

## Enseñanza De Las Propiedades De Unión, Intersección Y Complemento De Un Evento En Probabilidad, Una Propuesta Desde El Análisis Didáctico

Nicole Astudillo Cabrera, Daniela Aros Ibaceta, Elisabeth Ramos Rodriguez.  
Pontificia Universidad Católica De Valparaíso  
nalejandra121@gmail.com –  
daniela.aros@outlook.esmailto:daniela.aros@outlook.es- –  
elisabeth.ramos@pucv.cl

### **Resumen**

Evitar la memorización de algoritmos para la optimización del tiempo en la resolución de problemas priorizando el razonamiento es un tema de interés en la actualidad (Gómez, 2000). Por ello, nos planteamos como objetivo: diseñar e implementar una propuesta de aula para evitar el abuso en el uso de las fórmulas de unión, intersección y complemento de un evento en probabilidad.

Esta investigación considera dos marcos teóricos consolidados de la didáctica de la matemática, la TRS (Duval, 2006) y la TSD (Chavarría, 2006). La TRS para potenciar la utilización de registros de representación para la comprensión del objeto matemático en el diseño de la tarea. Asimismo, la clase en donde se presentará la propuesta será organizada bajo las fases de la TSD, considerando las limitaciones de aprendizaje, develadas a partir del análisis didáctico (Gómez, 2007) llevado a cabo por las investigadoras, como un aspecto necesario para prever situaciones que pueden ocurrir durante la implementación.

Bajo el paradigma cualitativo analizamos los datos constatando que los estudiantes utilizan el registro numérico y verbal por sobre otros registros, pudiendo sugerir que no consideran otras representaciones para favorecer la comprensión (Batanero, 2005; Gómez, 2000) como por ejemplo el empleo del diagrama de Venn.

Sostenemos que es indispensable que el docente lleve a cabo un análisis de las dificultades y errores asociadas al uso de diversos registros al diseñar una propuesta de aula. Esto permite tener un objetivo claro y definido, evitando ambigüedades, reconociendo que una actividad no puede estar exenta de limitaciones.

*Palabras claves: análisis didáctico, limitaciones de aprendizaje, propiedades de probabilidad, registros de representación, tarea de aprendizaje*

### **Introducción y objetivo de investigación**

El concepto de probabilidad hoy en día es muy utilizado en situaciones del diario vivir, sin embargo, entregar una definición matemática válida de dicho concepto, en todas las áreas en que se involucra, resulta difícil. Además, como menciona Gómez (2000) presentar un planteamiento axiomático de la probabilidad, con toda su complejidad de pensamiento abstracto basado en axiomas, corolarios y demostraciones de los mismos resulta difícil, más aún, si desea estudiarse en enseñanza media, es por ello que en el proceso de enseñanza aprendizaje, al estudiante se le dificulta la comprensión de este objeto matemático.

Sin embargo, existen otras dificultades asociadas al estudio de las probabilidades, por ejemplo, se expone que “la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística y de la Probabilidad (...) se ve afectado por el área de formación del docente y por el escaso desarrollo de herramientas metodológicas” (Osorio, Suarez y Uribe, 2011, pág. 373), debido a esto se hace necesario que los docentes, a través de un trabajo colegiado, logren crear y desarrollar tareas de aprendizajes que prioricen la comprensión del objeto matemático.

Así, el docente debe evitar un “aprendizaje meramente memorístico – »hechos, nombres y fórmulas«– y fomentar en él un aprendizaje comprensivo y analizador –»enseñar a pensar«–, es decir, un aprendizaje significativo” (Gómez, 2000, pág. 55) logrando dar sentido al objeto de estudio, esto sucede solo si se aplica una adecuada tarea de aprendizaje. Con dicha tarea los estudiantes, tal y como menciona Batanero (2005), utilizan objetos

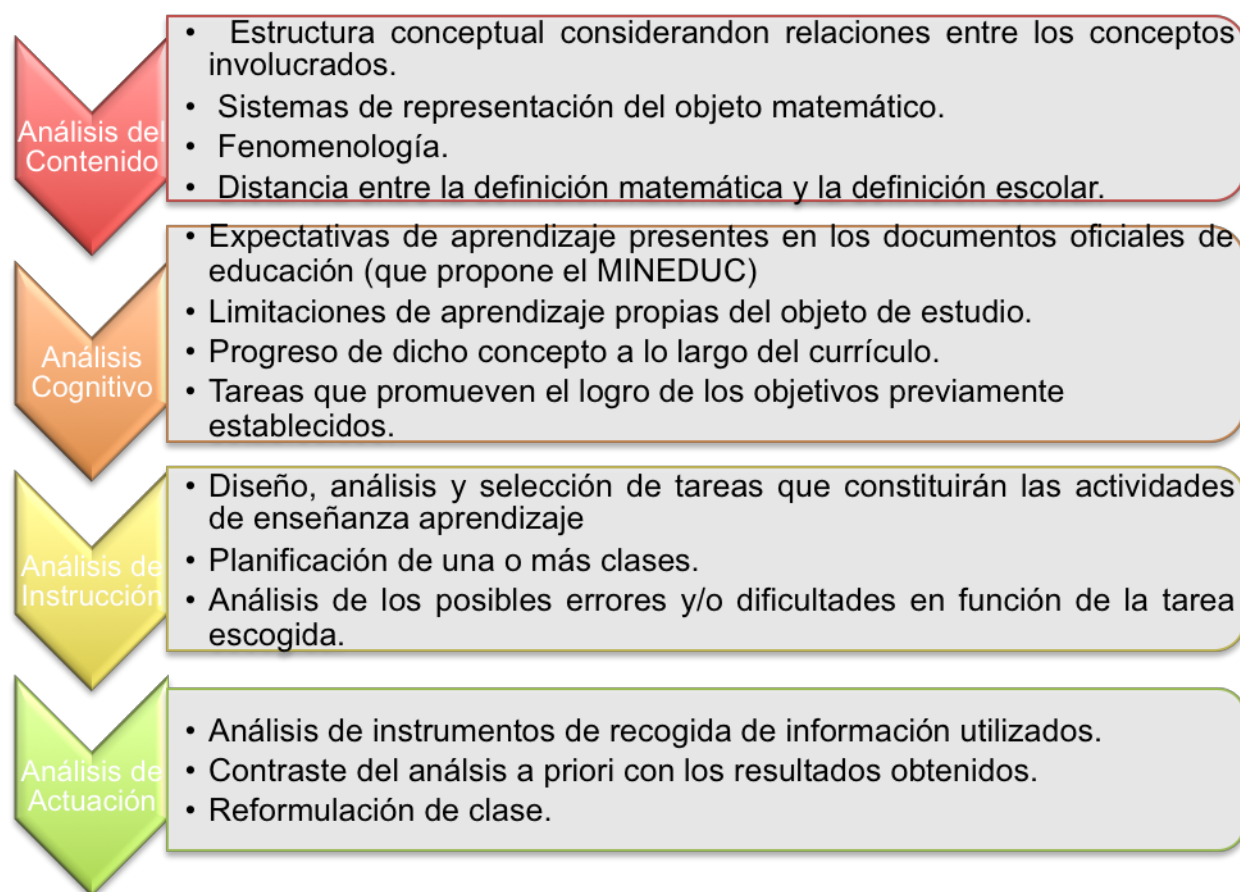
ostensivos que les permitan comprender el objeto matemático en profundidad.

En función de los antecedentes anteriormente presentados, identificamos la problemática de estudio como el uso de algoritmos para la optimización del tiempo en la resolución de problemas, dejando a un lado la comprensión del objeto matemático. Por ellos como objetivo general se plantea: Diseñar e implementar una propuesta de aula para evitar el abuso en el uso de las fórmulas de unión, intersección y complemento de un evento en probabilidad.

### **Marco de referencia**

El marco de referencia bajo el que se sustenta este estudio considera tres aspectos: el análisis didáctico, la teoría de registros semióticos (TRS) y la teoría de situaciones didáctica (TSD).

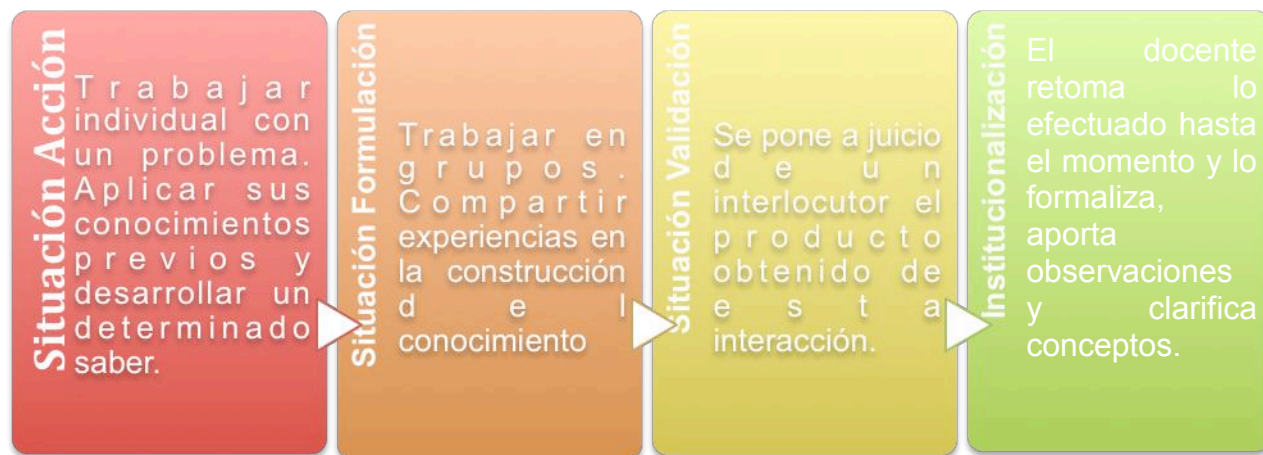
El Análisis Didáctico es una herramienta metodológica para planificar con profundidad, ya que entrega al docente una visión de cómo diseñar, implementar y luego evaluar los resultados de tareas de aprendizajes que se confeccionan en función de un objeto matemático específico. Este marco se estructura como un proceso que posee cuatro etapas o sub análisis, y se describen de la siguiente manera según Gómez (2007)



Por otra parte, para la confección de tareas de aprendizaje que prioricen la comprensión del objeto matemático, se considerará la Teoría de Registros Semióticos (TRS) de Duval, quien expone que la comprensión de un contenido reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, es decir, el estudiante debe ser capaz de reconocer el objeto matemático en sus distintas representaciones sin que sea confundido, y debe realizar cambios de registro sin olvidar que la esencia del objeto matemático es más que, por ejemplo, la expresión algebraica que lo define y/o los valores que toma. También, Varettoni y Elichiribehety (2010) mencionan que la TRS constituye un marco teórico adecuado para analizar las representaciones que los alumnos emplean para resolver un problema, permitiendo reconocer diferentes errores que se puedan cometer en el proceso, y así mejorar la tarea de aprendizaje propuesta.

Finalmente se considerará un segundo marco teórico, la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (TSD), con el cual se trabajarán

solamente las fases que propone esta teoría para la organización de la clase, las cuales según lo expone Chavarría (2006),



Cada una de las fases define de manera concreta cada momento, determinando el papel que juegan los estudiantes y el docente en el desarrollo de la actividad de aprendizaje para el logro de los objetivos.

### Metodología

Al realizar una investigación es necesario determinar la metodología de trabajo a utilizar, lo que incluye en primer lugar definir el método de análisis de información que en este caso es del tipo cualitativo, descriptivo simple e interpretativo, puesto que, como exponen Hernández, Fernández y Baptista (2006), se exploran y describen situaciones a las que se enfrenta un grupo determinado de individuos, en donde también se consideran las experiencias de los propios investigadores. Así, los resultados y su posterior análisis no serán objetivos, y tampoco se podrán generalizar para grupos con otras características.

Considerando lo anterior, para efectos de este estudio el contexto escogido es un grupo de 22 estudiantes de tercer año medio, los que pertenecen al Colegio San Vicente ubicado en Valparaíso. Dicho establecimiento es particular subvencionado, e imparte Educación Parvularia en el Segundo Nivel de transición; Educación Básica y Enseñanza Media Científico-

Humanista. Finalmente para el análisis de la información recogida se utilizaron tres instrumentos:

a) Grabaciones de video, que permitieron tener una mirada panorámica de la implementación del plan de acción.

b) Bitácoras, referidas a la descripción del contexto y ambiente donde se desarrolla la investigación, llevando a cabo una secuencia de hechos o cronología de sucesos y como evidencias escritas.

c) Hojas de respuestas, donde se expone la tarea de aprendizaje y en las cuales los estudiantes deberán plasmar sus estrategias de resolución.

## Resultados, desarrollo del análisis didáctico

### A. Análisis del contenido

Antes de elaborar un plan de acción para subsanar la problemática en el aprendizaje de las propiedades de probabilidad, es necesario conocer el objeto matemático en profundidad. Es por esto que se analiza la estructura conceptual del contenido involucrado en el estudio, a continuación se presenta, a grandes rasgos, dicha estructura.

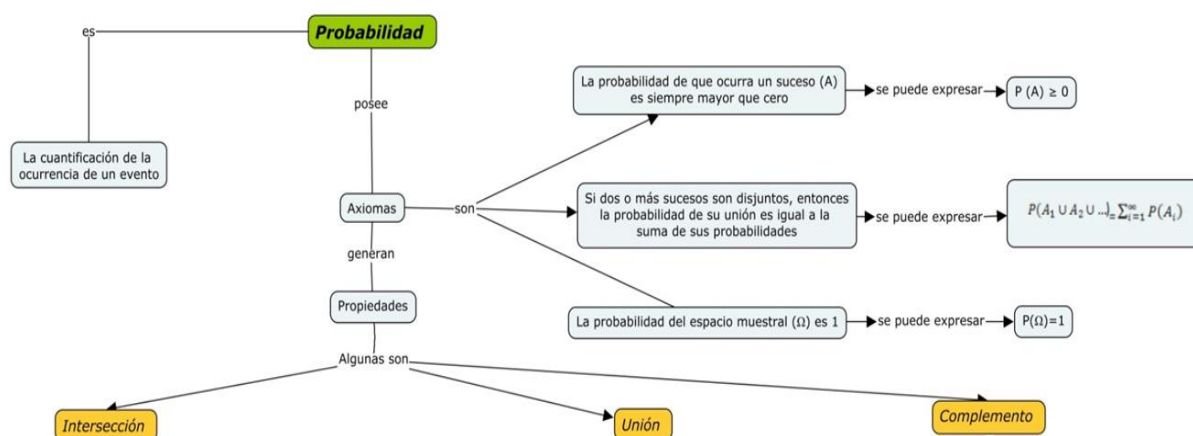


Imagen 2: Estructura Conceptual Probabilidad.

Por otro parte, se analiza la fenomenología de este contenido, considerando contextos y situaciones en las que se les da sentido a las propiedades

También se describen diferentes sistemas de representación bajo los cuales es posible estudiar dichas propiedades, a saber:



Finalmente se comparan las definiciones matemáticas de las propiedades, referidas a teoremas con sus respectivas demostraciones, con las definiciones que se dan a nivel escolar, las que se exponen mediante una expresión algebraica.

## **B. Análisis cognitivo**

El docente describe cómo los estudiantes progresan en la construcción del conocimiento, para esto se identifican las expectativas de aprendizaje que proporcionan los textos oficiales de educación, en las cuales se prioriza el aprendizaje de las propiedades de la suma y producto de probabilidad, reconociendo los distintos tipos de eventos. Es importante además determinar las limitaciones de aprendizaje que hacen referencia a las dificultades y/o errores propios del concepto de probabilidad, puesto que “una característica relevante de la Probabilidad es el hecho de tener su propio lenguaje y notación simbólica. En este sentido, (...) algunas veces el problema puede estar en el empaque y no en el contenido, como cuando la

dificultad no está en los conceptos, sino en la notación que se utiliza” (Osorio, Suarez y Uribe, 2011, pág. 12).

En este caso, “nuestro afán de anticiparnos a los hechos para prever consecuencias muchas veces nos puede llevar a conclusiones equivocadas producto de un análisis apresurado” (Jiménez y Rupin; 2014; pág. 160), por lo cual el establecer regularidades frente al análisis de algunas situaciones genera dificultades en el aprendizaje del concepto. Por ejemplo, si se lanza 3 veces una moneda y se obtiene “sello” el estudiante puede tender a decir que al lanzar por cuarta vez la moneda también obtendrá “sello”, de esta forma existe un error en la apropiación del concepto de dependencia que se involucra en el estudio de las propiedades en probabilidad.

Otra limitación en el estudio de este concepto es el uso de disyunciones, a las cuales no se les da el mismo significado al usarse en el lenguaje cotidiano y en lenguaje matemático, por ejemplo “puede ocurrir que los estudiantes, en primera instancia, asuman que la disyunción “o” es excluyente, pues así suele ser en el lenguaje natural. Así, pueden pensar que si decimos que una persona tiene corderos o vacas significa que sólo tiene un tipo de animal, no ambos” (Jiménez y Rupin, 2014; pág. 165), este error es ocasionado porque el estudiante no interpreta de manera adecuada la operatoria con conjuntos.

Dichas dificultades es posible observarlas a lo largo de todos los niveles escolares, por lo cual es necesario realizar un análisis curricular que abarca desde tercero básico a cuarto medio, reconociendo los contenidos previos necesarios para estudiar en segundo medio las propiedades y los conceptos que puedo abordar luego de este nivel, los cuales son:



3°- 4°	<ul style="list-style-type: none"><li>• Experimento Aleatorio.</li><li>• Con o sin devolución.</li></ul>
5°- 6°	<ul style="list-style-type: none"><li>• Suceso- evento en probabilidad.</li><li>• Posibilidad de ocurrencia de un evento.</li></ul>
7°- 8°-1°	<ul style="list-style-type: none"><li>• Equiprobabilidad.</li><li>• Reconocen el modelo de Laplace.</li></ul>
2°	<ul style="list-style-type: none"><li>• Propiedades de probabilidad.</li></ul>
3°	<ul style="list-style-type: none"><li>• Probabilidad Condicional.</li></ul>
4°	<ul style="list-style-type: none"><li>• Cálculo de probabilidades usando tablas de distribución normal.</li></ul>

Finalmente se identifican las tareas de aprendizaje que permiten cumplir el objetivo propuesto, y resolver o subsanar los errores y dificultades encontrados, esto se logra si el docente tiene clara la actividad a realizar para así poder orientar el logro de los objetivos propuestos.

### **C. Análisis de instrucción**

El tener en cuenta todo el proceso que vive el objeto matemático, desde su primer estudio a nivel escolar, considerando todos los conceptos que lo articulan, nos permite diseñar un plan de acción que tenga una mayor consistencia. En este caso se diseñará una clase cuyos objetivos son

## Objetivo General

- Interpretar y caracterizar las propiedades de unión, intersección y complemento de un evento.

## Objetivo Específicos

- Reconocer las propiedades de unión, intersección y complemento de un evento.
- Representar las propiedades de unión, intersección y complemento de un evento.

En dicha clase se presentará una tarea de aprendizaje, orientada al logro de los objetivos, la cual se ilustra en la Figura 1.

***El dueño de un minimarket ha observado que de sus potenciales clientes consumidores de fruta, el 0,6 prefiere comprar frutillas; por otra parte, un 0,3 prefiere ciruelas, mientras que sólo un 0,15 prefiere ambas frutas. Si se selecciona aleatoriamente un comprador de fruta, resuelva las siguientes preguntas mediante dos estrategias distintas.***

***a) ¿Cuál es la probabilidad que no prefiera frutilla?***

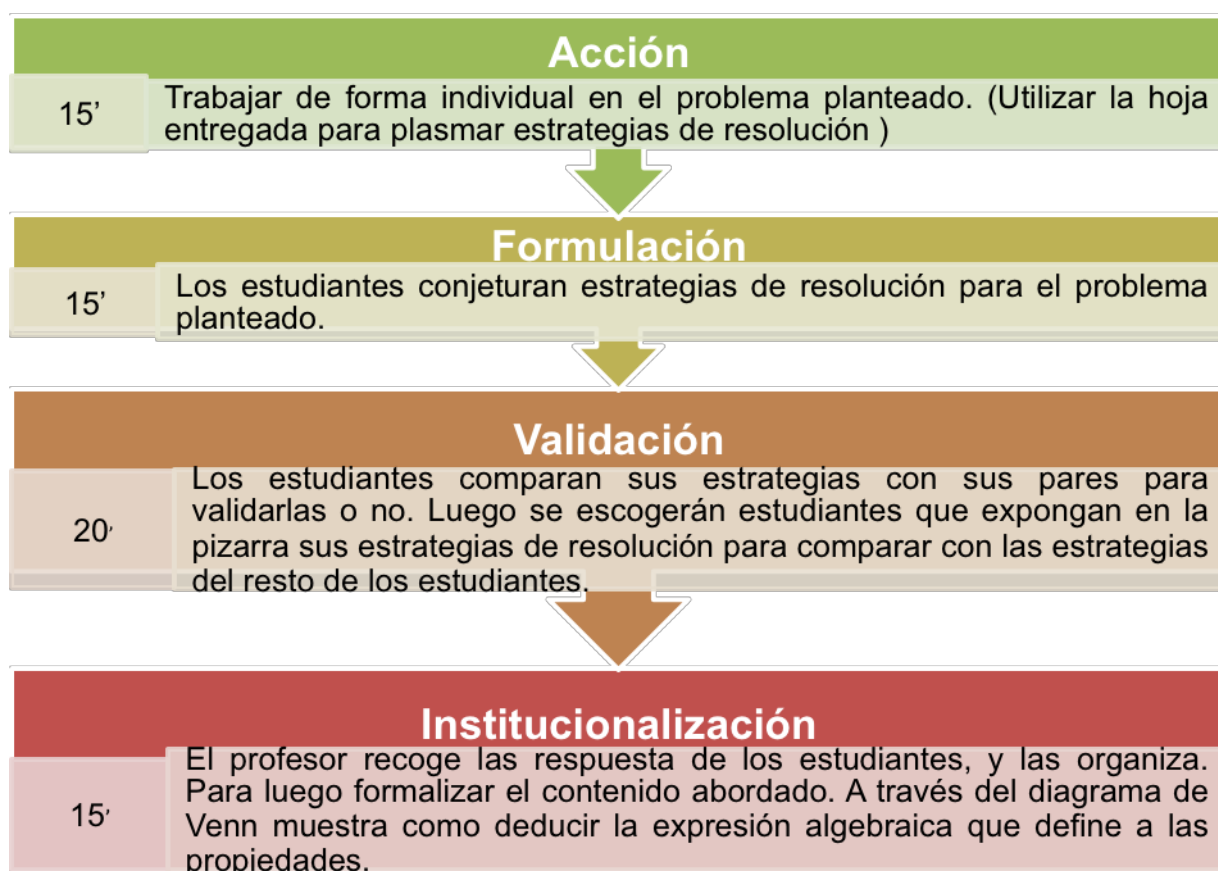
***b) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera ambas?***

***c) ¿Cuál es la probabilidad que prefiera al menos un tipo de fruta?***

La tarea presentada promueve, como mínimo, el uso de dos registros de representación semiótica para dar respuesta a las interrogantes planteadas. A modo general, se espera que el estudiante aplique un registro de representación distinto al algebraico, específicamente el uso del diagrama de Venn, ya que mediante este registro es posible deducir algunas propiedades

que no son obvias, favoreciendo así la comprensión por sobre la memorización de las expresiones.

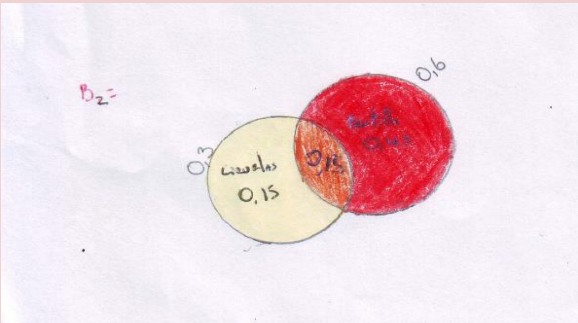
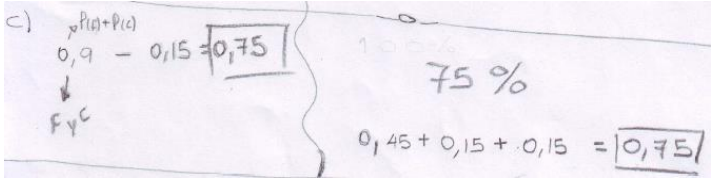
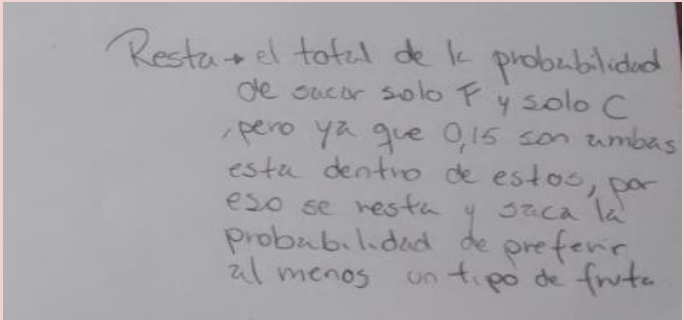
La clase diseñada se planificó para 90 minutos, tomando en consideración diversos factores que podrían retrasar alguno de sus momentos para la distribución del tiempo. Como se mencionó anteriormente, la clase se organizara en función de las fases que propone la TSD, a continuación se describe lo que debería suceder en cada una de ellas.



#### D. Análisis de actuación

Luego de la implementación, se pudo notar que la actividad en sí necesita la secuencia en la que se presentan las preguntas para la mejor comprensión de las dos preguntas finales, la cual no era respetada, produciéndose un desorden y confusión al momento de resolverlas. Con respecto a las estrategias utilizadas, estas se agruparon en tres categorías que se presentan en la Tabla 1

Tabla 1: Categorización de resultados.

Estrategias de Resolución	Evidencias
<p>Registro Conjuntista</p>	
<p>Registro Numérico Simbólico</p>	
<p>Registro Natural</p>	

Se observó que sólo cuatro alumnos de un total de 20 recurrieron al registro gráfico como una estrategia de resolución, en comparación con el resto del curso que prefirieron expresar la respuesta en lenguaje natural y de numérica simbólica. Por otro lado, a pesar de no poseer los conocimientos previos, 12 alumnos fueron capaces de dar respuestas a las interrogantes de manera correcta, aunque no utilizaron el diagrama de Venn como estrategia; siete hicieron la resolución en registro algebraico-natural y cinco en registro algebraico-pictórico.

Teniendo en consideración los resultados y su posterior análisis, se plantea reformular la tarea de aprendizaje involucrada en la clase, es relevante entonces incluir en el problema un esquema del diagrama de Venn en blanco, para que los estudiantes se enfoquen en el trabajo con el registro conjuntista que les permitirá deducir las expresiones de las propiedades, lo que se buscaba desde un principio con nuestra actividad. Por otra parte, se pretende que si los estudiantes no saben utilizar el diagrama de Venn se realizará una institucionalización local, es decir presentará un ejemplo del uso del diagrama de Venn.

### **Conclusiones y comentarios finales**

Con el desarrollo de esta investigación se logró el objetivo general, puesto que la tarea de aprendizaje que se diseñó permite el uso de un registro de representación distinto al algebraico evitando que la enseñanza del objeto matemático, en este caso las propiedades de probabilidad, se redujera a la replicación de un algoritmo, fomentando la comprensión por parte del estudiante de conceptos claves en probabilidad, como por ejemplo a qué se refiere el complemento de un evento. Es importante destacar que, la tarea de aprendizaje propuesta puede ser más orientadora aun para el logro de los objetivos, si se incluyera un esquema con el diagrama de Venn en blanco, de tal forma que el estudiante inmediatamente enfoque sus estrategias de resolución a este sistema de representación, optimizando el tiempo de trabajo y reduciendo las posibilidades de que los estudiantes se desvíen del objetivo de la clase.

Sabemos que todo contenido matemático sufre modificaciones para poder ser estudiado a nivel escolar, según el contexto en el cual se abordará. Dichas modificaciones las debe realizar el docente, definiendo las tareas de aprendizaje que sean más útiles y pertinentes para el logro de los objetivos planteados y de las habilidades que se espera desarrollar con el contenido en los estudiantes.

Otro aspecto relevante a considerar en la investigación fueron las limitaciones de aprendizaje. Al estudiarlas nos permitió prever situaciones conflictivas a las que se podía enfrentar el estudiante al momento de trabajar con el contenido, definiendo acciones para subsanarlas. Por tanto resulta indispensable que el docente analice las dificultades y errores asociadas a un contenido específico, considerando que las tareas de aprendizaje no están exentas de limitaciones, puesto que algunas son propias del concepto mientras que otras son propias de la concepción del estudiante. Se debe considerar además, si el curso posee los conocimientos previos para abordar la actividad, puesto que si esto no ocurre no es posible llevar a cabo la tarea, teniendo que recurrir al repaso de los contenidos. Es por lo anterior, que para un docente es indispensable considerar el contexto y la realidad del curso en la planificación de un contenido, reconociendo las características propias del grupo y así facilitar el aprendizaje.

Finalmente, se espera que esta investigación sea un aporte a la enseñanza de las propiedades de unión, intersección y complemento de un evento en probabilidad, puesto que se concibe al estudiante como un participante activo de su proceso de aprendizaje, donde el docente actúa como guía de dicho proceso, potenciando la comprensión de un contenido matemático por sobre la replicación de algoritmos. Se desea también, incentivar a las futuras generaciones a diseñar tareas de aprendizaje que promuevan la comprensión de un objeto matemático, aun cuando este estilo de clases toma más tiempo de lo normal, como docentes nos aseguramos de que el estudiante realmente está logrando un aprendizaje significativo, sin obviar las complicaciones que pueden surgir, puesto que son inherentes a la realidad chilena en el aula.

## **Referencias**

- Batanero, C. (2005). *Significado de la probabilidad en la educación secundaria*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Noviembre Vol. 8 n°003 comité Latinoamericano de matemática educativa, México.
- Chavarría, J. (2006). *Teoría de las situaciones didácticas*. Recuperable en internet:  
<http://www.unige.ch/fapse/clidi/textos/teoria%20de%20las%20situaciones%20didacticas.pdf>. Universidad de Ginebra. Suiza.
- Gómez, S. (2000). *¿Para qué enseñar fórmulas pudiendo enseñar procedimientos?* Una propuesta didáctica para el tratamiento de la Probabilidad en Bachillerato. Suma 35.
- Gómez, P. (2007). *El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemática de secundaria*.
- Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (1997-2006). Metodología de la Investigación. Canadá.
- Jiménez, L. y Rupin, P. (2014) *Guía didáctica del docente*. Matemática segundo año medio.
- Osorio, M., Suarez, A. y Uribe, C. (2011) *Revisión de aspectos asociados a la problemática del aprendizaje de la Probabilidad*. Fundación Universitaria Católica del Norte. Medellín, Colombia.
- Varettoni, M., Elichiribehety, I. (2010). *Los registros de representación que emplean docentes de Educación Primaria: un estudio exploratorio*. Revista electrónica de investigación en educación en ciencias. Vol V N° 2. Argentina.