Errores Y Dificultades En La Adquisición Del Concepto Sucesos Independientes Desde El Análisis Didáctico

Valeria Bizet Leyton, Elisabeth Ramos-Rodríguez, Felipe Ruz Ángel
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
valeb0@hotmail.com, elisabeth.ramos@pucv.cl, felipe.ruz.a@pucv.cl

Resumen

El presente escrito tiene como objetivo indagar en los errores y las dificultades que presentan alumnos entre 16 y 17 años sobre el concepto de Sucesos Independientes, a partir de lo desarrollado en el análisis didáctico asociado al contenido probabilístico. Bajo el paradigma cualitativo, se lleva a cabo un estudio exploratorio (Baptista, Fernández, & Hernández, 2006), considerando como sujetos de estudio estudiantes de un liceo subvencionado de la quinta región de Chile.

Se diseña el instrumento de recogida de información, una tarea de aprendizaje en base al Análisis Didáctico (Rico, 1998), en el que consideramos los sistemas de representación, la fenomenología, la estructura conceptual y las limitaciones (particularmente errores y dificultades) de aprendizaje del objeto matemático en estudio.

El análisis de los datos se lleva a cabo bajo el método de análisis de contenido (Krippendorff, 1990), constatando la existencia de diversos errores y dificultades que aparecen en la literatura (Batanero, 2001; Cid, 2009), como, por ejemplo, que los estudiantes tienen dificultad en reconocer sucesos independientes (Cid, 2009). También se observa otras dificultades que emergen de las producciones de los estudiantes, como que no reconocen el espacio muestral asociado a los sucesos. Estos resultados nos dan evidencia de la naturaleza compleja del contenido probabilístico en cuestión, abriendo nuevos desafíos para su tratamiento en la enseñanza escolar.

Palabras clave: Investigación en educación estadística; Sucesos Independientes; Análisis Didáctico; Errores; Dificultades.

Introducción y Problemática

Tanto en investigaciones y literatura en el ámbito de la didáctica, como en mi práctica profesional como docente de matemática en formación, se evidencian problemas en estudiantes cuando se enfrentan a actividades matemáticas referentes al concepto Sucesos Independientes. Algunos de ellos se describen a continuación:

> Es común que estudiantes confundan estos con eventos excluyentes, así como también los definan a través de la regla del producto, pudiendo ocurrir que la probabilidad sea cero y el evento no ser vacío, y aplicando dicha regla produce creer que se comprueba la independencia (D'Amelio, 2004).

Otro conflicto que se pone de manifiesto en este ámbito es el expuesta por Cid (2009), dificultad en re*conocer Sucesos Independientes, lo que concuerda con una investigación realizada por* Hernández y Sánchez (2001)*, quienes obtuvieron que sólo un* 28% *de* jóvenes mexicanos con edad promedio 16 años *respondieron* correctamente a la pregunta sobre identificar *dicho tipo de sucesos* y posteriormente aplicar regla de prod*ucto de probabilidad.*

Sobre la concepción de independencia, Batanero (2001), *afirma que, desde el ámbito de la didáctica, requiere un análisis por sí solo y alude a la* disc*ordancia producida entre la teoría y* práctica, *pues* la definición formal de independencia expresada por la regla del producto parece sencilla de comprender, pero, *en la vida cotidiana las personas no logran aplicarla en situaciones concretas.*

La problemática que se intenta poner de manifiesto es, *indagar las dificultades que surgen en el aprendizaje del concepto Sucesos Independientes, en estudiantes de educación media (*16 a 17 años)*, pues es esencial que los* *docentes posean fundamentos teóricos y conceptuales, que les entreguen conocimientos para diseñar e implementar el currículo en el aula.*

Bajo este escenario, planteamos la pregunta de investigación ***¿Qué errores y dificultades de estudiantes, sobre Sucesos Independientes en problemas asociado al cálculo de Probabilidad, se pueden reconocer al desarrollar un análisis didáctico?*** *Para responder a ésta interrogante, nos centramos en el estudio del concepto matemático aludido, tomando como marco de referencia el análisis didáctico, que sustenta la construcción del instrumento de recogida de información y análisis de los resultados.*

Marco de Referencia: Análisis Didáctico

El Análisis Didáctico, desarrollados en la Universidad de Granada por el grupo PNA, liderado por Luis Rico, es comprendido como " *un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje*" (Gómez , 2005, pág. 3). Por ende permite una mejor y mayor comprensión del objeto matemático en estudio por parte del docente y el investigador. Desde ésta perspectiva, Gómez (2005) menciona que el contenido matemático específico a enseñar tiene un objetivo de aprendizaje determinado a lograr en un tiempo delimitado. Es así que a través de este referente teórico es posible realizar de manera reflexiva y crítica una adecuación de propuestas de enseñanza, según la realidad y necesidades educativas particulares de los estudiantes.

El Análisis Didáctico es un procedimiento cíclico compuesto por cuatro sub-análisis (figura 1), los cuales están organizados de manera secuencial (Gómez , 2005).

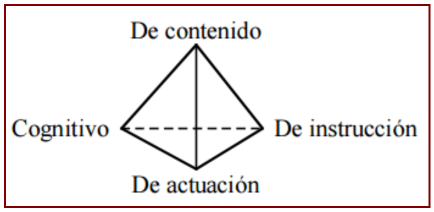

Figura 1. Análisis que componen el análisis didáctico (Gómez , 2005, pág. 12).

La realización de este análisis se inicia con el Análisis de Contenido, centrado en indagar los distintos significados de un objeto matemático, abordando sus procedimientos y relaciones existentes con otros conceptos, además de su fenomenología y sistemas representaciones, (Gómez , 2005).

Continúa el Análisis Cognitivo, en términos de Lupiáñez (2009), en él se estudia el aprendizaje a lograr en los estudiantes fundamentándose en el currículo, el docente identifica los objetivos y conocimientos que poseen los estudiantes para la construcción y comprensión del nuevo concepto, reconoce las dificultades y errores que pueden enfrentar sus alumnos en el proceso de aprendizaje.

El Análisis de Instrucción, para Gómez (2002), es la etapa en la que se seleccionan las tareas a emplear en las actividades de enseñanza y aprendizaje, donde sus propósitos deben permitir lograr los objetivos fijados en el análisis previo, además se describen los recursos a emplear, y prevén las actuaciones de los estudiantes y posibles reacciones del profesor, es decir la realización de un análisis a priori a las tareas.

Finalmente se lleva cabo el Análisis de Actuación, este se focaliza en la puesta en práctica de las tareas en el aula, análisis de la implementación y posterior evaluación de resultados logrados, (Lupiañez, 2009). De este modo el docente contará con información para un nuevo desarrollo del Análisis Didáctico.

Metodología

Para desarrollar la investigación consideramos un enfoque metodológico cualitativo (Baptista, Fernández, & Hernández, 2006, pág. 18), de tipo descriptivo-interpretativo, donde los sujetos de estudio fueron 29 estudiantes del nivel 3° medio (16 a 17 años), en un liceo de modalidad científico- humanista, subvencionado de la quinta región de Chile.

La investigación se organizó en tres etapas que a continuación describimos, en un primer momento se realiza un Análisis Didáctico (Rico, 1998), sobre el concepto matemático en cuestión. Posteriormente, a partir del sustento teórico obtenido en la primera fase se diseña el instrumento de recogida de información, una tarea de aprendizaje. Finalmente se lleva a cabo su aplicación y el análisis de los datos, este último se realiza bajo el método de análisis de contenido (Krippendorff, 1990). Los resultados se plasman a través del desarrollo de los cuatro sub-análisis del análisis didáctico descritos anteriormente (Gómez , 2005)

Resultados

Análisis Didáctico, Análisis De Contenido

Sistemas de Representación

Como bien señala Duval (2000), cada sistema de representación del concepto matemático permite abordar su diversidad de significado, ver su complejidad y representarlo con diferentes signos, gráficos, símbolos. Por ello es necesario que el estudiante conozca distintas maneras de representar un mismo objeto matemático, ya que facilitará la compresión del contenido a aprender.

Entre los sistemas de representación del concepto Sucesos Independiente destacan los siguientes:

- Simbólico: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ diremos que los sucesos $A, B \in \mathcal{A}$ son independientes si y sólo si:$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ o $\mathbb{P}(A/ B) = \mathbb{P}(A)$.
- Gráfico: Diagrama de Árbol.
- Algebraico numérico: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b^2}$.

- Verbal: Lenguaje usual.

Análisis histórico-epistemológico.

La noción de independencia surge con los juegos de azar en la edad antigua. En el siguiente periodo de la historia, Edad Moderna, su concepto se explicitó, pues en el contexto de experiencia independiente en el año 1576 De Moivre propone la definición *"dos eventos son independientes cuando no tienen conexión uno con el otro y lo que ocurra en uno ni fomenta ni obstruye la ocurrencia del otro"* (D'Amelio, 2004, pág. 14).

En 1788, Laplace enuncia las propiedades de sucesos independientes. Posteriormente el concepto de independencia fue fundamental para el desarrollo de la Teoría de Errores y Teorema de Límite. Además luego de conocerse los Axiomas de Kolmogorov, dicho concepto se expresó a través de la regla del producto "*sea* (Ω, A, P) *un espacio de probabilidad. Los sucesos* $A, B \in \Omega$ son independientes sí y sólo sí $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$." (D'Amelio, 2004, pág. 140)

Con el análisis anterior se puede observar el origen y desarrollo a lo largo de la historia del concepto en estudio, la incorporación de sus distintos significados y representaciones, además de su relación con otros contenidos matemáticos.

Análisis Fenomenológico

Según Rincón (2007), el aprendizaje de un concepto matemático es más fácil si se basan en el contexto de la vida real en que se presenta o en situaciones que dan sentido. En este caso, algunos de ellos son: Situaciones Biológicas (genética Mendeliana); Situaciones físico- química, (comportamiento de moléculas de gases); Situaciones de juegos de Azar (por ejemplo considerar una baraja de Naipes Español y plantear la interrogante ¿Cuál es la probabilidad de obtener una carta par de figura espada?), entre otras.

Estructura Conceptual

Para sintetizar la información obtenida en el análisis de contenido, hemos elaborado un mapa conceptual del objeto *Sucesos Independientes* (figura 2). Este inicia con los tres elementos que componen un espacio de probabilidad e identificamos dentro de la σ-álgebra $\mathcal{A}$ los Sucesos Independientes, ligados directamente con la regla del producto según la definición expuesta. Además de ellos mencionamos sus modelos verbal, gráfico y simbólico de representación desarrollados anteriormente, este último posibilita expresar y trabajar la siguiente propiedad de dichos sucesos $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

La incorporación al mapa de nuevos conceptos y procedimientos relacionados al tema de estudio, permitió expresar con mayor claridad la complejidad de la estructura conceptual que este constituye.

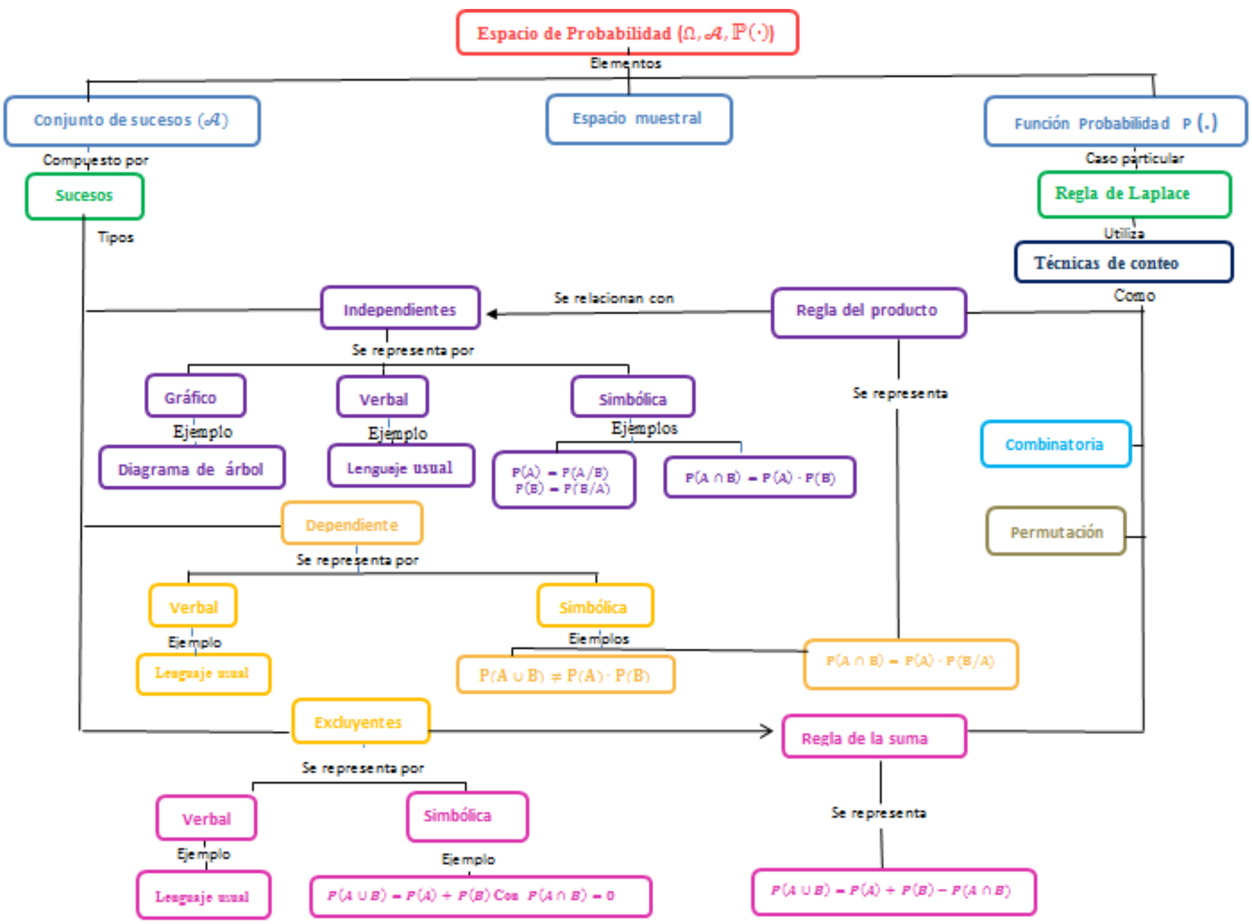

Figura 2. Estructura conceptual del objeto matemático Sucesos Independientes.

Análisis didáctico, análisis cognitivo

En diversas investigaciones se ha puesto de manifiesto las limitaciones que presenta el aprendizaje del concepto Sucesos Independientes, entre las dificultades destacamos:

- Construir el significado de la noción de independencia (Azcárate , Cardeñoso, & Serrado, 2005).
- Determinar o distinguir si dos sucesos son independientes, señalada por Cid (2009) y Azcárate, Cardeñoso y Serrado (2005).
- Distinguir entre sucesos independientes y experiencias independientes, y diferenciar entre eventos excluyentes e independientes, como afirma Sánchez (2009).

Sobre los errores relativos a este concepto encontramos:

- Asumir la igualdad $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ como válida siempre (Darrigrandi, Ramos, & Zañartu, 2012).
- Confundir la regla del producto con la regla de la suma demostrándose la independencia de sucesos si cumplen $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, expuesta por *D'Amelio* (2004).

Análisis didáctico, análisis de instrucción

Continuando los lineamientos que nos ofrece el análisis de contenido y cognitivo, se elabora una tarea de enseñanza considerando como fenomenología el juego de azar.

Ésta es una tarea, que consta de dos partes. La primera, aborda dos situaciones de juegos de azar, en una de ellas se trabaja con sucesos independientes y en la otra se pierde ésta condición. La segunda, consistió en 4 preguntas sobre cada situación, que aborda contenidos procedimentales y conceptuales**.** La situación que analizaremos en este documento se presenta en la tabla 1.

Tabla 1: Tarea de aprendizaje a implementar.

Se extra una carta al azar de una baraja inglesa (52 cartas de 4 pintas: trébol, pica, corazón y diamante o rombo. Cada pinta tiene los números de 2 al 10 y las cartas A, J, Q y K).

Pregunta	**Objetivo**
¿Cuál es la probabilidad de extraer una carta par de pinta corazón?	Calcular la probabilidad de la intersección de dos sucesos.
¿Cuáles sucesos podría definir en cada situación?	Definir sucesos involucrados en un problema de probabilidad.
¿Influye o afecta la ocurrencia de un suceso en la ocurrencia del otro suceso? ¿Por qué?	Abordar la definición intuitiva de sucesos independientes.
¿Cuál es el valor de $\mathbb{P}(\boldsymbol{A}) \cdot \mathbb{P}(\boldsymbol{B})$?	Calcular la probabilidad de dos sucesos utilizando la regla de Laplace, y el producto entre estas.

Este instrumento diseñado para la recogída de información, permitió obtener datos, tomados de las hojas de tarea realizadas en el aula de clase, los que hemos sometido a un análisis cualitativo expuesto a continuación.

Análisis De Actuación

El análisis de las producciones de los estudiantes, así como el contraste entre lo previsto y lo ocurrido en la puesta en práctica se aborda a partir del Análisis de Actuación del Análisis Didáctico. En lo que sigue mostramos algunas respuestas de los estudiantes con su respectivo análisis a posterior y la clasificación de las limitaciones de aprendizaje encontradas en las mismas.

La figura 3 muestra que un estudiante logra calcular la probabilidad de la intersección de los dos sucesos involucrados en la situación 1 utilizando la regla del producto, aunque en ningún momento en su trabajo menciona o corrobora la hipótesis que debe cumplirse para usarla. Si bien éste estudiante no presentó problemas en identificar el espacio muestral y los casos favorables de cada suceso, no justifica su procedimiento.

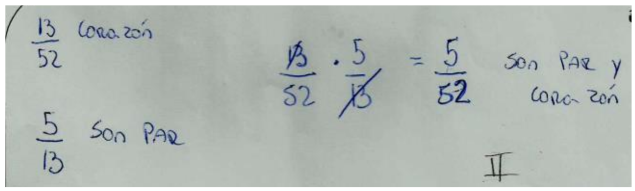

Figura 3. Respuesta a la pregunta 1 sobre la situación 1 de un estudiante.

Por otro lado, en la figura 4 se evidenció que los estudiantes definen los dos sucesos de la situación 1 como uno solo, presentando dificultad en reconocer los sucesos involucrados en un experimento, debido a que no poseen una comprensión del objeto matemático sucesos.

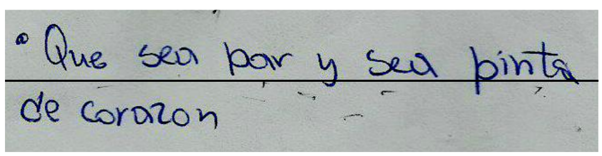

Figura 4. Respuesta a la pregunta 2 sobre situación 1 de un grupo de cuatro estudiantes.

Por último, la evidencia de la figura 5 muestra que tres estudiantes no logran identificar correctamente el espacio muestral y los casos favorables de cada suceso, dando una respuesta errónea a la pregunta. Esto lo asociamos al hecho de no tener claridad del significado de sucesos en probabilidad.

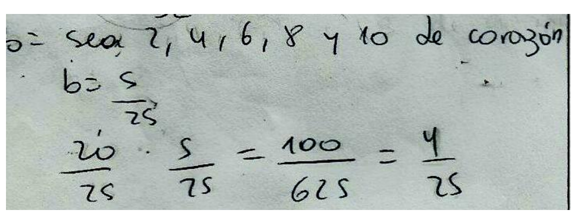

Figura 5. Respuesta a la pregunta 4 sobre situación 1 de un grupo de tres estudiantes.

Consideramos importante destacar los ejemplos de la figura 4 y figura 5, ya que en ellos también se muestran cómo alumnos no poseen un conocimiento básicos probabilísticos, específicamente el concepto de sucesos, de niveles de educación inferiores no correspondientes al nivel donde se aplicó la tarea. Lo cual permite demostrar lo fundamental que son los conocimientos previos en la construcción de uno nuevo, ya que estos pueden convertirse en limitaciones para el logro de aprendizajes producto de que su falta de dominio dificulta el avance de los alumnos en la adquisición de un aprendizaje.

Conclusiones

En consecuencia a lo observado en los trabajos realizado por los estudiantes y análisis desarrollados bajo el sustento teórico del Análisis Didáctico, podemos afirmar que la comprensión del concepto matemático Sucesos Independientes es complejo para los estudiantes, por ende en su proceso de aprendizaje se enfrentan a dificultades que el docente debe prever.

En esa misma línea, las principales dificultades identificadas se pueden resumir como identificar sucesos involucrados en un experimento, determinar espacio muestral y casos favorables de un suceso, además de confundir el concepto suceso con su probabilidad.

De acuerdo a lo anterior, es fundamental que el docente no solo conozca estas sino que también las aborde en clase, pues de no hacerlo impide que los estudiantes adquieran aprendizajes significativos, así como también no permite profundizar en contenidos probabilísticos que ayudan a desarrollar el pensamiento lógico matemático y entregan conocimiento para comprender información en la vida cotidiana.

Además es importante que a la hora de enseñar dicho concepto sea a través de situaciones en contexto real donde interviene, pues facilita su aprendizaje, según lo hemos evidenciado en el análisis de actuación de nuestro estudio.

Finalmente destacamos la importancia de los conocimientos previos en la adquisición de nuevos aprendizajes, pues "*simple y sencillamente, la actividad constructiva no sería posible sin conocimientos previos que permitan entender,* *asimilar e interpretar la información nueva, para luego, por medio de ella, reestructurarse y transformarse hacia nuevas posibilidades"* (Díaz & Hernández, 2002, pág. 147).

Referencias

Azcárate , P., Cardeñoso, J., & Serrado, A. (2005). Los obtáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *International Association for Statistical Education, 4(2)*, 59-81.

Baptista, P., Fernández, C., & Hernández, R. (2006). *Metodologia de la Investigación*. México: McGraw-Hill, Interamericana.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadistica*. Granada: Universidad de Granada.

Cid, E. (2009). *Guía didáctica para el profesor de Matemática 2° medio*. Santiago: Santillana.

D'Amelio, A. (2004). *Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes: concepciones y dificultades.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17, 138-144. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Darrigrandi, F., Ramos, M., & Zañartu, M. (2012). *Texto para el estudiante matemáticas 2° educación media.* Santiago: Santillana.

Díaz , F., & Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. México: McGraw-Hill Interamericana.

Duval, R. (2000). *Representación, visión y visualización: Funciones cognitivas en el pensamiento.*Lille: Université du Littoral Côte-d'Opale, Boulogne, et Centre IUFM Nord Pas-de Calais.

Gómez , P. (2005). *El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Málaga: Comunicación presentada en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática (1 de diciembre de 2005).

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y disdeño curricular en matemáticas. *Revista EMA,* 7(3), 251-292.

Hérnandez , R., & Sánchez , E. (2001). *Exploración de Problemas Asociados a la Regla del Producto en Probabilidad*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 14, 86-395. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido*: Teoría y práctica. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.

Lupiáñez , J., & Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *Revista PNA 3(1),* 35- 48.

Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada: Universidad de Granada.

MINEDUC. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Minimos Obligatorios de la Educación Básica y Media.* Santiago: Chile.

MINEDUC. (2011). *Matemática Programa de Estudio Segundo Año Medio*. Santiago: Chile.

Rico, L. (1998). Complejidad del Currículo de Matemáticas Como Herramienta Profesional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1(1),* 22-39.

Rincón, L. (2007). *Probabilidad y Estadistica*. Ciudad de México: Facultad de Ciencias UNAM.

Sánchez , E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Revista Scielo, 21(2)*, 39-77.