diferencia)
- ¿Con progresiones geométricas?
- ¿Con funciones cúbicas?</td></tr>
<tr><td>Ecuaciones
polinómicas</td></tr>
<tr><td>Progresiones
aritméticas</td></tr>
<tr><td>Funciones
polinómicas</td></tr>
</table>

Aunque las propuestas anteriores no se presentan desarrolladas, sí dan una idea de la riqueza didáctica que contienen y de su gran aprovechamiento para la clase. En función del contexto escolar (nivel educativo, nº de alumnos/as participantes, etc.), podemos ampliar o reducir la profundidad, la complejidad y las variantes de los problemas, para obtener diferentes *mundos* a estudiar..

3.4. Motivarme en mi profesión

Las preguntas de las situaciones problemáticas nos permiten progresar en el conocimiento de nuestra profesión y en el modelo de profesor al que aspiramos, lo que puede constituir una alta motivación para su práctica habitual. También nos permiten hacer accesibles los conocimientos de nuestra ciencia a nuestro alumnado, a la vez que les permiten a ellos resolver los problemas que les hayamos planteado o que ellos mismos se puedan plantear.

La resolución de un problema, que está siempre ligada una puesta en práctica de conocimientos de método, es lo que genera el conocimiento matemático, por tanto el conocimiento matemático también está íntimamente ligado a unos conocimientos específicos de método. Guzmán (1985) nos lo recuerda:

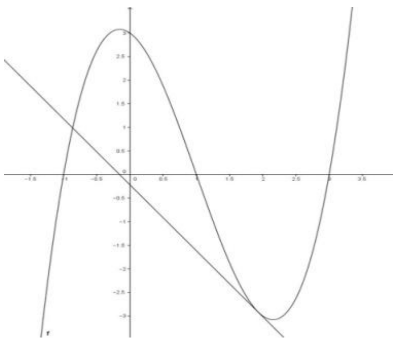
El saber matemático resulta ser esencialmente saber de método mucho más que saber de contenido. En matemáticas es mucho más importante familiarizarse con modos de trabajo, con *métodos de abordar diferentes problemas, que conocer muchos resultados dispersos. […] No en vano método, meta odon, significó para los griegos "según el camino".*[20]

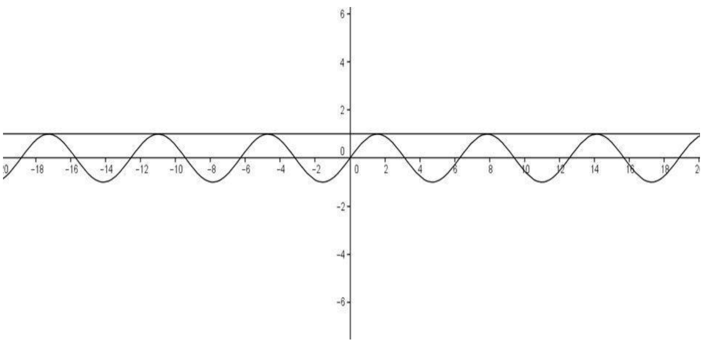
Un ejemplo nos ayudará a comprender esta idea: supongamos que queremos motivar a nuestros estudiantes sobre la necesidad de profundizar en el problema del cálculo de la recta tangente a una función en un punto y su conexión con la idea de derivada. Para ello les planteamos la siguiente pregunta-problema:

- *¿Qué es la recta tangente a una función en un punto?*

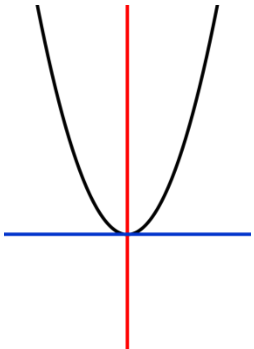
La respuesta primera es: *la que la toca en un solo punto*. La pregunta inmediata es: *¿Sólo puede tocarla en un punto?* La respuesta es: *sí.*

- *Entonces la rectas de las figuras, ¿no pueden ser tangentes a estas funciones?*





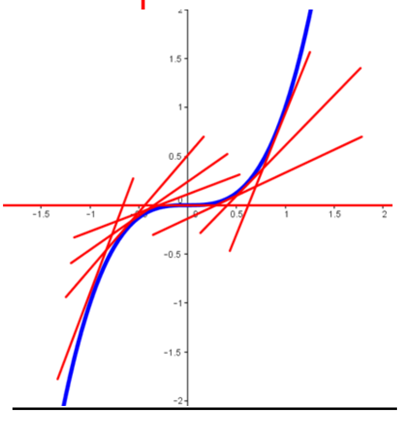
- *Sí que lo son, pero…*



- *¿Por qué la recta (de color rojo) de la figura no es tangente a la parábola si la toca en un solo punto, mientras que la recta de color azul sí lo es?*

- *Porque la recta de color rojo atraviesa a la función.*

- *¿Entonces las rectas tangentes no pueden atravesar a la función en el punto de tangencia?*



- *No*

- *¿Y qué me decís de este caso, para la función* $y = x^3$ *en x=0? La tangente atraviesa a la función en el punto de tangencia. Pensemos un momento, ¿realmente sabemos lo que es la recta tangente a una curva en un punto?*

[20] Guzmán, M de. Enfoque heurístico de la enseñanza matemática, pág. 32

- Volvamos a la parábola. Las dos rectas sólo la tocan en un punto. ¿Por qué una es la recta tangente y la otra no?

- Estamos viendo que no tenemos clara la idea de recta tangente. Yo os voy a dar una pista: la recta tangente es la recta que más se parece a la función en el punto de tangencia; es decir, si aplicásemos un zoom en los alrededores del punto de tangencia, la recta tangente y la función se parecen cada vez más, según nos acerquemos. Dicho de otra manera, si en los alrededores del punto de tangencia, tuviéramos que substituir la curva por la recta que más se le pareciera, deberíamos substituirla por la recta tangente. Para el caso de la parábola, ¿cuál de las dos rectas se parece más a ella? Apliquemos un zoom progresivo a la figura… ¿Qué recta, en las distancias cortas, es más parecida a la parábola?

- Es la recta horizontal, porque la otra mantiene sus diferencias con la función, aunque apliquemos un zoom, por muy grande que sea.

- Ya sabéis algo más de la recta tangente. Además hay otra diferencia más; os lo planteo para el caso de la parábola: el contacto entre la recta tangente y la función; es decir, el punto de tangencia, es un contacto mucho más íntimo en el caso de la recta tangente que en el caso de la recta vertical. ¿Qué diferencia hay? Resolver el sistema y lo veréis.

Como esta cuestión hay bastantes estudiantes que no la ven, normalmente hay que hacer una puesta en común y explicarles:

- El punto de tangencia es solución doble entre la tangente y la curva. Y esto ocurre siempre y sólo con la recta tangente.

- Fijaros que para ver si una recta es tangente a una curva en un punto, podríamos resolver el sistema y ver si el punto en común es solución doble del sistema. ¿Y esto por qué será así? Esta y otras cuestiones son las que vamos a tratar en el tema de las derivadas... Veamos…

Cuando nosotros nos planteamos estas preguntas y llegamos a conocer sus respuestas, estamos avanzando en los conocimientos didácticos de los contenidos, que forman parte de los conocimientos del profesor.

Esto que hemos presentado para el caso de la recta tangente, se puede plantear para muchos otros contenidos de nuestros currículos. El conocimiento matemático se hace significativo para el profesor cuando se plantea, él mismo, problemas sobre él. Este es el verdadero planteamiento de *las matemáticas elementales desde un punto de vista superior*[21]

---

[21] En referencia al libro de Felix Klein.

3.5. Conocer a los *otros matemáticos*

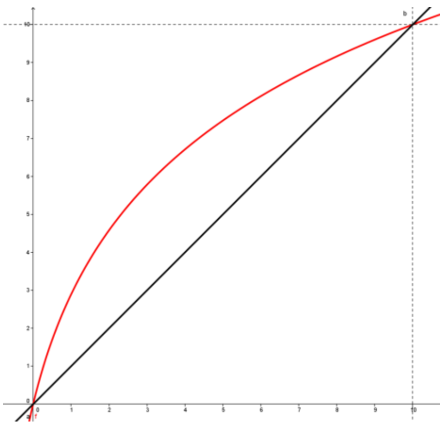
Uno de los motivos por los que las preguntas en matemáticas nos facilitan el disfrute de nuestra profesión es que nos permiten conocer a los *otros matemáticos*. Cuando uno varios estudiantes llevan a cabo un proyecto de investigación, pueden mostrarnos el matemático que llevan dentro. Varios ejemplos para ilustrarlo:

Fórmula de Álvaro: *La suma de los n primeros términos de una p.a. (n>1) de primer término a_1 y diferencia p viene dada por* $S_n = \frac{n}{n-1}\int_0^{n-1}(a_1 + px)dx$

Fórmula de Alejandra: *La suma de los n primeros términos de una p.a. de primer término a_1 y diferencia p viene dada por* $S_n = \int_0^n \left(a_1 + px - \frac{p}{2}\right) dx$

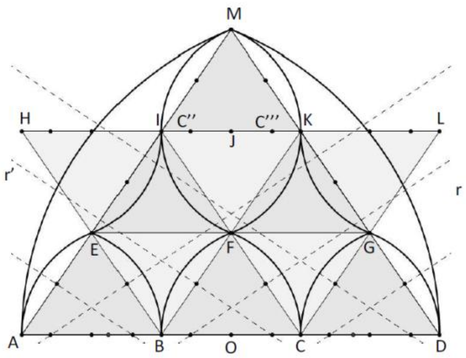
52	82	112	142	172
39	**74**	109	144	179
26	66	106	146	**186**
13	58	**103**	148	193
0	50	100	150	200

Diferencia de Priscila: *En una red aritmética bidimensional, como la del lateral, (tabla cuyas líneas forman p.a.) la sucesión de las diferencias de las p.a. filas (o columnas) también es una p.a. Estas dos p.a. tienen la misma diferencia, que se denomina Diferencia de Priscila*



Modelos funcionales de Luís para la corrección de notas. La gráfica de más abajo es la representación gráfica de la función $y = \frac{10}{ln11}.ln(x+1)$, que puede servir para modificar las notas de un examen (aumentándolas). En un trabajo de investigación sobre este tema, este estudiante propone modelos funcionales como $y = \sqrt{10x}$, o generalizando $y = \sqrt[n]{10^i.x^{n-i}}$, con n un número natural mayor que 2, $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ y otros modelos de tipo trigonométrico, como $y = x + 1 - cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)$ y otros, muy singulares todos ellos.

Modelos matemáticos de Andrés para el estudio de arcos de la Catedral de Burgos. Este proyecto de investigación se desarrolla mediante un proceso de matematización de los elementos del arco a partir de la construcción de modelos matemáticos utilizando Geogebra. Posteriormente, se hace un estudio geométrico con ecuaciones y coordenadas (numéricas y genéricas), con el objeto de identificar los patrones numéricos que aparecen en las



proporciones y dimensiones de los unos elementos con otros, compararlos con los patrones y proporciones clásicas, etc., para concluir reflexionando sobre el papel de las matemáticas en la *estética de las proporciones en el arte.*

Ante estos ejemplos, uno puede preguntarse, ¿es posible que estudiantes preuniversitarios descubran y creen ideas matemáticas? Los ejemplos lo prueban, pero también lo afirman algunas personas que han reflexionado mucho sobre ello:

Una de las características de las matemáticas es que la invención empieza muy pronto, desde que un alumno se sitúa ante un problema que debe resolver (...). Si el alumno no se limita a contestar a las preguntas que se le formulan, sino que se esfuerza en hacer observaciones originales relativas al problema, o mejor aún, si él mismo se plantea problemas, en estos casos su trabajo se distingue del del matemático creador sólo en una diferencia de nivel.[22]

O como lo podemos leer en la obra ya clásica de Hadamard (1947):

Entre el trabajo de un estudiante que trata de resolver un problema de geometría o de álgebra y un trabajo de invención, puede decirse que hay únicamente una diferencia de grado, una diferencia de nivel, tratándose en realidad de trabajos de naturaleza muy análoga. [23]

También podemos preguntarnos: pero, ¿esto es importante entre los innumerables aspectos a tratar en la educación matemática? Una respuesta a esta cuestión puede ser la siguiente, de Polya (1966):

El resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición. Si esto es así, y yo lo creo, habrá un lugar para la intuición en la enseñanza de las matemáticas. La educación debe prepararnos para la invención o, al menos, para el gusto por ella. En cualquier caso, la educación no debe suprimir los gérmenes inventivos en el estudiante.[24]

4. Reflexiones finales

Como hemos visto, las preguntas matemáticas son puertas que podemos abrir y volver a cerrar, sin entrar, o que podemos traspasar con el objeto de, en algunas de ellas, ver los mundos que se esconden detrás. Pero las matemáticas no son la puerta; las matemáticas son lo que hay dentro.

---

[22] Taton, R. *Causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos,* pág. 23-24
[23] Hadamard, J. *Psicología de la invención en el campo matemático,* pág. 175.
[24] Polya, G. *Matemáticas y razonamiento plausible,* pág. 465.

Estas propuestas no sólo son un planteamiento metodológico, sino que configuran unas concepciones epistemológicas sobre el conocimiento matemático, cómo se genera, cuál es su estructura y como se desarrolla.

Las propuestas anteriores no se pueden llevar todos los días a la clase, como también ocurre con cualquier otro planteamiento metodológico, pero se debe alternar adecuadamente, de manera equilibrada con todos los demás.

La metodología investigadora está muy conectada al método experimental, ya que promueven la construcción del conocimiento por parte del estudiante. Se trata de *identificar un problema, experimentar con ejemplos, conjeturar un resultado, construir una experimentación, dar forma a una solución, controlar los resultados y evaluar su relevancia en función del problema estudiado*. Pero debemos tener en cuenta que la experimentación en el campo de las matemáticas tiene unas formas y métodos propios; los más adecuados para los niveles educativos no universitarios pueden ser:

a) la validación o refutación de conjeturas construidas a partir de ejemplos que permiten identificar patrones, leyes, invariantes, etc., contenidos en la situación de partida, u obtenidos mediante variaciones hechas en la misma;

b) la puesta en práctica de procesos de matematización y modelización, con la utilización de un modelo matemático ya existente, la construcción de uno nuevo, o la selección del modelo entre varios; todo ello dirigido a evaluar su eficacia (mediante la realización de simulaciones para hacer predicciones), detectar sus limitaciones y proponer modificaciones que lo mejoren.

Aunque hemos visto muchos ejemplos concretos, las propuestas investigadoras y experimentales *plantean preguntas difíciles para los profesores: ¿qué enunciados elegir? ¿cuáles deben ser los requisitos de rigor? ¿cómo articular la investigación y la demostración? ¿Cómo insertar este enfoque en la programación anual? ¿Cuáles son las contribuciones en términos de aprendizaje para los estudiantes y cómo evaluarlas? Para algunos profesores, el enfoque experimental contradice sus concepciones de lo que son las matemáticas y la geometría en particular. Esto indica la necesidad de una formación continua específica.*[25]

Precisamente, partiendo de alguno de los ejemplos que hemos visto, algunos profesores y profesoras a los que les hayan gustados las propuestas presentadas, notarán esa misma necesidad. Adelante y mucho ánimo: la tarea es fascinante.

[25] Gueudet, G; Trouche, L. Ressources en ligne et travail collectif enseignant: accompagner les evolutions de pratique, pág. 8.

5. Bibliografía

- Barragués, J. I. (2008). Sé lo que hicimos el curso pasado. En *UNO*, nº 49, p. 48-62, Barcelona.
- Cañón, C. (1993). *La matemática: creación y descubrimiento*. Edit UPCO, Madrid.
- Davis, P. y Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática*. Ed. Labor y MEC, Barcelona.
Doxiadis, A. (2000). *El Tío Petros y la Conjetura de Goldbach.* Ed. B, S.A., Barcelona.
- Gayford, M. (2014). *Miguel Ángel: Una vida épica*. Edit. Taurus, Barcelona.
- Gleichman, G. (2014). *El elixir de la inmortalidad.* Edit. Anagrama, Barcelona
- Gueudet, G; Trouche, L. (2010). Ressources en ligne et travail collectif enseignant: accompagner les evolutions de pratique. En Mottier Lopez, L., Martinet, C., y Lussi, V (Edit). *Actes du Congres Actualite de la Recherche en Education*. Universidad de Génova, Suiza. p.1-10.
- Guzmán, M. de (1987). Enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas. En *Aspectos didácticos de matemáticas,* nº 2. Universidad de Zaragoza, Instituto de Ciencias de la Educación.
- Hadamard, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático.* Edit. Espasa-Calpe, S.A. Buenos Aires. Reedición de la Real Sociedad Matemática Española (2011).
- Hudde, J. (1659). Johannis Huddenii epistola secunda de maximis et minimis. En *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 Gallicé edita.* Edit F. Van Schooten, Amsterdam, pág. 507-516
- Lockhart, P. (2008). Lamento de un matemático. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 11 (2008), Núm. 4, Págs. 739–766.
- Mason, J., Burton, L. y Stacey, K., (1988). *Pensar matemáticamente.* Edit Labor y MEC, Barcelona.
- Ogawa, Y. (2008) *La fórmula preferida del profesor.* Ed. Funambulista, Madrid.
- Polya, G., (1945). *How to solve it*. Princeton University Press, USA. Existe traducción al castellano en 1965: *Cómo plantear y resolver problemas*. Edit Trillas, Mexico.
- Schoenfeld, A., (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press, Nueva York.
- Taton, R. (1973). *Causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos*. Edit Labor, Barcelona.