LOS MODOS DE PENSAMIENTO SINTÉTICO Y ANALÍTICO EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE BASE EN EL ESPACIO VECTORIAL R^2: UN ESTUDIO DE CASOS EN UN CONTEXTO UNIVERSITARIO

Marcela Parraguez
marcela.parraguez@pucv.cl
https://orcid.org/0000-0002-6164-3056
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV)
Valparaíso, Chile.

Guadalupe Vera-Soria
guadalupe.vera@academicos.udg.mx
https://orcid.org/0000-0001-8294-6585
Universidad de Guadalajara (UDG)
Guadalajara, México.

Recibido: 13/04/2020 **Aceptado:** 22/05/2020

Resumen

Se presenta una indagación sobre la comprensión del concepto de base en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ en estudiantes universitarios, teniendo como fundamento el modelo de los modos de pensamiento de Sierpinska. El objetivo de la investigación fue describir cómo es el proceso de construcción del significado del acto de comprender el concepto de base en $\mathbb{R}^2$, cuando se articulan tres modos de pensar la Base en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, a través de lo sintético-geométrico-Base de $\mathbb{R}^2$, lo analítico-aritmético-Base de $\mathbb{R}^2$ y lo analítico-estructural-Base de $\mathbb{R}^2$. Los documentos derivados de entrevistas realizadas a seis estudiantes del área de Ingeniería, los cuales previamente abordaron actividades para la exploración del concepto de base de $\mathbb{R}^2$ en un ambiente gráfico-algebraico, se organizaron conforme a las operaciones de comprensión que fue posible poner de relieve durante el proceso de abstracción de las operaciones mentales para describir el acto de comprensión del concepto base para $\mathbb{R}^2$: síntesis, generalización, discriminación o identificación. Posteriormente, un análisis hermenéutico de los significados que esos estudiantes le asignaron a las nociones de combinación lineal, conjunto generador e independencia lineal, fue indicativo de que algunas relaciones, como ligar la idea de generar con una variación continua de combinaciones lineales en $\mathbb{R}^2$, o reconocer que no hay una única forma de generar el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, son elementos claves para alcanzar la comprensión de Base en $\mathbb{R}^2$ como un sistema conceptual.

Palabras clave: Modos de pensamiento. Comprensión conceptual. Estudio hermenéutico. Significados.

Modos de pensamento sintético e analítico no entendimento do conceito base de base no espaço vetorial R^2: Um estudo de caso em um contexto universitário

Resumo

É apresentada uma investigação sobre a compreensão do conceito de base no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ em estudantes universitários, com base no modelo dos modos de pensamento de Sierpinska. O objetivo da pesquisa foi descrever como é o processo de construção do significado do ato de

entender o conceito de base no $\mathbb{R}^2$, quando são articuladas três formas de pensar a Base no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, através do sintético-geométrico-Base de $\mathbb{R}^2$, do analítico-aritmético-Base de $\mathbb{R}^2$ e do analítico-estrutural-Base de $\mathbb{R}^2$. Os documentos derivados de entrevistas realizadas com seis alunos da área de Engenharia, que anteriormente abordaram atividades para a exploração do conceito de base de $\mathbb{R}^2$ em ambiente gráfico-algébrico, foram organizados de acordo com as operações de compreensão que foi possível destacar durante o processo de abstração de operações mentais para descrever o ato de entender o conceito base de $\mathbb{R}^2$: síntese, generalização, discriminação ou identificação. Posteriormente, uma análise hermenêutica dos significados que esses alunos atribuíram às noções de combinação linear, conjunto gerador e independência linear, foi indicativa de que algumas relações, como vincular a ideia de gerar com uma variação contínua de combinações lineares de $\mathbb{R}^2$ ou reconhecer que não existe uma maneira única de gerar o espaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, são elementos-chave para alcançar o entendimento de Base em $\mathbb{R}^2$ como um sistema conceitual.
Palavras chave: Modos de pensamento. Compreensão conceitual. Estudo hermenêutico. Significados.

Synthetic and analytical thought modes in understanding the concept of basis in the vector space R^2: A case study in a university context

Abstract

An investigation on the understanding of the concept of basis in the vector space $\mathbb{R}^2$ in university students is presented, based on the model of Sierpinska's modes of thought. The objective of the research was to describe how the process of constructing the meaning of the act of understanding the base concept for $\mathbb{R}^2$, when three ways of thinking the Basis in vector space $\mathbb{R}^2$ are articulated: through the synthetic-geometric-Basis of $\mathbb{R}^2$, the analytical-arithmetic-Basis of $\mathbb{R}^2$ and the analytical-structural-Basis of $\mathbb{R}^2$. The documents derived from interviews carried out with six students from the Engineering area, who previously tackled activities for the exploration of the concept of basis for $\mathbb{R}^2$ in a graphical-algebraic environment, were organized according to the comprehension operations that it was possible to highlight during the process of abstraction of mental operations to describe the act of understanding the concept of basis for $\mathbb{R}^2$ synthesis, generalization, discrimination or identification. Subsequently, a hermeneutical analysis of the meanings that these students assigned to the notions of linear combination, generating set and linear independence, was indicative that some relationships, such as linking the idea of generating with a continuous variation of linear combinations in $\mathbb{R}^2$, or recognizing that there is not a single way to generate the $\mathbb{R}^2$ vector space, are key elements to achieve the understanding the notion of Basis for $\mathbb{R}^2$ as a conceptual system.
Keywords: Thought modes. Conceptual understanding. Hermeneutical study. Meanings

Introducción

El presente artículo se sitúa en la comprensión del concepto de base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, con el propósito de describir cómo es el proceso por el cual estudiantes universitarios del área de Ingeniería, que cursan la materia de Álgebra Lineal (AL), construyen el significado de dicho concepto.

El concepto de base es primordial para describir un espacio vectorial con pocos elementos y guarda una estrecha relación con conceptos importantes del AL, como por ejemplo, Transformaciones lineales (Roa-Fuentes y Parraguez, 2017), Valores y vectores propios (Parraguez y Yañez, 2017). Sin embargo, hasta ahora pocos estudios en el área de la Matemática Educativa se han enfocado en la comprensión específica de este concepto, desde referentes teóricos cognitivos. La investigación de Kú, Trigueros y Oktaç (2008), situada en la Teoría APOE estableció que la construcción cognitiva del concepto de Base de un espacio vectorial resulta de la coordinación de los conceptos de conjunto generador e independencia lineal, mientras que en la indagación doctoral de Chargoy (2006), sobre las dificultades en el entendimiento del concepto de Base, se señaló que el manejo sistémico de los conceptos germinales (combinación lineal, conjunto generado e independencia lineal) es fundamental para su buen entendimiento, y que la gestación de la noción de Base se encuentra en diversas fuentes geométricas y analíticas.

La presente investigación, ha considerado profundizar en el proceso de comprensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ desde el concepto de Base, porque no existe alguna investigación que describa cómo se articulan las distintas formas de ver y entender la noción de Base de $\mathbb{R}^2$, para alcanzar su comprensión como un todo sistémico.

Marco Teórico: Los Modos de Pensamiento

De una manera muy general, los modos de pensamiento (Sierpinska, 2000) son formas de ver y entender los objetos matemáticos del AL, y que producto de su interacción se produce la comprensión. La comprensión para Sierpinska (1994), implica la captación de las relaciones internas de un objeto que se puede dar a través de una de función, un problema, un símbolo o un concepto, y esta comprensión, se construye mediante la formación mental de objetos matemáticos ligados al AL, mediante la realización de conexiones que respetan su coherencia matemática interna. En lo específico, esta investigación aportará en describir "cómo" se produce la interacción entre los modos de pensar, cuando el objeto de estudio se sitúa en el concepto de Base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

Sierpinska, después de muchos años de tratar de entender las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del AL a nivel de pregrado, llega a la conclusión que los estudiantes comprenden el AL en muchos aspectos de la teoría, con un enfoque más práctico (su objetivo son las acciones sobre hechos concretos) que teórico (su objetivo son las relaciones sobre sistemas de conceptos), sin embargo, hacer más explícito el pensamiento teórico del AL no es tan obvio, porque el AL con sus definiciones de espacio vectorial y transformaciones lineales, es un conocimiento muy teórico, que no puede reducirse a la práctica y al dominio de un conjunto de procedimientos de cálculos algorítmicos o mecánicos.

Según Dorier (1995), el desarrollo del AL comienza con un proceso de pensar analíticamente el espacio geométrico y con una postura muy general, se pueden distinguir en este desarrollo, dos grandes etapas referidas a dos procesos: (1º) la aritmetización del espacio, que tuvo lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en $\mathbb{R}^n$ y (2º) El otro que la desaritmetización del espacio a su estructuración, con la que los vectores abandonan las coordenadas que los anclaban al dominio de los números y se convierten en elementos abstractos cuyo comportamiento está definido por un sistema de propiedades o axiomas (Sierpinska, 2000). Como producto de estos dos procesos del análisis histórico y epistemológico del AL, Sierpinska (2000) identifica tres modos de pensar este fragmento de la matemática: sintético-geométrico (SG), analítico-aritmético (AA) y analítico-estructural (AE), que hacen explícito el pensamiento teórico y abordan el obstáculo epistemológico del AL, esto es, que el AL rechaza los números dentro de la geometría, y que la geometría pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético.

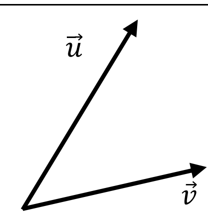
Estos tres modos de pensar el AL, SG, AA y AE, no constituyen etapas para el desarrollo de su pensamiento, sino que el pensamiento del AL se desarrolla simultáneamente en estos tres modos que son igualmente útiles, en su propio contexto y para propósitos específicos, cuando ellos interactúan en una actividad matemática. Lo importante, es que cada uno de los modos de pensamiento constituye una vía de acceso a los objetos matemáticos del AL, aunque al estar en interacción se permite advertir distintos aspectos de un mismo objeto.

Los modos de pensamiento utilizan sistemas de representación específicos, por ejemplo, en el modo de pensamiento SG se usa el lenguaje geométrico de planos, líneas, intersecciones o conjuntos de puntos, mientras que en el modo AA, las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de n-uplas de números que satisfacen ciertas condiciones, y en general los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas o simbólicas. Y finalmente, en el modo de pensamiento AE, se sintetiza la estructura de los elementos algebraicos, es decir, los objetos matemáticos se reconocen por sus propiedades o características invariantes (Sierpinska, 2000), de hecho, Sierpinska afirma que la principal diferencia entre los modos pensamiento sintético y el analítico, es que en el modo sintético, los objetos son aproximados directamente a la mente la cual trata de describirlos, mientras que en el modo analítico dichos objetos se aproximan de forma indirecta y pueden ser construidos a través de la definición de las propiedades de sus elementos (Sierpinska, 2000).

Los Modos de Pensar el Concepto de Base del Espacio Vectorial $\mathbb{R}^2$

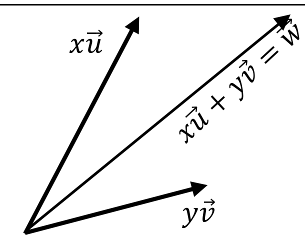
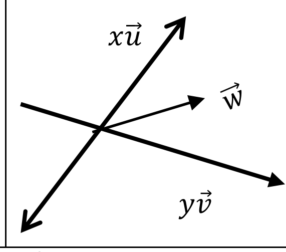
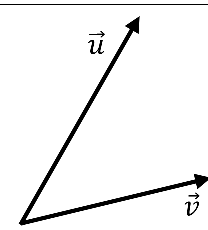
Una Base B para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, es un conjunto constituido por dos elementos distintos $\mathrm{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, el cual permite escribir como combinación lineal de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$ cualquier elemento (x, y) de $\mathbb{R}^2$ de manera única. Sin embargo, para llegar a conceptualizar la Base de $\mathbb{R}^2$ se precisa instalar en los aprendices un sistema conceptual previo que se relaciona con los conceptos: Subconjunto de $\mathbb{R}^2$, espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, combinación lineal en $\mathbb{R}^2$, vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$, conjunto generador y espacio generado en $\mathbb{R}^2$. Según libros de textos de AL (Lay, 2013; Grossman, 2012; Poole, 2011, entre otros) el sistema conceptual requerido sobre el cual se construye el concepto de Base para $\mathbb{R}^2$, puede ser presentado de tres formas: (1) Una definición como objeto teórico del AL a través de dos propiedades, (2) Una caracterización a través de una solución única de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo o no homogéneo, y (3) de forma geométrica como vectores no colineales. Esto último se presenta en el Cuadro 1, interpretado desde los Modos de Pensar.

Cuadro 1: Modos de pensar el Sistema Conceptual del Concepto Base para $\mathbb{R}^2$

Base de $\mathbb{R}^2$		
Modo de pensar AE-B de $\mathbb{R}^2$	Modo de pensar AA-B de $\mathbb{R}^2$	Modo de pensar SG-B de $\mathbb{R}^2$
$\{\vec{u},\ \vec{v}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, es Base de $\mathbb{R}^2$ si y solo si se cumplen: 1) $\{\vec{u},\ \vec{v}\}$ es linealmente independiente. 2) $\langle\vec{u},\ \vec{v}\rangle = \mathbb{R}^2$.	$\{\vec{u},\ \vec{v}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es Base de $\mathbb{R}^2$ si y solo si la solución para el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$ (con $x, y \in \mathbb{R}$) es única.	

Continúa..

Cuadro 1: Modos de pensar el Sistema Conceptual del Concepto Base para $\mathbb{R}^2$ *(continuación)*

Combinación Lineal de $\mathbb{R}^2$		
Modo de pensar AE-CL de $\mathbb{R}^2$	Modo de pensar AA-CL de $\mathbb{R}^2$	Modo de pensar SG-CL de $\mathbb{R}^2$
$\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^2$. $\vec{w}$ es CL de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si y solo si, existen $x, y \in \mathbb{R}$, tal que: $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$	$\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^2$. $\vec{w}$ es CL de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si y solo si, existe solución para el sistema de ecuaciones lineales $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$ (con $x, y\ \in \mathbb{R}$)	
Conjunto Generador y Espacio Generado $\mathbb{R}^2$		
Modo de pensar AE-CG/EG de $\mathbb{R}^2$	Modo de pensar AA-CG/EG de $\mathbb{R}^2$	Modo de pensar SG-CG/EG de $\mathbb{R}^2$
$\{\vec{u}, \vec{v}\}\ \subseteq \mathbb{R}^2$. El conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ genera a $\mathbb{R}^2$ si y solo si, existen $x, y \in \mathbb{R}$, tal que: $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}, \forall \vec{w} \in \mathbb{R}^2$.	$\{\vec{u}, \vec{v}\}\ \subseteq \mathbb{R}^2$. $\langle \vec{u},\ \vec{v} \rangle = \mathbb{R}^2$, si y solo si, existe solución para el sistema de ecuaciones lineales $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}, \forall \vec{w} \in \mathbb{R}^2$. (con $x, y\ \in \mathbb{R}$)	
Conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^2$		
Modo de pensar AE-LI de $\mathbb{R}^2$	Modo de pensar AA-LI de $\mathbb{R}^2$	Modo de pensar SG-LI de $\mathbb{R}^2$
$\{\vec{u}, \vec{v}\}\ \subseteq \mathbb{R}^2$. El conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es LI en $\mathbb{R}^2$ si y solo si, para $x, y \in \mathbb{R}$, tal que: $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$, entonces $x = y = 0$.	$\{\vec{u},\ \vec{v}\}\ \subseteq \mathbb{R}^2$ es LI en $\mathbb{R}^2$ si y solo si la solución para el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$ (con $x, y\ \in \mathbb{R}$) es única.	

Fuente: Elaboración Propia

Importancia para el AL de abordar el Concepto Base de $\mathbb{R}^2$ desde el Modelo Los Modos de Pensar

Abordar el concepto de base para $\mathbb{R}^2$ en sus tres modos de pensarlos –AE-B de $\mathbb{R}^2$, AA-B de $\mathbb{R}^2$ y SG-B de $\mathbb{R}^2$– reporta la presencia o ausencia de un pensamiento sistémico (Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002) en los aprendices de AL, al enfrentarlos a ellos a resolver situaciones en el contexto de $\mathbb{R}^2$. Uno de los rasgos del pensamiento sistémico es que se enfoca en el establecimiento y estudio de las relaciones entre los conceptos que subyacen alrededor de Base de $\mathbb{R}^2$ (dimensión del espacio vectorial, base ordenada, base ortonormal, coordenadas de un vector, entre otros) y a su caracterización dentro de un sistema, que llamaremos Modos de pensar la Base para $\mathbb{R}^2$, que también contiene otros conceptos como el de conjunto, orden, cardinalidad, entre otros.

Se considera que el dominio de esos tres modos de pensar el conocimiento incluido en los Modos de pensar la Base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ para el AL es primordial, ya que está muy relacionado con las dificultades que tiene el aprendiz de estos temas para representar todo el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, a través de solo dos vectores. Esto puede ser la causa de obstáculos en la enseñanza y aprendizaje del AL, que sólo la articulación de los tres modos de pensarla ayudaría a remontarlos, y en consecuencia el dominio de la habilidad para articularlos se torna fundamental en la comprensión de $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial y su aplicación. Cuando decimos que la comprensión se da con la articulación de los tres modos de pensar la Base para $\mathbb{R}^2$, en realidad entendemos al binomio –Modos de Pensar y Comprensión–, como un Sistema.

Los Modos de Pensar y la Comprensión

La conceptualización que realizó Sierpinska de la comprensión implicó el desarrollo, la construcción y la ordenación de ideas que obtuvo a partir de los trabajos de Ricoeur (quien desde 1947-2005 indagó en la vinculación de los procesos hermenéuticos con la fenomenología), Ajdukiewicz (quien entre 1921-1960 desarrolló numerosas ideas novedosas en semiótica), Dewey (quien desde 1886-1952 fue representante del pensamiento reflexivo), Dilthey (quien desde 1874–1911 estudió la hermenéutica filosófica), Kant (quien desde 1747-1804 se caracterizó por la búsqueda de una ética o principios con el carácter de universalidad que posee la ciencia a través de la crítica de razón práctica) y Hume (quien desde 1750-1775 investiga el entendimiento humano a través de la idea razón práctica), y como producto de esta conceptualización Sierpinska (1994) consideró que la comprensión es un "*acto*" relacionado con un proceso de interpretación que se desarrolla conforme se validan ciertas suposiciones. En el contexto de esta investigación, esto último al alero del referente teórico –los modos de pensamiento de Base para $\mathbb{R}^2$– se considera como un proceso de construcción de los significados, a través de la interpretación de tres formas de ver y entender el concepto de Base en $\mathbb{R}^2$, lo que constituye *Los Modos de Pensar el Concepto de Base* para $\mathbb{R}^2$.

En un acto de comprensión un objeto de comprensión se relaciona con otro objeto que funge como fundamento de la comprensión del primero, y la operación mental que conecta el objeto de comprensión con su fundamento. Las operaciones mentales que intervienen en un acto de comprensión son la *identificación*, la *discriminación*, la *generalización* y la *síntesis*. Sin embargo, Sierpinska (1994) aclara que la abstracción es una operación involucrada en todas y cada una de las cuatro operaciones mencionadas, debido a que por medio de ella se destacan las características de los objetos matemáticos.

Identificar un objeto de comprensión implica un sentimiento de descubrimiento o reconocimiento, "involucra primero que algo es revelado, es decir, que se ha aislado y escogido del 'fondo del campo de la conciencia' donde estaba […] escondido y segundo, que se ha reconocido como algo que se intenta entender" (Sierpinska, 1994, p. 56). En cuanto a la *discriminación* se refiere a "la identificación de dos objetos como diferentes" (Sierpinska, 1994, p. 57), es decir, que implica un acto de comparación con respecto a algunas circunstancias.

Por su parte, la *generalización* es una operación mental en la cual un determinado objeto de comprensión es entendido como un caso particular de otra situación y así, la generalización puede definirse como "la identificación de una situación como caso particular de otra situación" (Sierpinska, 1994, p. 59), lo que conduce a considerar que la identificación no necesariamente es una operación mental más elemental que la generalización, excepto cuando se tome en cuenta la identificación de la cual esa generalización procede. Mientras que *sintetizar* significa "la búsqueda de un vínculo común, un principio unificador, una similitud entre varias generalizaciones y su aprehensión como un todo (un cierto sistema) sobre este fundamento" (Sierpinska, 1994, p. 60).

Descrito los elementos que componen el encuadre teórico de la investigación, el presente artículo se sitúa en la comprensión del concepto de Base de $\mathbb{R}^2$, con la intención de mostrar evidencias con sustento teórico, que permitan explicar ¿cómo estudiantes universitarios que están cursado AL, se sitúan y transitan en los Modos de Pensar el concepto de Base de $\mathbb{R}^2$, para alcanzar su comprensión?

Método

El estudio que se presenta es de corte cualitativo con la estrategia específica del método hermenéutico, y que fue desarrollado en dos etapas.

Primera etapa

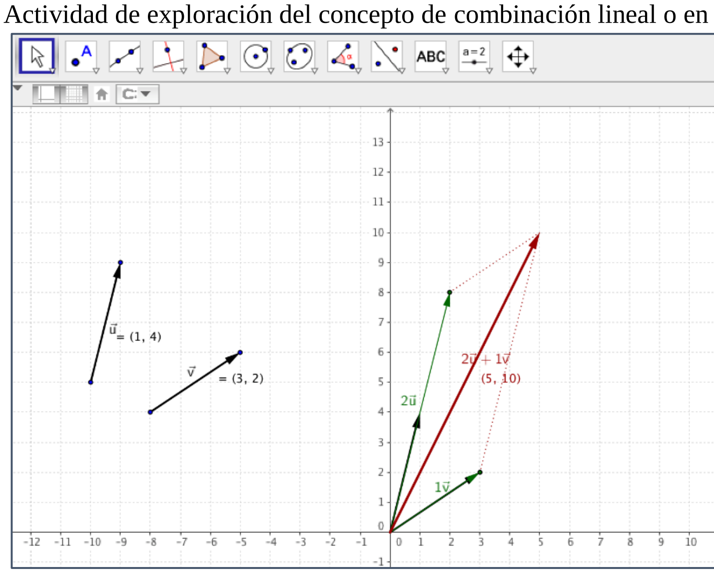
Para llevar a cabo la investigación se asistió durante cinco semanas a la clase de AL para dos grupos paralelos con 25 y 28 estudiantes, de un centro universitario latinoamericano (U), donde la materia de AL es parte del área de formación básica común obligatoria en el plan de estudios de 11 de los 14 programas de nivel licenciatura de U, por lo que en ambos grupos estaban inscritos alumnos de Ingeniería Civil, de Biomédica, de Computación, de Informática, de Comunicaciones y de Electrónica.

Los estudiantes de ambos grupos fueron informados del objetivo de la investigación y se les comentó que se llevaría a cabo una clase práctica en el laboratorio de cómputo (llamada actividad experimental) y que ésta sería videograbada, por lo que se dio la opción de una asistencia voluntaria a esta práctica.

El instrumento llamado *actividad experimental de exploración del concepto de Base para* $\mathbb{R}^2$, se trabajó con un total de 19 estudiantes voluntarios, posterior de haber sido abordado en la clase de cátedra el concepto de Base. Varias situaciones de la actividad, incluyeron el uso del programa GeoGebra y el flujo de acciones propuestas en esta actividad, dio paso a explorar en los modos SG-B de $\mathbb{R}^2$ y AA-B de $\mathbb{R}^2$, la relación entre distintos conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^2$ y el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ construido a través de combinación lineal de vectores.

En este sentido, el uso del programa GeoGebra en la actividad experimental, concierne al posible impacto del ambiente de geometría dinámica como agente de construcción conceptual, a fin de conectar la idea de combinación lineal con la de suma ponderada de vectores, y de generar un conjunto de combinaciones lineales. Posteriormente se sugiere en la actividad la reflexión respecto a las características de los conjuntos y la cantidad de vectores necesarios para generar un determinado espacio o subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Figura 1. Actividad de exploración del concepto de combinación lineal o en *Geogebra.*

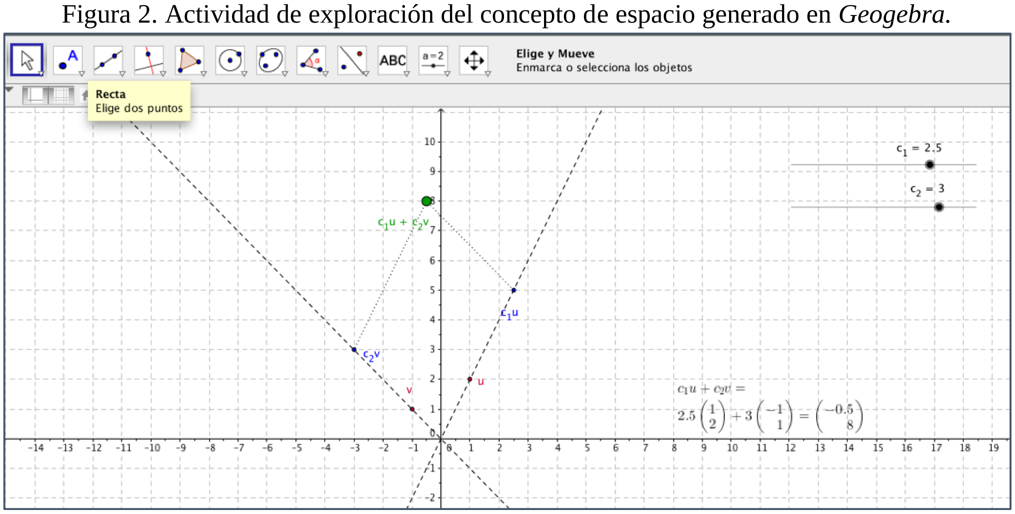


Fuente: Elaboración Propia

Los estudiantes participantes, lograron manipular dos archivos distintos en el programa GeoGebra, para advertir las relaciones mencionadas en el párrafo anterior (Figuras 1 y 2). En el primer archivo, un aspecto importante para la formación del concepto de combinación lineal, fue la posibilidad de desplazar (dragging) los extremos de los vectores-flecha que representan vectores variables (múltiplos escalares), y procurar la atención de los estudiantes hacia el vector resultante en relación con los múltiplos escalares que se suman (Figura 1). En este caso, se consideró conveniente representar el vector que es combinación lineal, como una flecha (color rojo en la Figura 1) y no como un punto, ya que así se podría facilitar la identificación de la relación entre el vector resultante y los vectores (múltiplos escalares) correspondientes.

En cuanto al segundo archivo, la representación de una combinación lineal, se realizó mediante el vector-punto debido a que en esta etapa, se pretendía beneficiar el potencial natural de representación gráfica del GeoGebra, para mostrar de forma explícita, la variabilidad inherente a la noción de conjunto generador, al asociarle a un conjunto de vectores elementos de un espacio vectorial, con el posible conjunto de combinaciones lineales que con él se generan, mediante el uso simultáneo del *rastro* de las combinaciones lineales resultantes, y la *animación* aleatoria de cada uno de los deslizadores, que representan los múltiplos escalares variables y posibles para dichas combinaciones (Figura 2).

Figura 2. Actividad de exploración del concepto de espacio generado en *Geogebra.*



Fuente: Elaboración Propia

Las indicaciones sugeridas en las actividades pretendían conducir a los estudiantes a explorar las características esenciales que deben distinguir en los conceptos básicos, es decir, analizar clases de vectores (en un conjunto dado) que pueden generar a todo $\mathbb{R}^2$, o a un subespacio vectorial específico de $\mathbb{R}^2$. En relación a esto último, en la actividad exploratoria se incluyeron preguntas (Figura 3) que invitaron a establecer relaciones entre los vectores del conjunto, con el conjunto generador y el espacio que se generaba.

Figura 3. Indicaciones específicas en la actividad experimental.

6. Selecciona el punto verde y con el botón derecho elige rastro, además posiciónate sobre cada uno de los deslizadores y dando clic con botón derecho elige animación. Contesta, ¿crees que se pueda obtener cualquier vector en el plano R^2 como combinación lineal de $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$?. ¿Crees que el espacio que se genera con las combinaciones lineales de estos nuevos vectores es distinto del que se generó con los vectores $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$?. Explica tus observaciones.

Fuente: Elaboración Propia

Segunda etapa

Se aplicaron entrevistas individuales a seis estudiantes que asistieron regularmente al curso de AL y que también participaron en la actividad de exploración del concepto de Base de $\mathbb{R}^2$. Tomando en cuenta el consentimiento y la disponibilidad de tiempo de los estudiantes para ser entrevistados, y previa información del anonimato y manejo ético de los datos obtenidos en el estudio, los estudiantes a los que se les aplicaron las entrevistas se eligieron de acuerdo con el promedio de calificaciones parciales en los exámenes del curso, esto fue: dos estudiantes de calificaciones altas (A1 y A2), dos de calificaciones medias (M1 y M2) y dos de calificaciones bajas (B1 y B2).

De acuerdo al tipo de muestreo realizado y enfatizando que en la investigación cualitativa lo que se busca es entender el objeto de estudio y dar respuesta a la pregunta de investigación y no generalizar un resultado, se puede señalar que el tipo de muestra elegida, conocido como muestras diversas, se debe a que se pretendía contar con distintas perspectivas para representar la complejidad del fenómeno en estudio (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

En la Tabla 1, se presenta una relación del perfil de los seis estudiantes a entrevistar que conformaron la muestra y la información acerca del semestre que cursaban y el puntaje que obtuvo cada uno de ellos en la prueba de ingreso a la U.

Tabla 1
Perfil de los seis estudiantes entrevistados

Estudiante	Carrera que Cursa	Semestre	Promedio Bachillerato	Promedio Prueba de Aptitud	Puntaje de Ingreso a U
A1	Ingeniería Civil	2°	96.71	78.61	175.32
A2	Ingeniería Civil	2°	99	78.38	177.38
M1	Ingeniería Biomédica	3°	97.5	77.7	175.22
M2	Ingeniería Civil	2°	96	80.27	176.27
B1	Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica	2°	75	71.38	146.38
B2	Ingeniería en Computación	3°	85.75	65.72	151.47

Se optó por la entrevista semiestructurada como fuente principal de obtención de los datos en el estudio, porque la pregunta de investigación se enfoca en indagar la construcción del significado del concepto Base para $\mathbb{R}^2$ en los participantes, a través de la articulación de los modos de pensar presentados en el Cuadro 1. Las entrevistas se videograbaron para que se constituyeran en documentos de análisis de donde extraer datos para la investigación, y para posibilitar la transcripción del diálogo y así tener acceso a la verificación de la información recabada. Las preguntas guías y los tópicos para las entrevistas, se muestran en el Cuadro 2.

Cuadro 2: Guía de tópicos para las entrevistas

Sub-preguntas de investigación	***Tópicos para las entrevistas***
¿Qué relaciones sobre los conceptos de combinación lineal, conjunto generador e independencia lineal, muestran los estudiantes, y en qué modos de pensamiento se sitúan?	Lo que los estudiantes pueden referir respecto a las relaciones que perciben entre los vectores en los conjuntos con los que se les propuso trabajar, y sobre la relación de dichos conjuntos con el espacio o subespacio vectorial que es posible generar con ellos, para así identificar las ideas que ellos tienen acerca de los conceptos germinales. Los diferentes modos de pensamiento en que los estudiantes se sitúan en sus respuestas.
¿De qué manera los estudiantes que sintetizan el sistema conceptual previo que les permite comprender el concepto de base de $\mathbb{R}^2$, lo ponen a prueba en la articulación de los modos de pensamiento AE-B de $\mathbb{R}^2$, AA-B de $\mathbb{R}^2$ y SG-B de $\mathbb{R}^2$?	Las reflexiones y descripciones respecto a la cadena de significados que los estudiantes podrían llevar a cabo para asociar los conceptos de combinación lineal, conjunto generador e independencia lineal, y con ello reconocer conjuntos de vectores que son o no base de un espacio o subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Fuente: Elaboración Propia

Análisis de evidencias

En los resultados que se presentan, se especifican: (1) una explicación sobre la manera en que los modos de pensamiento del Cuadro 1 se articularon para poder llegar a la síntesis del sistema, que conduce a la comprensión articulada de la noción de Base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, y (2) una sinopsis interpretativa que integra los distintos episodios en relación al Cuadro 1 que fue posible evidenciar en los participantes, y que dan cuenta de los actos de comprensión para el sistema del concepto Base para $\mathbb{R}^2$.

Los Modos de pensamiento en la síntesis del concepto Base del Espacio Vectorial $\mathbb{R}^2$

Como resultado de haber evaluado y valorado las evidencias de los seis estudiantes, se muestra en el Cuadro 3, un panorama general de los modos de pensamiento en que los estudiantes se situaron en la entrevista de acuerdo al Cuadro 1.

Cuadro 3: Modos de pensamientos mostrados en la entrevista

Estudiante	Indicios del Modo de pensar Combinación lineal en $\mathbb{R}^2$	Indicios del Modo de pensar Conjunto generador en $\mathbb{R}^2$	Indicios del Modos de pensar Vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$	Modo de pensar Base de $\mathbb{R}^2$
A1	SG-CL – AA-CL – AE-CL	SG-CG – AA-CG	AA-LI	AE-Base
A2	SG-CL – AA-CL	SG-CG – AA-CG	SG-LI – AA-LI	SG-B – AA-B – AE-B
M1	SG-CL – AA-CL	SG-CG – AA-CG – AE-CG	SG-LI	AE-B
M2	SG-CL – AA-CL	SG-CG – AA-CG – AE-CG	SG-LI – AA-LI – AE-LI	SG-B – AA-B – AE-B
B1	SG-CL – AA-CL	SG-CG – AA-CG	AA-LI	Sin respuesta
B2	SG-CL – AA-CL	SG-CG – AA-CG	AA-LI	AA-B

Fuente: Elaboración Propia

El trabajo de los estudiantes se organizó conforme a las operaciones de comprensión que fue posible poner de relieve durante el proceso de abstracción de las nociones del sistema Base para $\mathbb{R}^2$: síntesis (en A2 y M2), generalización (en M1), discriminación (en A1) o identificación (en B1 y B2).

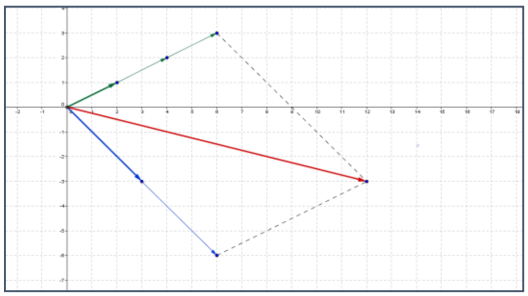
A continuación, se presentan exclusivamente las deducciones de los estudiantes A2, M1 y M2 (resaltados con color plomo en el Cuadro 3), porque en los modos de pensamiento mostrados en el proceso de síntesis, generalización, discriminación e identificación respectivamente, del sistema conceptual conformado por: combinación lineal, conjunto generador, independencia lineal y base para $\mathbb{R}^2$, se evidenciaron los extractos más representativos del trabajo que han realizado los seis estudiantes para responder las preguntas de las entrevistas, como se muestra a continuación.

Comprensión de la Combinación Lineal de vectores en $\mathbb{R}^2$

En revisión del significado expresado por el estudiante M1 sobre el concepto de combinación lineal, se muestra que al parecer fue suficiente para este participante advertir indicios en los modos SG-CL en $\mathbb{R}^2$ y AA-CL en $\mathbb{R}^2$, para el vector que resulta de la suma de múltiplos escalares de los vectores de un conjunto, para llegar a reconocer las relaciones que dan sentido a otras nociones del sistema conceptual, en particular, los conceptos de espacio generado y conjunto generador.

Para abrir la discusión sobre el concepto de combinación lineal, se le solicitó a M1 que expresara lo que para él simboliza la representación que se muestra en la Figura 4.

Figura 4. Indicios SG-CL en $\mathbb{R}^2$.



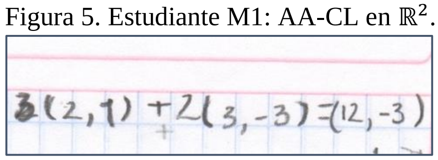
Fuente: Elaboración Propia

A lo que M1 responde:

> *M1: Una suma de vectores… bueno… en sí no es una suma, es buscar la combinación de los vectores porque se está mostrando que, habíamos quedado que este es "u", ¿verdad? [Humm.], ok, entonces, ahí está marcando que, si multiplico tres veces "u" y sumo a dos veces "v", el resultante va a ser la línea roja y ese de ahí es el total.*

Así también, M1 escribe y añade lo que se muestra en la Figura 5.

Figura 5. Estudiante M1: AA-CL en $\mathbb{R}^2$.



Fuente: Datos de la Investigación

> *M1: Entonces… teniendo en cuenta eso sería... aquí en este caso, humm, dos por.. ah… (2,1)... no, aquí es 3… es por (2,1) más 2(3,-3)… la resultante tiene que ser ésta, que me debería dar de (12, -3).*

Comprensión de Espacio Generado y Conjunto generador $\mathbb{R}^2$

Y en lo que corresponde al concepto de espacio generado, M1 parece haber recurrido a argumentos que se interpretan desde los modos SG-EG en $\mathbb{R}^2$ y AA-EG en $\mathbb{R}^2$ en la significación de esta noción. M1 utilizó el concepto de combinación lineal para construir conjuntos de combinaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ (espacio y subespacio generado). Esto último se evidenció, cuando a M1 se le solicitó manipular los vectores $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ en *GeoGebra*, donde él podía visualizar diferentes combinaciones lineales, y se le preguntó ¿se puedan generar cuando menos tres diferentes combinaciones lineales con esos vectores?, a lo que M1 responde:

> *M1: Sí.... el simple hecho de que ésta se quede como está es una combinación, si ésta la muevo al origen ya es otra combinación, si la muevo al dato dado ya es otra combinación, y se alteró el resultado. O sea, sí se pueden más...dar más de tres, se pueden dar muchísimas […].*

Y cuando se le solicita precisar cuántas serían esas "*muchísimas*" combinaciones, M1 agrega:

> *M1: Es que como en nuestro plano, los números tienden a infinito positivo e infinito negativo, se le pueden dar combinaciones infinitas […] ahorita no los podría contar y creo que me costaría mucho trabajo terminarlos de contar.*

Y al preguntarle a M1 ¿qué es posible generar con todas las combinaciones lineales de los vectores?, M1 agrega que:

> *M1: Se generaría… se generaría un espacio vectorial.*

Luego, más adelante en la entrevista, el estudiante M1 es cuestionado respecto al espacio generado a partir del conjunto $\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}\right\}$, a lo que M1 comenta:

> *M1: Que son solamente múltiplos de ellos. Todos los vectores que se generen van a tener que ser múltiplos de 3 y de 2. Básicamente… en eso se va a fundamentar todo. Los nuevos vectores van a estar siempre sobre la misma línea, no van a salir de ese campo, … entonces, mientras descubras un vector puedes ir multiplicando a ese una y otra, y otra, y otra y otra, y otra vez, y te van a seguir dando … vectores que se encuentran dentro de este… espacio, se podría decir.*

Sin embargo, se le solicita a M1 aclarar específicamente si el conjunto de vectores $\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}\right\}$, es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$, a lo que M1 responde:

> *M1: Sí son generadores, pero no son generadores en sí de un espacio, hasta donde a mí llega el conocimiento de espacio, o hasta donde lo comprendo, es el decir que pueden generar fuera de ellos, o sea que, dado un lugar… cualquier punto que se asigne en ese lugar va a ser un espa... va a ser un vector que se generó por el trabajo con éstos dos, pero si aquí a mí se me*

> *ocurre marcar que la bolita verde sale acá, éstos dos jamás la habrían podido generar... entonces, ellos son generadores solamente de su espacio, el espacio en el que habitan. Y no sé alguna manera apropiada de llamarlo.*

Además, cuando a M1 se le pregunta ¿el conjunto formado por el vector $\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right\}$, sigue generando a $\mathbb{R}^2$?, él argumenta:

> *M1: Es igual que en el primero que puso, o sea, va a ser que solamente sean múltiplos de este vector, entonces solamente va a reproducir otros vectores que estén igual que él, o sea que estén justo en la misma zona que él está, no puede abarcar toda la zona por completo, por así decirlo.*

Sumado a lo anterior, M1 responde de la siguiente manera a la pregunta sobre si ¿existe una diferencia entre el espacio generado por estos dos conjuntos $\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}\right\}$ y $\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right\}$?

> *M1: Mmm, no… va a ser el mismo, […] como éstos dos son múltiplos y éste va a seguir siendo múltiplo, cualquier punto que queramos generar con cualquiera de los dos va a ser posible. Obviamente siempre y cuando esté dentro de este rango.*

Ahora, el estudiante M1 reflexiona posicionado en el modo AE-B de $\mathbb{R}^2$, sobre las posibles consecuencias de fundamentar sus deducciones exclusivamente desde un solo modo de pensar. M1 argumenta que un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^2$ con un par de vectores es generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y también él logra aceptar que el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ también puede ser generado por un conjunto de tres vectores, como se verifica en los siguientes extractos.

La entrevistadora (E) anota en una hoja el conjunto de vectores $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ y le pregunta a M1 si ¿hay algún vector de $\mathbb{R}^2$ que no pueda se generado por ese conjunto?

> *M1: Hummm... no que yo lo haya podido encontrar, como los vectores son linealmente independientes, tanto el vector "u" como el vector "v", se… teóricamente, se deberían de poder crear todos los vectores en… pertenecientes al espacio en el que ellos están.*

Y dado que menciona la "*independencia lineal*", se le plantea a M1 el análisis del nuevo conjunto $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$. Su argumento, al preguntar si ¿este nuevo conjunto puede generar el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$? son:

> *M1: Hummm... el mismo espacio vectorial que el primero sería muy difícil que lo lográramos volver a crear porque se supone que este espacio vectorial debe de ser completamente diferente a éste, […] pero también existe una parte en Álgebra que dice que, por ejemplo R^2, el espacio vectorial R^2, donde entra éste, puede llegar a tener 3, pero no puede tener uno… solamente, solamente un vector, mínimo deben ser dos para poder generar el espacio, o sea, que este espacio no se vería alterado, no importa hacia donde yo mueva el cursor, y hacia donde yo ponga la bolita va a seguir siendo el mismo espacio que generan el conjunto formado por estos tres vectores.*

A partir de esta respuesta y con el objetivo de ahondar sobre lo que para el estudiante M1 es un conjunto generador para el espacio $\mathbb{R}^2$, la entrevistadora le pregunta:

> *E: Quiero entender exactamente eso que me acabas de decir, te voy a hacer otra pregunta. ¿Quiere decir… si tengo nada más éste... nada más el vector (1,2), puedo generar a $\mathbb{R}^2$?*
> *M1: No. Teniendo solamente un vector no podría generar a $\mathbb{R}^2$*
> *E: Si tengo estos dos [señalo (1,2) y (-1,1)], ¿puedo generar a $\mathbb{R}^2$?*
> *M1: Sí*
> *E: ¿Sí?, Y teniendo los tres [(1,2), (-1,1), y (1,0)]…*
> *M1: También*

Hasta ahora, M1 ha analizado varios subconjuntos de vectores de $\mathbb{R}^2$ y logra concluir que, aun cuando el conjunto analizado es linealmente dependiente, los vectores del conjunto podrían generar el espacio vectorial o algún subespacio vectorial "en el que habitan". Esto último, según el Cuadro 1, indica que M1 ha articulado los modos SG-CG en $\mathbb{R}^2$ y AE-CG en $\mathbb{R}^2$, y como resultado de esto, M1 muestra haber advertido las características esenciales (necesarias y suficientes) del concepto de conjunto generador para $\mathbb{R}^2$, y reconoce la no esencialidad del supuesto de independencia lineal, para que un conjunto de vectores sea generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ o de algún subespacio de él.

En particular, en el episodio de la entrevista donde M1 expreso que "*existe una parte en Álgebra*" donde se establece un número mínimo de vectores para los conjuntos generadores, es una evidencia que M1 ha verificado su convicción inicial, para poder llegar finalmente a considerar que el conjunto $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ sí es generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

En suma, de acuerdo al Cuadro 1 el estudiante M1 muestra un trabajo situado en los modos SG-CG en $\mathbb{R}^2$ y AE- CG en $\mathbb{R}^2$, así como también una relación entre un conjunto de vectores y las combinaciones lineales generadas con ese conjunto, es decir, mediante la articulación de los modos SG-CG en $\mathbb{R}^2$ y AE-CG en $\mathbb{R}^2$, M1 distinguió diferentes subconjuntos de vectores de $\mathbb{R}^2$ linealmente dependientes o independientes, que generan o no generan a $\mathbb{R}^2$, o a un subespacio vectorial de él, lo que permite mostrar evidencias de la operación mental de generalización.

Por otra parte, respecto al concepto de independencia lineal, en la evidencia obtenida aparece como dominante una tendencia a fundamentar las inferencias en el modo SG-LI en $\mathbb{R}^2$. M1 atribuye la independencia lineal a vectores que no son paralelos, como lo declara en el episodio que sigue:

> *E: […] ¿este conjunto de vectores* $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ *es linealmente independiente?*
> *M1: Ahhh… como conjunto sí, sí son linealmente independientes.*
> *E: Ajá… y ¿qué entiendes por linealmente independiente, o cómo lo puedes justificar?*
> *M1: Linealmente independiente es que no van a ser paralelos, que debe de haber un punto en el que se puedan cruzar, eso es lo que los hace linealmente independientes porque nos lleva a una solución del problema, una solución de las incógnitas. Los primeros dos se… se cruzan en el 1, digo en el cero, ehh siempre pasan por el origen; el segundo, al tener una de sus componentes en cero forzosamente tiene que pasar por el origen, eso lo fuerza a que tenga que cruzarse con los demás; por lo tanto, va a generar junto con ellos y es… y son linealmente independientes cada uno de ellos.*

A pesar de que, en episodios anteriores, M1 había indicado que "un par de vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$ deberían poder crear (generar) a todos los vectores pertenecientes al espacio en el que ellos están", al parecer M1 considera que así sucede, porque para él en los conjuntos linealmente independientes hay "un punto en el que [los vectores] se pueden cruzar". M1 justifica la independencia lineal desde una percepción visual, lo cual no le permite advertir que un conjunto de tres vectores de $\mathbb{R}^2$ es siempre linealmente dependiente, porque siempre uno de los vectores puede expresarse como combinación lineal de los otros dos.

La situación arriba expuesta coincide con los resultados de la investigación de Aranda y Callejo (2010), quienes advierten sobre las dificultades en la aproximación geométrica para la construcción del concepto de dependencia lineal, y afirman que para ese fin es necesaria la coordinación entre distintos sistemas semióticos y la conciencia reflexiva sobre la actividad matemática llevada a cabo.

Comprensión de Base en $\mathbb{R}^2$

En relación a la noción de Base para el espacio $\mathbb{R}^2$, ésta no parece haber sido construida como un sistema, ya que M1 manifiesta que conjuntos generadores de dos o más vectores son una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. M1 justifica lo anterior basándose su argumento en el modo AE-B de $\mathbb{R}^2$, esto es, que un conjunto con un solo vector no puede generar al espacio vectorial, pero que un conjunto formado por dos vectores de $\mathbb{R}^2$, a pesar de ser linealmente dependiente, sigue siendo una Base para $\mathbb{R}^2$:

> *E: Si pensamos en una base para el espacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, de estos cuatro diferentes conjuntos, ¿si?, el conjunto {(1,2), (-1,1)}, el conjunto {(1,2), (-1,1), (1,0)}, y el conjunto {(-1,3), (2,-6)} y el {(-1,3)}. De estos cuatro conjuntos, ¿cuál dirías tú que es una base del espacio $\mathbb{R}^2$?*
> *M1: Bases para el espacio $\mathbb{R}^2$serían ésta… ésta… y ésta [señala los conjuntos {(1,2), (-1,1)}, {(1,2), (-1,1), (1,0)} y {(-1,3), (2,-6)}], porque están generando un espacio en $\mathbb{R}^2$. Ésta no puede, [indica a {(-1,3)}] porque al ser una sola, el esp…. eh… está contenida dentro del espacio $\mathbb{R}^2$; pero ella no la puede generar, es decir, ella no puede genera al $\mathbb{R}^2$, pero $\mathbb{R}^2$sí la contiene a ella.*

Respuesta que la entrevistadora le solicita justificar, tomando en cuenta que el conjunto $\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}\right\}$ no es generador de todo el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$:

> *E: Hace un momentito me decías "éstos que son múltiplos y pueden generar solamente los que están aquí". ¿De todas formas éste conjunto sigue siendo una base a pesar de no poder generar el que está aquí?*
> *[le muestro en la pantalla un vector de $\mathbb{R}^2$ que no es múltiplo de (-1,3)]*
> *M1: Sí sigue siendo base porque sigue estando dentro de $\mathbb{R}^2$, pero si me piden una base independiente, o sea, si me piden que encuentre bases con… bases independientes… nada más voy a señalar las dos primeras; como aquí nada más se pidió quiénes generan al espacio $\mathbb{R}^2$, esas tres son las que generan al espacio, independientemente si una es múltiplo de la otra o si son independientes o dependientes, o sea, terminan generando al espacio $\mathbb{R}^2$, son valores que están dentro de $\mathbb{R}^2$.*

De acuerdo a este último argumento, M1 no parece evaluar las consecuencias de aceptar que un conjunto generador y linealmente dependiente con un par de vectores de $\mathbb{R}^2$ es una Base, siendo que esta situación representa una contradicción a las deducciones realizadas sobre el concepto de conjunto generador de un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Por este motivo, se considera que el estudiante M1 muestra evidencias de un pensamiento más práctico que teórico, respecto al concepto de Base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

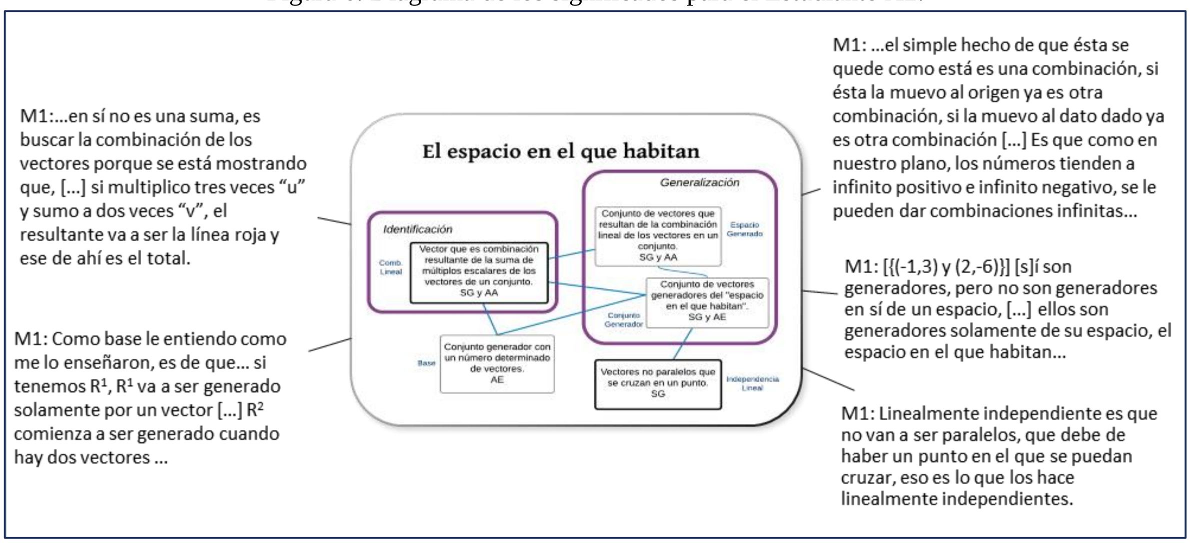
Con estas evidencias, se confirman los hallazgos obtenidos en la investigación de Kú, Trigueros y Oktaç (2008), en relación a que la construcción del concepto de Base de un espacio vectorial en los estudiantes, no puede llevarse a cabo sin la coordinación de los conceptos de independencia lineal y conjunto generador. No obstante, de acuerdo a la evidencia aquí obtenida para M1, se ha logrado constatar que las dificultades documentadas en relación al concepto de *conjunto generador*, pueden verse superadas si se articulan distintos modos de pensamiento

(Cuadro 1) para percibir las relaciones que caracterizan a los conceptos dispuestos los modos SG-CG/EG, AA-CG/EG y AE-CG/EG en la generalización del concepto de conjunto generador.

Comprensión del sistema Conceptual de Base para $\mathbb{R}^2$

El diagrama de la Figura 6, resume la interpretación del proceso de comprensión del estudiante M1 en forma de diagrama[1] de conceptos que organizan los modos de pensamiento, las operaciones de comprensión y los significados de los conceptos que el estudiante refiere respecto a los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, independencia lineal y Base. Así mismo, en esta Figura 6 se puede observar la evidencia de algunos extractos en los que se aprecia la construcción de los conceptos del sistema. Se han marcado líneas en azul, para unir los conceptos que el estudiante relacionó.

Figura 6. Diagrama de los significados para el Estudiante A2.



Fuente: Elaboración Propia

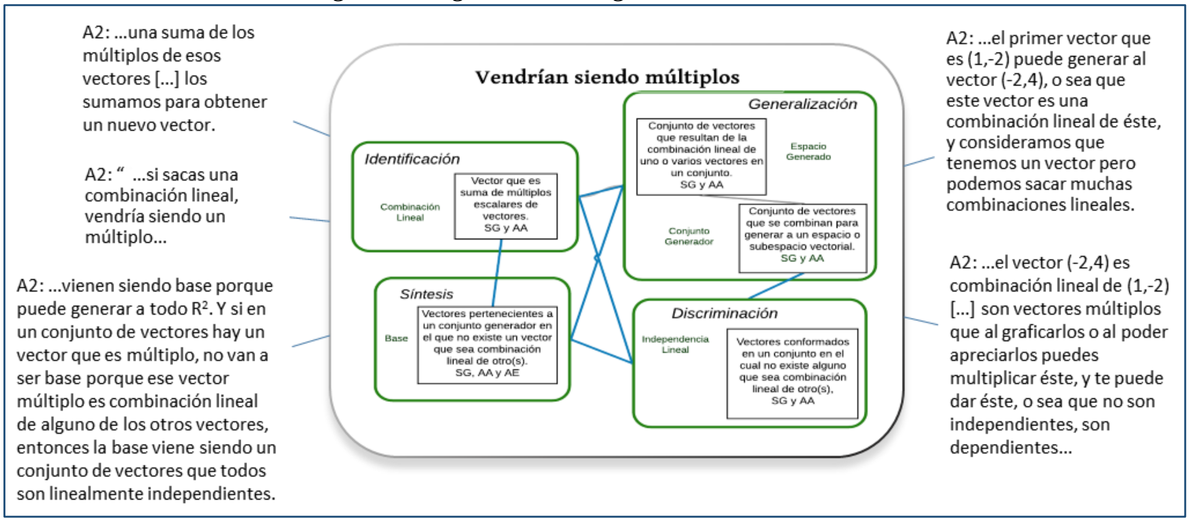
A continuación, se describen las relaciones en la configuración de los significados de los conceptos y los modos de pensamiento que se identificaron para los estudiantes A2 y M2, que son quienes alcanzaron la síntesis del sistema conceptual que conduce a la comprensión de la noción de Base para $\mathbb{R}^2$.

Con respecto a la pregunta ¿qué representa para ti la combinación lineal de $\mathbb{R}^2$ desde una perspectiva geométrica? (SG-CL de $\mathbb{R}^2$), los estudiantes A2 y M2 mostraron en sus respuestas haber reconocido mediante los modos de pensamiento SG-CL y AA-CL, las características de un vector que resulta de sumar "*un cierto número de veces*" los vectores en un conjunto (que es

[1] El título del diagrama es un epígrafe o frase que evoca una de las ideas en la entrevista al estudiante.

múltiplo de un vector), es decir, se identifica el concepto de combinación lineal, como lo muestra la Figura 7 para A2.

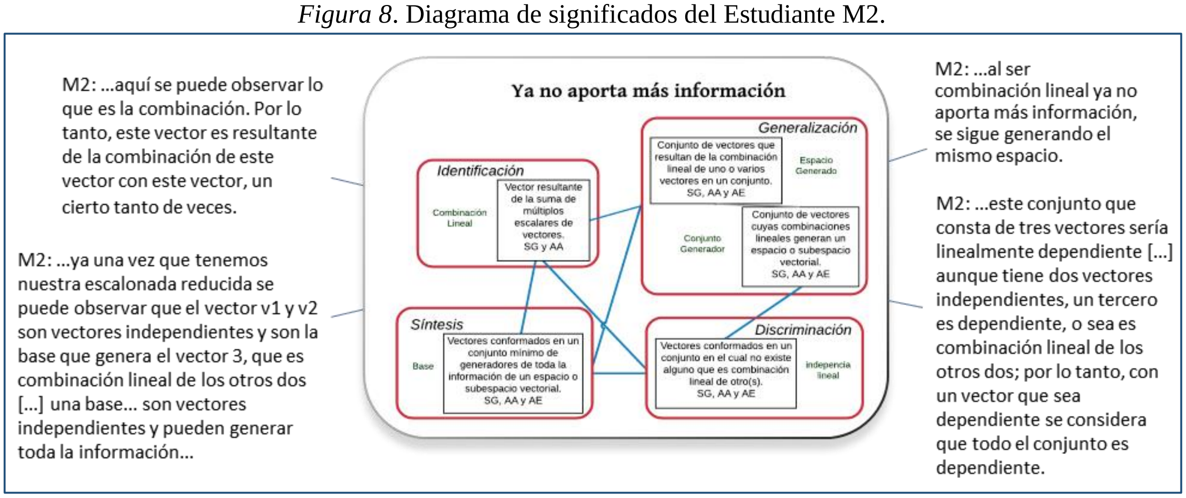
Figura 7. Diagrama de los significados del Estudiante



A2 Fuente: Elaboración Propia

De hecho, la idea de combinación lineal estuvo presente en los argumentos recabados de A2 y M2 para cada una de las nociones en el sistema conceptual, y por esta razón en el diagrama de significados de A2 y M2, se han marcado todas las líneas (en azul) de relación entre el concepto de combinación lineal y el resto de las nociones del sistema conceptual (Figuras 7 y 8).

Figura 8. Diagrama de significados del Estudiante M2.



Fuente: Elaboración Propia

También en las Figuras 7 y 8, se puede observar evidencia de algunos episodios en los que se aprecia que la comprensión sobre los conceptos del sistema de Base en $\mathbb{R}^2$, siempre se relaciona con la noción de combinación lineal en $\mathbb{R}^2$.

Espacio Generado en la síntesis del sistema Conceptual

Luego de reconocer la noción de combinación lineal, los estudiantes A2 y M2 lograron advertir diferentes combinaciones lineales generadas por un vector o por varios vectores de algunos conjuntos de $\mathbb{R}^2$ (espacio y subespacio generado), realizando actos de discriminación principalmente en el modo SG-EG de $\mathbb{R}^2$. En el Cuadro 4, se organizan algunos episodios de texto, extraídos de la matriz de significados de estos estudiantes y que fue proporcionada por el programa *atlas.ti*, a través del cual se examinó qué decían del concepto (el sentido) y sobre qué (el referente).

Cuadro 4: Espacio generado en la síntesis del sistema conceptual de A2 y M2

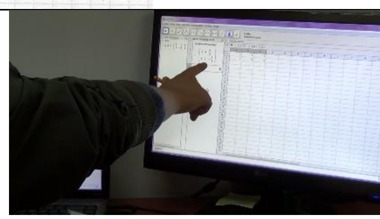
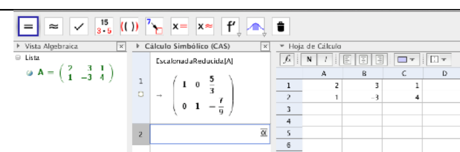
<table>
<tr><td>Espacio generado</td><td rowspan="2">A2: ...dependiendo por el... por el escalar o por el número que lo multipliques, lo puedes graficar y... y gráficamente puedes ver posicionado el vector (1,-2), y si sacas combinaciones lineales de ese, vendrían siendo múltiplos de esos vectores que te va a salir, que van ser sobre el mismo vector. […] Se generaría una recta, gráficamente se puede apreciar una recta.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">En estas citas de los estudiantes A2 y M2, se advierte la importancia del trabajo con combinaciones lineales en el contexto gráfico-algebraico del Geogebra, para identificar que al “generar”, no solo se construyen vectores aislados, sino que es una variación continua, lo que ha permitido desarrollar la intuición necesaria para reconocer la relación entre diferentes conjuntos de vectores y el espacio o subespacio que generan.</td></tr>
<tr><td>A2: ...en este caso, los vectores se forman de diferentes posiciones y al poner varios puntos, como no son múltiplos, se pueden representar en... el punto puede aparecer en diferentes posiciones lo que quiere decir que... estos vectores no son múltiplos y por ello pueden generar a cualquier vector...a todo el plano.</td></tr>
<tr><td>M2: …si yo tomo solamente uno de los dos vectores, pues entonces estoy generando simplemente una recta, no estoy generando a todo el plano.</td></tr>
<tr><td>M2: …aquí se puede observar que este segundo vector es combinación lineal del primero [(1,-2) y (-2,4)]… Entonces, si yo trazo eso en un plano, simplemente es una recta. Lo que me está diciendo aquí es hacia… que la recta se me haga más larga o se crezca su magnitud o se reduzca, de acuerdo a los múltiplos. Pero en sí sigue aportando la misma información, se sigue trabajando sobre la misma recta.</td></tr>
</table>

Fuente: Datos de la Investigación

Independencia Lineal en la síntesis del sistema Conceptual

Aunque la noción de conjunto generador fue intuitivamente revelada por A2 y M2 en el modo SG-CG $\mathbb{R}^2$, es principalmente a partir de este trabajo realizado en el modo AA-LI, que ellos identifican las características de independencia o dependencia lineal en $\mathbb{R}^2$, a través de la solución de un sistema de ecuaciones, como se muestra en el Cuadro 5.

Cuadro 5: Independencia/dependencia lineal en la síntesis del sistema conceptual de A2 y M2

<table>
<tr>
<td>*Independencia lineal*</td>
<td>E: ¿Por qué crees que [el conjunto [{(1,2), (-1,1), (1,-3)}] es linealmente dependiente?
A2: Al reducir […] aquí [señala la última columna de la matriz que se forma con los 3 vectores] puede tener cualquier número, […] este vector sería una combinación de los 2 reducidos.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="7">Como se puede apreciar en estos episodios, los procedimientos en el modo AA-LI (solución del sistema de ecuaciones), fueron utilizados por los estudiantes para justificar si por lo menos un vector del conjunto era combinación lineal de los demás.
Cabe mencionar, que ambos estudiantes tuvieron errores mientras realizaban los cálculos para resolver el sistema. De hecho, el estudiante M2 se da cuenta del error y utiliza el *GeoGebra* para corroborar sus conclusiones.
Aunque el referente del concepto parece no haber sido percibido por los estudiantes A2 y M2, cuando señalan en diferentes episodios que se trata de una característica referida a vectores por separado y no a conjuntos de vectores, un examen más preciso de sus deducciones ha llevado a la conclusión de que se trata de un asunto relacionado con el vocabulario empleado, pero que en realidad si se ha profundizado en el significado del concepto.</td>
<td>A2: … como la matriz que se forma con estos tres vectores no sería cuadrada no podemos sacar el determinante, entonces al reducir podemos comprobar si su matriz va a ser escalonada […]
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} F_1(-2)+F_2$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} F_2(1/3)$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5/3 \end{bmatrix} F_2(1)+F_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & -1/5 \end{bmatrix}$
[…] con el de Gauss-Jordan estoy sacando así como la forma reducida de… los múltiplos para ver si éste se puede formar con estos dos vectores, [y] mediante esto puedes saber que una vez el primer vector, digo 4/5 del primer vector mmm… y menos 1/5 del segundo vector generan este vector. […] Este… es un conjunto de vectores linealmente dependiente.</td>
</tr>
<tr>
<td>A2: Es linealmente dependiente, el (1,-2) y (-2,4) y eso es debido a que este vector, es igual que este vector, solo que lo multiplicaste por un número.</td>
</tr>
<tr>
<td>A2: …una forma en la que podemos conocer si son múltiplos o si no son múltiplos, es mediante el determinante, siempre y cuando la matriz sea cuadrada, si era …. bueno voy a hacer aquí el determinante
$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\det=(1)-(-2)=3$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\right\}$ $\det=(4)-(4)=0$
[…] El resultado 3 quiere decir… que estos vectores no son múltiplos…pero… si el determinante te da cero, quiere decir que son múltiplos y si no te da cero como éste quiere decir que no van a ser múltiplos y si, tienen razón porque al hacer este determinante, como son múltiplos, al multiplicar cruzadamente te va a dar el mismo número, pero en negativo y se va a hacer cero…</td>
</tr>
<tr>
<td>M2: … ya una vez que tenemos nuestra escalonada reducida se puede observar que el vector v1 y v2 son vectores independientes y son la base que genera al tercer vector, que es combinación lineal de los otros dos.
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 16/3 \\ 0 & 1 & -4/6 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td> 
M2: …este vector nos está diciendo que son 5/3 del primer… del primer vector, menos 7/9 del segundo vector, nos genera al tercer vector que es el vector (1,4).</td>
</tr>
<tr>
<td>M2: …este conjunto que consta de tres vectores sería linealmente dependiente […] aunque tiene dos vectores independientes, un tercero es dependiente, o sea es combinación lineal de los otros dos; por lo tanto, con un vector que sea dependiente se considera que todo el conjunto es dependiente.
base en R^2 $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}\right\}$ independiente $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\right\}$ dependiente
base en R^2 (recta) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\}$ independiente $-2\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$
$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right\}$ dependiente</td>
</tr>
</table>

Fuente: Datos de la Investigación

Conjunto Generador en la síntesis del sistema Conceptual

En particular, en el Cuadro 6 se destacan dos inferencias, en el primer y último episodio de el, donde A2 y M2 señalan haber advertido cuál es la relación entre un conjunto de vectores linealmente dependiente y el espacio o subespacio que se genera con este conjunto. Ambos estudiantes especifican que, si un conjunto contiene algún vector que es combinación lineal de otro, o de los otros en el conjunto, entonces ese vector ya está incluido en el espacio vectorial generado por el conjunto.

Cuadro 6: Conjunto generador en la síntesis del sistema conceptual de A2 y M2

Conjunto generador	A2: ...mediante determinante sacamos que son dependientes […] el primer vector que es (1,-2) puede generar al vector (-2,4), o sea que este vector es una combinación lineal de éste, y consideramos que tenemos un vector, pero podemos sacar muchas combinaciones lineales.
Se considera que estos extractos contienen deducciones respecto al concepto de conjunto generador que podrían haber sido clave para la comprensión de la noción de base. Los estudiantes A2 y M2, recurren a los modos SG-CG y AA-CG (y AE-CG en el caso de M2) para establecer las características de conjuntos de vectores que generan al espacio $\mathbb{R}^2$ o a un determinado subespacio.	A2: …el primer conjunto de vectores [{(1,2), (-1,1)}]…, como no son múltiplos, como ya lo vimos gráficamente, pueden generar cualquier otro vector en cualquier posición. En este caso [el conjunto {(1,2), (-1,1), (1,-3)}] sí generan a $\mathbb{R}^2$, pero tienes un vector que es combinación de los otros dos vectores…
	M2: … se puede generar todo el plano porque son dos vectores totalmente independientes entre sí. Y por lo tanto, la ley nos dice que... que mientras dos vectores en $\mathbb{R}^2$ sean totalmente independientes entre sí, entonces se puede generar todo el plano $\mathbb{R}^2$, o sea este vector puede estar en todo el plano dependiendo de la combinación lineal que se haga, porque son independientes este vector, de éste.
	E: ¿Qué se puede generar a partir de ese conjunto con tres vectores de $\mathbb{R}^2$? M2: Pues se puede generar, dependiendo de los vectores que sean, se puede generar un plano, una recta, que es lo más…
	M2: ...seguimos con las leyes de Álgebra. Al tener tres vectores, y suponiendo que sean independientes, uno de los tres tiene que ser dependiente de alguno de los otros dos o de los dos, […] como estamos generando dos dimensiones… entonces … un tercero, un tercer vector dentro de esas dos dimensiones, nos generaría la información que ya está dada por estos dos vectores […] al ser combinación lineal ya no aporta más información, se sigue generando el mismo espacio […] que en este caso sería el … el … todo el $\mathbb{R}^2$.

Fuente: Datos de la Investigación

Lo relevante del Cuadro 6, es que la evidencia ha manifiesto que cuando el estudiante identifica que si un vector del conjunto ya está incluido en el espacio generado, es porque es combinación lineal de otro o de otros vectores del conjunto, y que junto a un análisis de la definición del concepto de Base (AE-B de $\mathbb{R}^2$), el estudiante puede llegar a interpretar la Base como un *conjunto generador de un determinado espacio con un número mínimo de vectores posibles*, que es como M2 lo ha establecido; o bien, como A2 lo evidenció, esto es, que puede pensar en un conjunto generador de un espacio vectorial en el cual *no existe un vector que sea* *combinación lineal de otro(s),* es decir, un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^2$ con un número máximo de vectores.

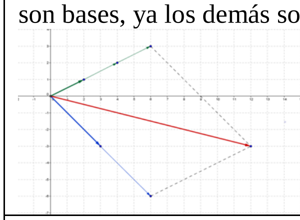
Base en la síntesis del sistema Conceptual

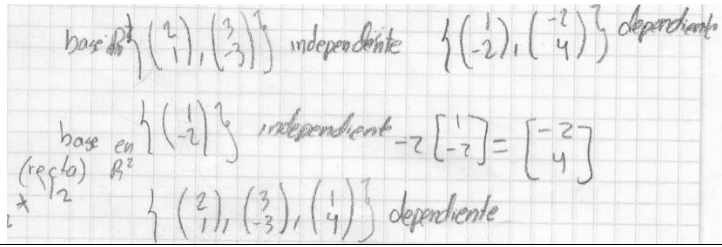
Las conjeturas para el concepto de Base para $\mathbb{R}^2$ realizadas por los estudiantes A2 y M2, fue posible explicitarlas al analizar los episodios que se muestran en el Cuadro 7.

Cuadro 7: Base en la síntesis del sistema conceptual de A2 y M2

<table>
<tr><td>Base</td><td>A2: …si en un conjunto de vectores hay un vector que es múltiplo, no van a ser base porque ese vector múltiplo es combinación lineal de alguno de los otros vectores, entonces la base viene siendo un conjunto de vectores que todos son linealmente independientes.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">A partir de las citas de A2 presentadas en esta tabla, se percibe que en este estudiante prevalece la tendencia a verificar si un conjunto de vectores es base de un espacio o subespacio vectorial, al analizar si en el conjunto existe algún vector que sea combinación lineal de otro(s) (ver episodios de A2).

Por otra parte, en las inferencias del estudiante M2, se aprecia que al tomar decisiones acerca de si un conjunto es base, se enfoca en verificar si se tienen los vectores mínimos necesarios para generar “la información” del espacio, y descarta de la base a los vectores que “son redundantes”, que “ya no aportan información distinta” (ver extractos de M2).

Desde luego, para que el análisis de A2 y M2 sobre los conjuntos y su relación con el espacio que generan condujeran a la significación del concepto de base, antes ya se tenía:
-Una idea intuitiva del espacio que se podía construir con ellos, y que se obtuvo al discriminar los conceptos de combinación lineal y espacio generador, en su interacción en</td><td>A2: La base es el conjunto de vectores que están linealmente independientes, o sea, que pueden generar a todo $\mathbb{R}^2$ o a $\mathbb{R}^3$, dependiendo al rango que pertenezcan los vectores. En este caso sería el primer vector, el primer conjunto de vectores [{(1,2), (-1,1)}] debido a que, como no son múltiplos, como ya lo vimos gráficamente, que pueden generar cualquier… cualquier otro vector en cualquier posición.</td></tr>
<tr><td>A2: En este caso [el conjunto {(1,2), (-1,1), (1,-3)}] sí generan a $\mathbb{R}^2$ pero tienes un vector que es combinación de los otros dos vectores […] creo que, que estos 2 vendrían siendo la base [los dos primeros vectores], pero éste no porque por lo mismo, porque este viene siendo combinación de estos 2.</td></tr>
<tr><td>A2: El vector (1,-2) es una base, es la base para la recta. En éste… el vector (-2,4) es combinación lineal del (1,-2), no puedes decir que son base porque son… pertenecen… son vectores múltiplos que al graficarlos o al poder apreciarlos puedes multiplicar éste y te puede dar éste, o sea, que no son independientes, son dependientes…</td></tr>
<tr><td>M2: A eso es a lo que conocemos como base. Una base es… es aquel vector en el que… en el que no es… son vectores independientes y pueden generar toda la información, […] por ejemplo, aquí se puede observar [{(1,-2), (-2,4)}] que este segundo vector es combinación lineal del primero, ya lo comprobamos. Entonces, si yo trazo eso en un plano simplemente es una recta. Lo que me está diciendo aquí es hacia… que la recta se me haga más larga o se crezca su magnitud o se reduzca, de acuerdo a los múltiplos. […] se le llama que son vectores redundantes porque ya no aporta información distinta a la que ya se conoce, sino que sigue siendo la misma durante la misma trayectoria del vector simplemente lo hace más largo o más corto.</td></tr>
<tr><td>M2: …son 5 vectores que generan un espacio dentro de un plano. De los primeros dos vectores, que son los que están más marcados, son… los que son bases, ya los demás son combinación lineal de estos vectores.
</td></tr>
<tr><td>M2: Este sería una base en $\mathbb{R}^2$ y este igual sería una base en $\mathbb{R}^2$ [se refiere a los conjuntos {(2,1), (3,-3)} y {(1,-2)}, respectivamente]. Igual se puede considerar que éstas son unas bases, son quienes generan la información dentro del plano y ya simplemente dos de los vectores generan… cada uno de los vectores pues tienen base en $\mathbb{R}^2$.
E: Pero hace un momentito me decías que este no generaba a todo $\mathbb{R}^2$ [me refiero al conjunto {(1,-2)}].</td></tr>
</table>

el entorno gráfico-algebraico del *Geogebra* (Cuadro 4), y -Se había logrado distinguir, mediante síntesis de los conceptos independencia lineal y conjunto generador, distintos casos en los que conjuntos de vectores eran generadores de un determinado espacio o subespacio vectorial (Cuadros 5 y 6).	M2: No, una base dentro del… sería un subconjunto. E: ¿cuál es el subconjunto? M2: Una recta. 
	M2: …una base por sí sola genera una recta, si tenemos dos bases dependiendo del espacio, por ejemplo, si estamos hablando de $\mathbb{R}^2$ ya nos genera un plano, o sea, ya nos está… está generando un espacio vectorial, al decir que es plano en $\mathbb{R}^3$ sería igual. Una base tendría que ser tres vectores para poder generar todo el espacio $\mathbb{R}^3$.

Fuente: Datos de la Investigación

Al haber destacado las características esenciales de conjuntos generadores para construir el espacio vectorial o algún subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, los estudiantes A2 y M2 analizaron de forma distinta la definición de Base y llegaron a las conclusiones que se aprecian en el Cuadro 7 y con ello, a la comprensión de la noción de Base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

Ambos estudiantes A2 y M2, han comprendido el concepto de Base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ en un proceso que se inicia al identificar en los modos de pensamiento SG-CL de $\mathbb{R}^2$ y AA-CL de $\mathbb{R}^2$, un vector que es combinación lineal de los vectores de un conjunto y asociar esa idea para discriminar entre distintos conjuntos de combinaciones que era posible construir con ese conjunto, principalmente el modo SG-EG $\mathbb{R}^2$ (Cuadro 4). Luego A2 y M2 reflexionan respecto a las características particulares de los conjuntos generadores de dichas combinaciones, en los modos AA-LI $\mathbb{R}^2$, SG-CG y AA-CG (Cuadros 5 y 6), para finalmente, como se estableció en el Cuadro 7, a través de la articulación de los modos SG-B de $\mathbb{R}^2$, AA-B de $\mathbb{R}^2$ y AE-B de $\mathbb{R}^2$ poder destacar las características de conjuntos de vectores que son al mismo tiempo generadores y linealmente independientes.

Interpretación del proceso de comprensión conceptual de Base para $\mathbb{R}^2$

Con el fin de destacar el proceso que siguen los estudiantes para alcanzar determinado nivel de abstracción de las nociones que subyacen alrededor del concepto de Base para $\mathbb{R}^2$, se presenta una síntesis interpretativa que integra los hallazgos obtenidos en el análisis de los datos. Para esto, se consideran las distintas operaciones mentales que fue posible llevar a cabo por los participantes, en relación con algunas inferencias realizadas en los diferentes modos de pensamiento de Base para $\mathbb{R}^2$ o su articulación.

Desde los entrevistados, la forma de describir las nociones en sintonía con los modos de pensamiento sintético y analítico, tuvo implicaciones directas en relación con los conceptos del sistema conceptual previo que los estudiantes participantes pudieron reconocer.

Los objetos matemáticos utilizados en la actividad de exploración para ayudar a los estudiantes a captar el modo SG-B para $\mathbb{R}^2$, se relacionan con las representaciones en el ambiente de geometría dinámica del *GeoGebra*, y se esperaba que este contexto influyera en las inferencias sobre el significado de los conceptos del Cuadro 1 que los estudiantes pudieran mostrar, y así fue. Al analizar los argumentos de los estudiantes A2 y M2, que son quienes lograron sintetizar los conceptos del sistema, sus interpretaciones parecen haber tenido origen en dos factores conjugados –uno de los cuales está ligado directamente con la naturaleza de los objetos matemáticos representados en el *GeoGebra*–. A2 y M2 manifestaron, a diferencia del resto de los participantes, (1) advertir la variabilidad inherente asociada a la noción de espacio generado que se pretendida en el diseño de la actividad experimental, y (2) relacionar el concepto de combinación lineal con cada una de las nociones en el sistema conceptual.

De la revisión respecto a las ideas claves con las que los estudiantes A2 y M2 relacionaron los conceptos del sistema, se verificó que lo que permitió a estos estudiantes advertir que no existe una única manera de generar al espacio o algún subespacio de $\mathbb{R}^2$, y a partir de esto, llegar a considerar el análisis de la relación de los conjuntos con el espacio que generan, para dar significado al concepto de Base para $\mathbb{R}^2$, fue que percibieron, en su interacción en el entorno gráfico-algebraico del *GeoGebra*, la variabilidad de conjuntos de combinaciones lineales en la construcción del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Esta característica de variación continua de valores relacionada con el concepto de espacio generado, es difícil de transmitir, si sólo se cuenta con la definición del concepto (Modo AE-B de $\mathbb{R}^2$) o con sistemas de ecuaciones y las formas canónicas asociadas (Modo AA-B de $\mathbb{R}^2$). Sin embargo, la naturaleza de los elementos disponibles en el *GeoGebra*, ofrecieron la posibilidad de representar en forma explícita y animada, los posibles múltiplos escalares de combinaciones lineales variables (SG-CL) que generan el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

Esas mismas inferencias, respecto a la relación entre las nociones SG-CL, AA-CL y SG-EG que A2 y M2 realizaron, se aprecian al examinar la evidencia del estudiante M1, quien llegó a la generalización de los conceptos del sistema. Aunque la razón por la cual M1 no alcanzó un nivel de síntesis, es porque no relacionó el concepto de independencia lineal AA-LI con el de combinación lineal AA-CL. Al respecto, y dado que M1 mostró una marcada tendencia al modo SG-B de $\mathbb{R}^2$, se juzga que esta última correspondencia no pudo llevarse a cabo debido a que M1 no verificó la relación entre los vectores del conjunto en el modo AA-B de $\mathbb{R}^2$, y por lo tanto vio limitadas sus posibilidades de abstraer esa idea.

Además, aún y cuando en el diseño de las actividades de exploración de los conceptos, se pensó centrar el foco de atención sobre conjuntos de vectores generadores, con los que era posible obtener un determinado espacio o subespacio de $\mathbb{R}^2$, y en esa labor, también se incluyeron preguntas en el instrumento que invitaron a comparar la relación entre los conjuntos y el espacio construido. De acuerdo al Cuadro 3, los estudiantes B1 y B2 no relacionaron el concepto de combinación AA-CL lineal con el de espacio generado AA-EG, y por esta razón se consideran que ellos desarrollaron un conocimiento limitado (no estructural) de la noción de combinación lineal, que los llevó a tener una idea confusa acerca de las posibles combinaciones lineales que era posible generar con un conjunto de vectores. Por ejemplo, el estudiante B1, argumenta que las resultantes de vectores LD que son múltiplos, también son LD, y que cuando los vectores no son múltiplos, entonces las resultantes tampoco (modo AA-LD). Y en el modo SG-EG, no logra identificar la acción de generar una variación continua de combinaciones lineales y piensa en el conjunto de puntos limitados gráficamente por un paralelogramo:

> *B1: Pues entre vectores dependientes sería que la resultante se encuentra en la misma... en la misma dirección.*
> *E: ¿En la misma dirección?*
> *B1: […] y entre vectores independientes este la resultante se encuentra en una dirección diferente al... a cada vector y respecto a las combinaciones lineales, pues en común... no, no se me viene nada ahorita*
> *E: Oye, platícame eso de las direcciones…*
> *B1: Sería... que el vector resultante de los vectores independientes, al igual que cada vector es, ehh... son, las componentes no son... múltiplos.*
> *E: ¿Y en el caso de los dependientes?*
> *B1: Este pues si... el vector resultante es... múltiplo de hecho de cada vector.*
> …
> *E: ¿Geométricamente qué se genera con todas las combinaciones lineales [gen{(3,1),(1,-2)}]?...*
> *B1: ...mmm pues, ehhh...lo que se forma es el paralelogramo.*

De forma similar, en los argumentos de B2 el estudiante solo advierte vectores de forma aislada y no como elementos de un espacio o subespacio vectorial:

> *E: ¿Cuántas posibles combinaciones crees que se puedan generar con esos dos vectores?*
> *B2: Pues yo pensaría que infinitas ¿no?… multiplicando por un escalar cada vector, yo pienso que infinitas […]*
> *E: ¿Y con todas esas qué se formaría?*
> *B2: […] los dos vectores se dispararían tanto como de esta manera [mueve un deslizador] y pues la resultante es así por puntos o así de esta manera serian [mueve el otro deslizador] […] dos "x´s" se formaría, o demasiadas… o sea, sí… de esta manera seria como una "x" gigante ¿no?. Se verían tanto los vectores como las resultantes…*
> *E: […] desde tu punto de vista ¿qué se genera?*
> *B2: Para mí, un nuevo vector, que cumple con las condiciones sobre esos dos vectores.*

Cuando la variabilidad utilizada para describir el espacio o subespacio no se percibe, entonces el concepto de espacio generado tampoco se advierte y esto es precisamente lo que se observó en los argumentos de los estudiantes B1 y B2. Ellos no dieron sentido al concepto de espacio generado, porque no lograron la articulación de los modos SG-EG y AA-EG en la actividad de exploración. Por una parte, B1 y B2 distinguieron las combinaciones lineales posibles a partir de un conjunto de vectores, como resultados aislados y las describieron como resultantes que cumplen *ciertas condiciones* obtenidas a partir de vectores sobre su mismo eje o sobre posiciones distintas; o en el caso de B1 como los puntos limitados gráficamente por un paralelogramo. Por otra parte, el abordaje procedimental (modo AA-CL) predominante en las interpretaciones del estudiante A1, parece haber influido más que la revisión de las propiedades de los objetos matemáticos analizados con el uso del *GeoGebra*. Aunque A1 advirtió en el modo SG-EG el espacio o subespacio vectorial generado por combinación lineal de conjuntos de uno o dos vectores de $\mathbb{R}^2$, puso en duda sus argumentos en este plano y mantuvo una inclinación en sustentar sus conceptualizaciones en la algoritmia, sin tener una idea clara del significado de las expresiones.

> *E: ¿Se podría decir que es el conjunto {(2,1), (3,-3), (-1,3)} linealmente independiente?*
> *A1: En este caso… podríamos verlo, ¿no? por partes, por ejemplo, sacar determinante entre esos dos y si en algunos ya el determinante nos dio diferente de cero, podríamos decir que si es linealmente independiente…*
> *E: ¿Crees que [{(2,1), (3,-3), (-1,3)}] genera a todo $\mathbb{R}^2$?*
> *A1: A todo $\mathbb{R}^2$, no. […]*
> *E: ¿Por qué no lo generan?*
> *A1: Por... bueno... eh bueno… llegando a lo de las bases, entonces, aquí no ... no sería una matriz aumentada cuadrada, entonces no sería. Serían dependientes o independientes, pero… o serían generador; sería generador, pero tal vez sean dependientes entre ellos.*
> *…*
> *A1: Bueno, de lo que me acuerdo para las bases, eh, el conjunto de vectores tenía que ser independiente y generadores, bueno y ya con la determinante veíamos si era generador y ... independiente también.*

La falta de reflexión sobre la relación de las combinaciones lineales y el correspondiente espacio generado, junto con la inadecuada caracterización de las nociones en los modos SG-B y AA-B de $\mathbb{R}^2$, apuntan a interpretar la comprensión de Base para $\mathbb{R}^2$ en los estudiantes A1, B1 y B2 a través de un pensamiento más práctico que teórico, porque estos estudiantes al aproximarse a la noción de Base, no perciben el potencial de los conjuntos de vectores que conforman el espacio generado, entonces la herramienta computacional utilizada dejó de existir como agente de construcción conceptual, y se convirtió en un obstáculo potencial a los ojos (o mente) de esos estudiantes. De hecho, algunas relaciones también son difícilmente visibles al realizar una aproximación intuitiva con el uso del *GeoGebra*, como la que vincula las combinaciones lineales de tres vectores de $\mathbb{R}^2$ con su posible espacio generado.

Aunque la secuencia de actividades con el uso del *GeoGebra*, pretendía proveer una idea dinámica de representar conjuntos de vectores generadores para analizar los conceptos de combinación lineal, espacio generado e independencia lineal, no todas las relaciones resultaron claras en principio. La mediación del instrumento se mostró eficaz para dar sentido a los modos de los conceptos de combinación lineal y de espacio generado, y se puede decir, que la descripción de los objetos matemáticos y su relación con espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ representada en el programa, pudo proveer los fundamentos para la comprensión de la noción de base en $\mathbb{R}^2$.

Sin embargo, aunque la observación intencionada en la actividad de exploración es crucial para la significación de los conceptos del sistema, no resulta suficiente, pues la abstracción del concepto de independencia/dependencia lineal, solo pudo advertirse al reconocer la relación entre los vectores del conjunto generador en el modo AA-LI y en el modo AA-CG.

Por ello, resulta razonable afirmar, como se mencionó anteriormente, que un factor indispensable para llegar a sintetizar el sistema que conduce a la comprensión de la noción de Base, es relacionar los modos de pensar la combinación lineal con cada uno de los conceptos del sistema conceptual.

En los argumentos de los estudiantes A2 y M2, se advierte que una vez que utilizan el modo AA-LI de un conjunto, a fin de ligar el concepto de Base, recurren de nuevo a las representaciones geométrico-algebraicas del *GeoGebra* y a las definiciones de los conceptos de Especio generador y Conjunto generado para contrastar y confirmar sus inferencias acerca de la relación del conjunto analizado y el espacio construido. De ser evidenciada la relación del conjunto linealmente independiente y del espacio que se genera en los modos del Cuadro 1, se conduce al establecimiento de la coherencia entre los conceptos del sistema base para $\mathbb{R}^2$.

Conclusiones y discusión de los resultados

En el estudio se analizaron las inferencias del caso de estudiantes universitarios del área de Ingeniería, en el proceso de construcción del significado del concepto de Base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Desde una perspectiva cognitiva, se analizaron las operaciones de comprensión desarrolladas para captar las relaciones que constituyen al concepto Base, junto a las otras nociones de las cuales depende, y que son interpretadas de acuerdo al Cuadro 1 en los modos de pensamiento involucrados en percibirlas.

Como resultado de la evaluación sistémica de las componentes en la comprensión del concepto de Base para $\mathbb{R}^2$, la evidencia de los estudiantes mostró que ellos lograron sintetizar las nociones del sistema conceptual previo, llevando un proceso en el cual, identificaron la relación entre un vector y la suma de múltiplos escalares de los vectores en un conjunto (modos SG-CL y AA-CL), para luego advertir, en la articulación de los modos SG-EG y AA-EG, posibles grupos de combinaciones lineales generadas por diferentes conjuntos de vectores del espacio vectorial (o el espacio generado).

Así mismo, a partir del trabajo realizado fundamentalmente en el modo AA-LI de $\mathbb{R}^2$, para advertir la relación entre los vectores en distintos conjuntos (independencia/dependencia lineal), los estudiantes mostraron explícitamente las condiciones bajo las cuales un conjunto de vectores era generador o no, de un determinado espacio o subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. De esta forma, al haber construido el concepto de conjunto generador, los estudiantes evaluaron, en los modos sintético y analítico (SG-B, AA-B y AE-B de $\mathbb{R}^2$), las características particulares de distintos conjuntos del espacio $\mathbb{R}^2$, diferenciando los generadores con vectores redundantes de los conjuntos, con un mínimo de vectores necesarios para generar un espacio o subespacio vectorial específico, lo que finalmente condujo a establecer las correspondencias entre las nociones de *generar e independencia lineal* que los llevaron a la comprensión del concepto de base, y por ende a la síntesis del sistema conceptual.

Ahora, varias reflexiones surgen a partir de la revisión del proceso recién descrito. La evidencia mostró que el análisis y reconocimiento de las cualidades de los conceptos de combinación lineal y de espacio generado que los estudiantes realizaron en el contexto gráfico-algebraico del *GeoGebra*, fue relevante para lograr la síntesis de los conceptos del sistema. Se advierte que los participantes que evaluaron y reconocieron las conexiones entre los conceptos, fueron quienes vincularon aspectos sintéticos y analíticos de las nociones del Cuadro 1, aunque lo hicieron de formas distintas, por ejemplo, mientras A2 articuló principalmente los modos SG y AA, el estudiante M2 mostró una tendencia fundamental a considerar los modos SG y AE de los conceptos del AL para $\mathbb{R}^2$ descritos en el Cuadro 1.

Los resultados de la investigación indicaron que a través del trabajo realizado para explorar los conceptos en el entorno de geometría dinámica del *GeoGebra*, los estudiantes pudieron distinguir ideas intuitivas relevantes sobre algunas características generalizables a las propiedades del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ en un modo de pensar sintético geométrico.

En particular, dos inferencias importantes que realizaron los estudiantes que alcanzaron la generalización y la síntesis del sistema fueron que (1) ligaron la noción de espacio generado con una variación continua de combinaciones lineales, y (2) que pudieron advertir que no existe una única manera de generar al espacio o algún subespacio vectorial.

Aunque autores como Nardi (1997) y Harel (1999), advirtieron antes sobre posibles dificultades con las representaciones visuales en la abstracción de las relaciones que dan sentido a los conceptos, los hallazgos reportados en esta investigación mostraron que resulta fundamental en el proceso, realizar de forma conjunta una visión intuitiva y formal de las relaciones que caracterizan a los conceptos del sistema. De hecho, la distinción teórica–práctica propuesta en el modelo de Sierpinska, Nnadozie y Oktaç (2002), refiere la reflexión sobre las características del objeto en estos dos niveles, que hemos llamado sintético y analítico. Para esto, y dado que algunos estudiantes de este estudio mostraron dificultades para relacionar el concepto de combinación lineal con el de espacio vectorial, por una marcada tendencia en alguno de los modos de pensamiento (sintético o analítico), se estima que a fin de abstraer las nociones del sistema y llevar a cabo las correspondencias que los vinculan, resulta esencial evitar que las nociones sean caracterizadas por la reproducción o aplicación de algún procedimiento algorítmico y en general, resulta perjudicial para la comprensión del concepto de Base para $\mathbb{R}^2$ que se aborden los conceptos del Cuadro 1 desde uno solo modo de pensar.

Desde la perspectiva de los modos de pensamiento, los estudiantes que mostraron una tendencia a utilizar de forma exclusiva el modo conceptual AA-B para establecer sus inferencias sobre los conceptos de generar e independencia lineal, no fueron capaces de advertir las relaciones que les daban sentido en lo geométrico. Aún más, se evidenció que esta tendencia a centrar la atención en los resultados de los procedimientos, pero sin advertir las relaciones que deberían reconocerse, los condujo a considerar los conceptos del Cuadro 1 de forma aislada.

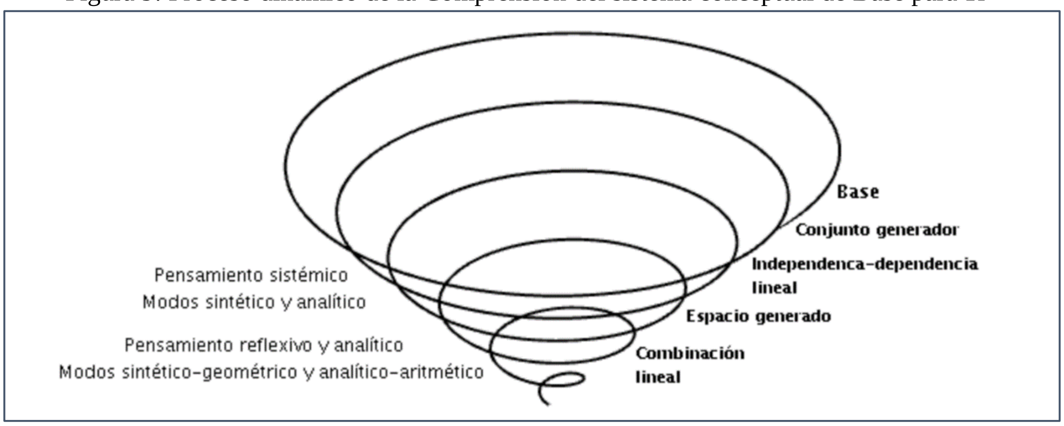
A diferencia de las observaciones de Nardi (1997) respecto a que la imagen conceptual dominante de los estudiantes A1, B1 y B2 acerca de un conjunto generador, es que éste representa una Base, dicho fenómeno estuvo presente en este estudio únicamente cuando los estudiantes mostraron una disposición exclusiva a utilizar el modo analítico-aritmético de los conceptos del Cuadro 1, para justificar sus inferencias sobre los conceptos del sistema. Así también, la exclusividad de utilizar solo el modo conceptual SG, como la que se advirtió en el caso del estudiante M1, impide la conceptualización de la independencia lineal, y por tanto que el sistema conceptual de Base para $\mathbb{R}^2$ pueda captarse.

Se considera que, para superar los posibles obstáculos de percepción en el modo SG de los conceptos del Cuadro 1, es indispensable insistir en que la atención debe centrarse en las relaciones: vectores – suma ponderada obtenida y conjunto de vectores – conjunto de combinaciones lineales generadas, y hacer hincapié en las posibles inconsistencias derivables del contexto geométrico, como considerar que sólo se generan los vectores dentro de un paralelogramo o vectores aislados. Así mismo, se considera necesario contrastar y evaluar la percepción en el modo SG de los conceptos germinales (generar y combinación lineal) en consonancia con los modos conceptuales AA y AE del mismo, coincidiendo en esta afirmación con Chargoy (2006) para quien resulta indispensable vincular los modos sintético y analítico a fin de obtener un conocimiento consistente de los conceptos.

En los entrevistados se observó que quienes llegaron a construir el concepto de Base para $\mathbb{R}^2$ (A2 y M2), siguieron un trayecto que les permitió analizar y articular los modos sintético y analítico de las nociones germinales del Cuadro 1, para reconocer las relaciones que dan sentido a esos conceptos, y así establecer la coherencia entre las nociones, ya sea comparando y diferenciando algunas condiciones lógicamente concebibles o valorando la consistencia de las definiciones, para llegar a identificar las características esenciales de conjuntos de vectores, con un número de elementos necesarios y suficientes para generar a un espacio vectorial, y así llegar a otorgarle al concepto de Base de $\mathbb{R}^2$ un significado articulado con las nociones de todo el sistema.

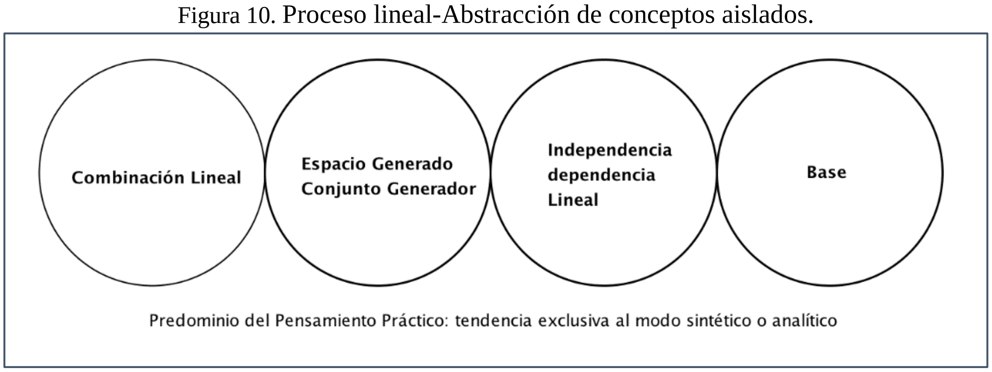
En este sentido, en concordancia con lo conjeturado por Chargoy (2006), se pudo verificar que, para establecer los vínculos entre las nociones del Cuadro 1, a fin de poder lograr la comprensión del concepto de Base para $\mathbb{R}^2$, la relación entre los conceptos del sistema debería llevarse a cabo en un proceso dinámico y no lineal (Figura 9)

Figura 9. Proceso dinámico de la Comprensión del sistema conceptual de Base para $\mathbb{R}^2$



Fuente: Elaboración Propia

Figura 10. Proceso lineal-Abstracción de conceptos aislados.



Fuente: Elaboración Propia

A diferencia del proceso lineal, que se caracteriza por la interpretación de los conceptos como resultado de procedimientos o percepciones aisladas en alguno de los modos de pensamiento, pero sin establecer la coherencia entre las nociones (Figura 10); en el modelo dinámico se conciben las relaciones que caracterizan y dan sentido a los conceptos, y las abstracciones se corresponden en el proceso de construcción del significado de las nociones del sistema conceptual propuesto en modos de pensar, en el Cuadro 1.

El proceso dinámico, que se ha representado mediante una hélice cónica en la Figura 9, explica la necesidad de evaluar y distinguir las relaciones constituyentes de cada una de las nociones, y a la vez captar y articular de forma congruente las conexiones entre estas últimas, a través de la inclusión de un número creciente de funciones intelectuales, características del pensamiento teórico (AA y AE), para superar los posibles obstáculos durante el desarrollo del proceso de interpretación de la noción de Base para $\mathbb{R}^2$.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto FONDECYT Nº1180468. Agradecemos a los participantes por la buena disposición en la investigación.

Referencias

Aranda, C. y Callejo, M. L. (2010). Construcción del Concepto de Dependencia Lineal en un Contexto de Geometría Dinámica: Un Estudio de Casos. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa*, *13*(2), 129-158.

Chargoy, R. (2006). *Dificultades asociadas al concepto de base de un espacio vectorial*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Dorier, J. L. (1995). A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory. *Historia Mathematica*, *22* (3), 227-261.

Grossman, S. (2012). *Álgebra Lineal*. Séptima Edición. México: Mc Graw Hill.

Harel, G. (1999). Students´ understanding of proofs: a historical analysis and implications for the *teaching of geometry and linear algebra, Linear Algebra and Its Applications, 302-302, 601-613.* Recuperado de http://www.math.ucsd.edu/~harel/Downloadable/LAA.pdf

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación.* México: Mc Graw Hill.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, *20* (2), 65-89.

Lay, D. (2013). *Álgebra Lineal para cursos en enfoque por competencias*. México: Pearson Educación.

Nardi, E. (1997). El encuentro del matemático principiante con la abstracción matemática: Una imagen conceptual de los conjuntos generadores en el análisis vectorial. *Revista Educación Matemática 9* (1), 47-60.

Parraguez, M. y Yáñez, A. (2017). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje de los Valores y vectores propios en R2: El caso de enseñanza media. *Revista Pädi Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería de las Ciencias*, *1*(1), 10-25.

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal: Una introducción moderna*. Tercera edición. México: Cengage Learning.

Roa-Fuentes, S. y Parraguez, M. (2017). Estructuras Mentales que Modelan el Aprendizaje de un Teorema del Álgebra Lineal: Un Estudio de Casos en el Contexto Universitario. *Revista Formación Universitaria*, *10*(4), 15-32.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press. Recuperado de la base de datos Ebrary (10096967).

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra, 23*, 209-246. doi: 10.1007/0-306-47224-4_8

Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra.* Reporte de Investigación. Montreal, Canadá: Concordia University.