Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 1 / ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

DIFICULTADES EN LA CONSTRUCCIÓN E INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES EN ESTUDIANTES DE NIVEL SUPERIOR

DIFFICULTIES IN THE CONSTRUCTION AND INTERPRETATION OF GRAPHS OF FUNCTIONS IN HIGHER EDUCATION STUDENTS

Itzel González Rodríguez, José David Zaldívar Rojas, Silvia Carmen Morelos Escobar
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila (México)
igrod1995@gmail.com, david.zaldivar@uadec.edu.mx, silvia.morelos@gmail.com

Resumen
En este artículo se presenta una investigación de nivel licenciatura sobre la importancia de las gráficas de funciones dentro del currículo escolar y para la explicación dentro del concepto de función, así como el desempeño de estudiantes de nivel superior en dos de nueve tareas de construcción e interpretación de gráficas de funciones de nivel secundaria, y modificadas por nosotros. Se evidencia las dificultades presentes en los estudiantes al momento de pasar de una representación verbal a una gráfica: la confusión de la trayectoria de una situación descrita gráficamente como la imagen de la situación; la discretización de variables continuas y, preferencia por la linealidad al momento de construir una gráfica que requiere de intervalos cóncavos. Consideramos que se requiere centrar la atención en dichos resultados ya que estudiantes de nivel superior obtuvieron resultados similares a estudiantes de nivel secundaria, lo cual puede decirnos que hay un estancamiento en el aprendizaje de las matemáticas, especialmente con el concepto de función.

Palabras clave: construcción, interpretación, gráficas, dificultades, representación

Abstract
This paper presents a research, at first-degree level, into the importance of graphs of functions in the school curriculum and for the explanation within the concept of function, as well as higher education students' performance in two of nine tasks of construction and interpretation of function graphs of the secondary level, which were modified by us. Students' difficulties when moving from a verbal representation to a graph are evident: the misinterpretation of the trajectory of a situation graphically described as the image of the situation; the discretization of continuous variables; and preference for linearity at the moment of constructing a graph that requires concave intervals. We believe that there is a need to focus attention on these outcomes, as higher education students achieved results similar to those of high school students, what shows that there is an impasse in mathematics learning, especially with the concept of function.

Key words: construction, interpretation, graphs, difficulties, representation

Introducción

Las matemáticas pueden ser accesibles para cualquier persona, sin embargo, su comprensión puede llegar a ser compleja a comparación de otras ciencias, ya que se utilizan representaciones, que uno no puede tocar, oler o probar. De la misma manera, hay que ser conscientes que los números tienen diversas representaciones, por ejemplo, un número decimal también se puede representar como una fracción; un número se puede representar como un límite de una sucesión o un símbolo sobre un papel; una ecuación lineal puede verse como una recta (Acuña, 2001).

Ahora bien, la noción de función es una pieza fundamental para compartir y expresar una gran cantidad de información de manera concreta. Deulofeu (1991), menciona en su trabajo que, en el lenguaje, la falta de significación puede ser un problema para el desarrollo o entendimiento de un concepto. Este mismo problema se presenta en el lenguaje matemático, porque a un concepto se le pueden asociar más de una idea o representación, tal como ocurre con el concepto de función, que tiene más de una representación: tabular, algebraica, lenguaje verbal, gráfica y de manera simbólica. Sin embargo, la noción cambia dependiendo del contexto en el que se aplica. Una definición que da Sierpinska (1992) del concepto de función es que existe una terna (X, Y, f), donde "X" y "Y" son conjuntos y f es el subconjunto "$X \times Y$" tal que si (x, y) pertenece a f ,y (x, y') pertenece a f ,entonces $y = y'$. El problema es entender esta definición, especialmente, para estudiantes que no han desarrollado un pensamiento matemático abstracto.

Tradicionalmente, las gráficas cartesianas son pieza clave dentro del currículum para el entendimiento del concepto de función, además de que permiten trabajar con una gran cantidad de variables y visualizar patrones. Sin embargo, la centración unidireccional en la estrategia ecuación-tabla-gráfica, y el excesivo tratamiento algebraico provoca en los estudiantes importantes dificultades en la lectura, interpretación y construcción de gráficas, aun cuando en otras disciplinas las gráficas son pieza clave para interpretar resultados (Zaldívar, 2016). En esta forma para encontrar gráficas de ecuaciones, se le presentan al estudiante muy pocas oportunidades donde tenga que interpretar información gráfica o trabajar con información gráfica para resolver problemas. No se le permite anticipar el tipo de variación que se espera; ya que carece de escalas, datos, determinación de los nombres de los ejes (García y Perales, 2007). Y lo más importante: el estudiante no identifica que la expresión algebraica (ecuación) y la gráfica son representaciones de la misma situación funcional (Bell y Janvier, 1981; Deulofeo, 1991; Acuña, 2001).

Planteamiento del problema

El trabajo de Leinhardt, et al (1990), fue esencial en nuestra revisión, no sólo porque gran parte de nuestras referencias lo citan, también por su estructuración y organización que realizaron sobre las dificultades reportadas con respecto a las gráficas de funciones en la literatura, y se complementa con trabajos de Bell y Janvier (1981), Sierpinska (1991), Bowen y Roth (1998), Dolores, (2004), García y Perales (2007), Zaldívar (2016; 2017). Entre las dificultades que reporta Leinhardt con respecto a la interpretación y construcción de gráficas son: interpretación icónica, cuando el estudiante toma la gráfica de una situación como una imagen; la confusión de la pendiente con la altura, discretización de variables continuas, donde se colocan puntos dentro del plano cartesiano o de los ejes, cuando no es necesario; preferencia por la linealidad, que ocurre porque para el estudiante es más fácil recurrir a intervalos rectos que a intervalos cóncavos, y como la dificultad de identificar las variables, quién es la variable independiente y dependiente, entre otros, lo cual nos da indicios de que hay conceptos matemáticos que todavía no son claros para los estudiantes.

De acuerdo con nuestra revisión bibliográfica sobre la importancia de las representaciones gráficas de una función es que se propone la siguiente pregunta de investigación:
¿Qué dificultades presentan los estudiantes de nuevo ingreso de una carrera en Ingeniería relativas a tareas de construcción e interpretación de gráficas cartesianas?

El objetivo general de esta investigación es evidenciar la necesidad de contar con cursos donde se reflexione y se centre la atención sobre las gráficas de funciones, para así optimizar el avance en el aprendizaje. Para ello, se propone una investigación cuyo objetivo específico es analizar qué dificultades presentan estudiantes de nuevo ingreso que aún no inician con Calculo 1 en la universidad, con respecto a tareas de interpretación y construcción de gráficas cartesianas con la intención de contar con un sustento adecuado para reflexionar y poner en discusión aspectos de las asignaturas que actualmente se imparten en dicha facultad en los primeros semestres de las carreras presentes en la facultad (como la muestra fue tomada de esta institución), se toma en consideración de que una adecuada ubicación de cursos iniciales que pudieran redituar en la comprensión del tema de las funciones y sus gráficas permitiría un desarrollo conceptual progresivo en los estudiantes de manera que posiblemente se impactaría en los índices de deserción y reprobación escolar, en este caso, dentro de la Facultad de Ciencias Físico Matemática de la Universidad Autónoma de Coahuila.

Marco conceptual

Las tareas de funciones, gráficas de funciones y graficación se divide en dos categorías principales: *interpretación* y *construcción* (Leinhardt et al., 1990). La Interpretación se refiere obtener el sentido de una gráfica o situación, el encontrar relación entre dos variables, y su patrón de variación conjunta. Es el darle sentido a la gráfica, ya sea de una ecuación o de una situación. Su enfoque puede ser desde atender punto a punto, intervalos de puntos, hasta la lectura de toda la gráfica. La interpretación, en su forma global, es el distinguir las características importantes, es decir, los intervalos de aumento o disminución, puntos máximos y mínimos. Aquí es donde entra la interpretación cualitativa, que es el entender la relación funcional de las variables de la gráfica de la función. Como nos dicen Leinhardt, et al. (1990) se relacionan frecuentemente con las características globales. El saber interpretar una gráfica es una herramienta importante para desarrollar en los estudiantes, ya que los aspectos visuales son importantes para el entendimiento del concepto de función (Yavuz, 2010).

Por otro lado, de acuerdo con el trabajo de Leinhardt, et al. (1990), la Construcción se refiere a generar algo nuevo a partir de datos. Está relacionada a predecir o detectar patrones, un ejemplo de ello sería el comportamiento de un fenómeno. Implica poner nombre a los ejes de la gráfica, títulos y etiquetas, valores numéricos, así como una gráfica a partir de puntos, construir puntos dados ciertos datos y también el escribir la ecuación de acuerdo con la gráfica plasmada. Esta última acción es muy poco frecuente en el aula de clases, ya que no sólo requiere de la construcción, sino también de la interpretación.

Roth y Bowen (1998) confirman que uno de los puntos críticos dentro de las dificultades en el área de ciencias es en la de interpretación y construcción de gráficas de funciones en todos los niveles educativos y es impresionante que aún se encuentren en estudiantes o profesionistas de grados superiores. Muchos alumnos conocen los gráficos, las expresiones algebraicas; incluso pueden manipularlas, pero siguen siendo incapaces de interpretar las características globales de la información contenida en ellas (Swan, 1985; Bell y Janvier, 1981). Por lo tanto, no logran la conversión de gráfica a ecuación y viceversa.

Aspectos metodológicos

Con la intención de responder la pregunta de investigación anteriormente planteada, se consideró una investigación de corte cualitativo de las respuestas de estudiantes de un grupo de 41 alumnos de primer semestre, que aún no cursaban el tema de funciones en la materia Cálculo 1, de la Carrera de Ingeniería Física, de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila. Para la toma de datos sobre las dificultades que presentaban los estudiantes del grupo anteriormente descrito, se diseñó una prueba experimental que involucraba 9 tareas, de las cuales sólo se mencionarán 2 en el presente manuscrito: la Tarea 2.1: “El auto de carreras”, donde se involucra la interpretación y construcción de un gráfico; y la Tarea 2.4: “Llenado de recipientes II”, que involucra una construcción. Cabe mencionar que para el diseño de estas tareas se tomaron en consideración algunas de los ejercicios propuestos en Swan (1985) y Leinhardt, et al (1990). Las tareas no fueron tomadas de manera literal, sino que se realizaron algunas adecuaciones de contexto o del tipo de fenómeno que atendían, las cuales se presentan de la siguiente forma:

Tarea 2.1: El auto de carreras

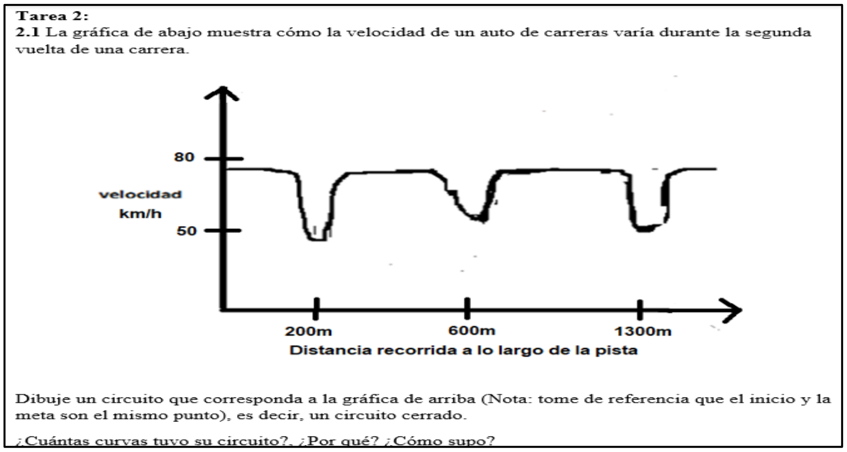


Figura 1. *Tarea 2.1: El auto de carreras.*

La tarea 2.1 es de interpretación, porque requiere reconocer las características que presenta la gráfica del recorrido de un auto de carrera (una gráfica de situación), y con ello, dibujar el circuito que corresponde.

Tarea 2.4: Llenado de recipientes II

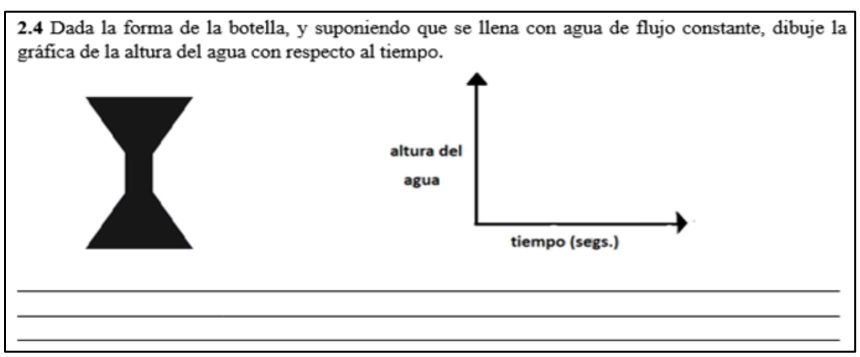


Figura 2. *Tarea 2.4: Llenado de recipientes II.*

La tarea es de construcción, hay que bosquejar la gráfica que corresponde a la situación, en este caso es una botella que tiene forma de vasos en los extremos y en la parte central, un cilindro.

Discusión de resultados

En el trabajo de Leinhardt et al. (1990) se organizan las dificultades en tareas de interpretación y de construcción de gráficas cartesianas rescatadas de otros trabajos (Bell y Janvier,1981; Sierpinska, 1991; Deulofeo, 1991; Bowen y Roth, 1998; Acuña, 2001; Dolores, 2004; García y Perales, 2007; Yavuz, 2010; Zaldívar, 2016, 2017) de la siguiente manera:

Dificultades en la tarea de Construcción: escalas de los ejes, discretización de variables continuas, identificación de variables, nombre de los ejes.

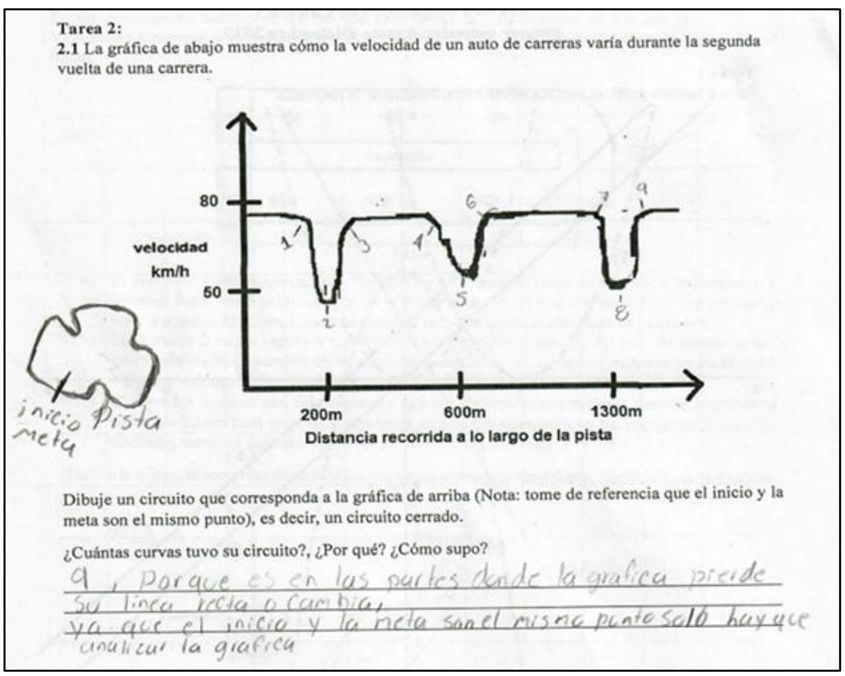
Dificultades en la tarea de Interpretación: interpretación icónica, confusión pendiente/altura, confusión intervalo/punto.

En base a las dificultades que se encuentran en la literatura, se dio la tarea de analizar cuáles están presentes en los estudiantes de nivel superior en cada tarea, por lo que a continuación se expondrá en cada tarea del instrumento aplicado, el análisis que se llevó a cabo y por ende, la dificultad que le corresponde.

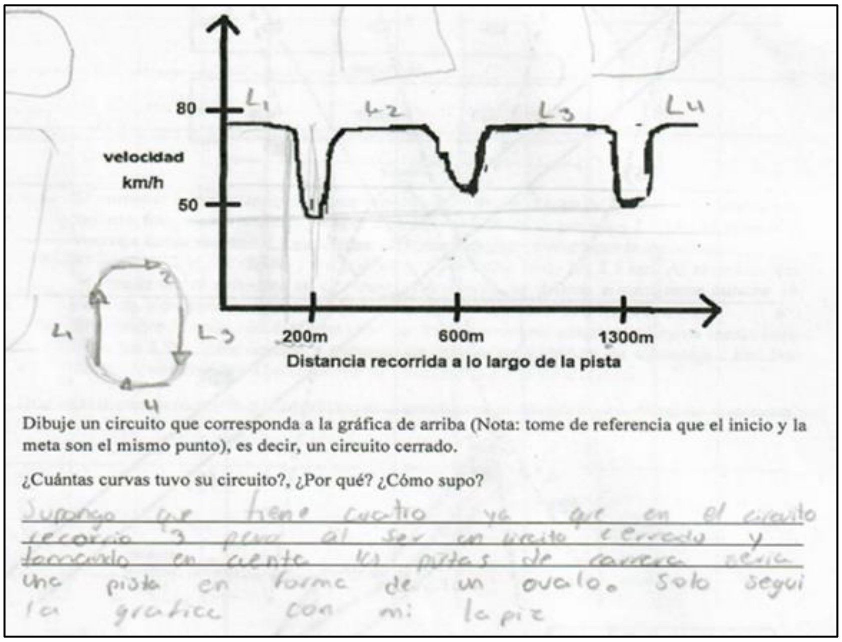
Sobre la Tarea 2.1: El auto de carreras

El objetivo era reconocer e interpretar las variaciones que presenta la gráfica de distancia vs tiempo del recorrido de un auto en una carrera y construir el posible circuito recorrido. (Describir la relación funcional utilizando palabras e imágenes).
Se tomaron tres aspectos a evaluar: el dibujo del circuito, cuántas curvas se identifican y la justificación del circuito propuesto. Cabe mencionar que esta fue la tarea donde los estudiantes presentaron mayor porcentaje de dificultades, creemos que la razón principal de ello es porque esta tarea involucra una gráfica de una situación y se requiere de su interpretación para el poder dibujar su circuito correspondiente.

A continuación, se muestran las respuestas de un par de estudiantes que al respecto de la lectura de la gráfica, presentan una *Interpretación icónica* (ver figura 3).



(a)



(b)

Figura 3. Respuestas de dos estudiantes en la tarea 2.1: Interpretación icónica.

Un alumno (Figura 3a) interpretó la imagen de la gráfica tal cuál fue la trayectoria recorrida. Tomó las curvas de la gráfica como las curvas del circuito recorrido. Escribió que las curvas son los momentos donde el trayecto deja de ser recto, por lo que identificó 9 "curvas", por lo tanto, su circuito lo dibujó como si tomara el inicio del recorrido en la gráfica y lo uniera con el final del recorrido en la gráfica. Otro alumno (figura 3b) leyó los tramos de velocidad constante en la gráfica como los lados del circuito. Son tres tramos de velocidad constante tomando en cuenta que el inicio y el fin del circuito es el mismo punto, pero él hizo caso omiso, por lo que contó 4 tramos, por lo tanto, dibujó cuatro lados constantes n el circuito, dicho de otra manera, el circuito tiene 4 curvas, por lo que el dibujo tiene una forma de rectángulo. Sin embargo, el estudiante reconoce que hay 3, pero no toma en consideración que era la segunda vuelta.

Sobre la Tarea 2.4: Llenado de recipientes II

El objetivo de esta tarea era bosquejar la gráfica que corresponda al llenado de agua del recipiente dado tomando en cuenta los factores de la forma del recipiente que se presentan. En este caso, se puede observar que algunas dificultades están relacionadas a la *preferencia por la linealidad debido al uso de la discretización de la situación.*

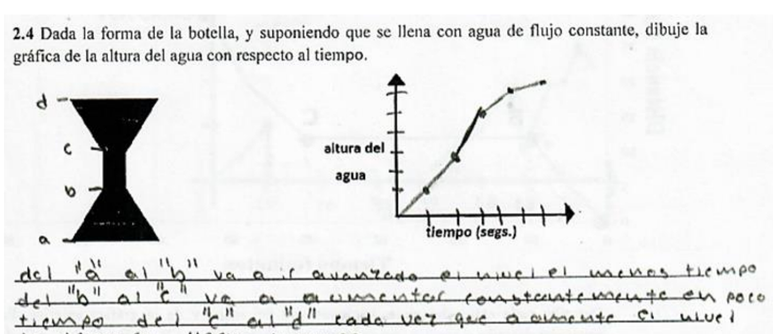


Figura 4. Respuesta de un estudiante en la tarea 2.4: Tendencia por la linealidad.

El estudiante de la figura 4, dividió al recipiente en cuatro partes para graficar por intervalos. Una manera en la que se apoyó para bosquejar el llenado de agua del recipiente fue el agregar escalas a los ejes. Marcó puntos dentro de la gráfica, esto quiere decir, que marcaron que en un segundo hay cierta cantidad entera de altura de agua, cuando nuestro problema es de datos continuos.

En esta tarea, nuevamente se presenta la *Interpretación icónica* (ver figura 5).

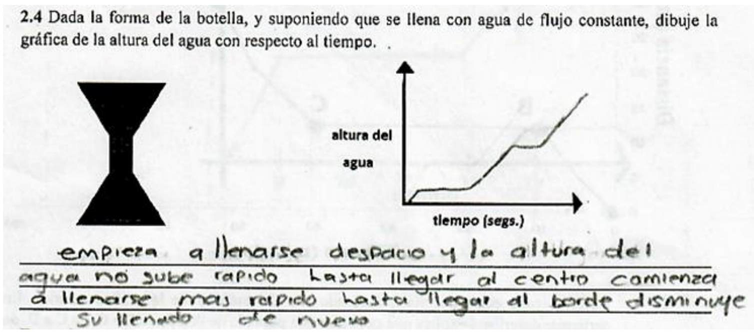


Figura 5. Respuesta de un estudiante en la tarea 2.4: Interpretación icónica.

Este estudiante dibujo la gráfica del llenado del recipiente con agua constante de la siguiente manera: identifica que el recipiente inicia llenándose de manera lenta, sin embargo, no visualiza que la altura del agua dentro del recipiente aumenta, ya que confunde el crecimiento de la altura del agua con la dimensión de la base inferior del recipiente, por lo que dibuja en la gráfica un intervalo horizontal, después observa que en la zona media del recipiente es donde avanza más rápido, dibuja un intervalo de crecimiento constante, cuando en ese intervalo, la pendiente de la gráfica debe ser mayor. Para el bosquejo de la base superior del recipiente, ocurrió la misma situación que con la base inferior. Este estudiante, dibujó en la gráfica como un pequeño tramo recto, la parte donde cambian las dimensiones radicalmente de la base superior (del tramo vertical del recipiente con la parte superior del mismo, si se observa, tiene una forma de trapecio invertido), y al final bosqueja que la altura del agua aumenta constantemente, cuando la pendiente en ese intervalo debe ser menor. Sin embargo, de manera escrita es capaz de explicar correctamente la variación entre las variables, no obstante, a que su gráfica es incorrecta.

En otras ocasiones, se presentó que una de las dificultades de los estudiantes radicaba en considerar la *gráfica como forma del recipiente.*

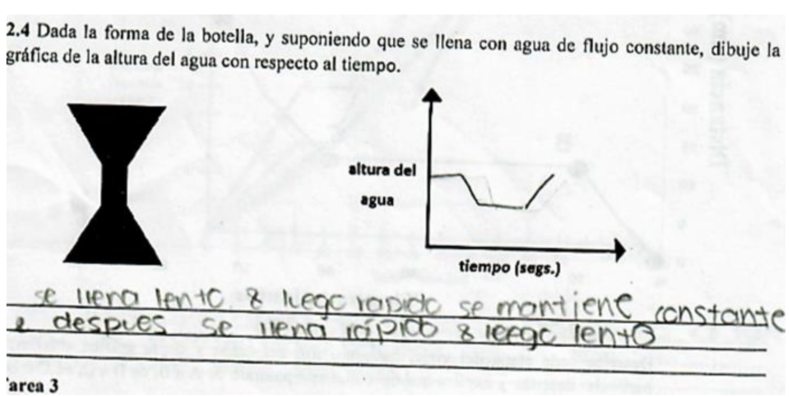


Figura 6. Respuesta de un estudiante en la tarea 2.4: La altura como forma del recipiente.

Aquí lo único que se puede visualizar es similar al caso anterior que los tramos donde la altura de agua avanza lento, que se marcan como tramos rectos horizontales, sin embargo, el estudiante marca que, en el tramo más delgado del recipiente, pierde altura el agua, no sé si deba a que leyó como que tiene poca capacidad de agua, por lo que altura baja. Sin embargo, su explicación verbal si es correcta, pero su gráfica se parece a la forma del recipiente en forma horizontal.

Comentarios finales

Como se ha comprobado la existencia de las dificultades en la construcción e interpretación de gráficas de funciones, se menciona lo siguiente:
El 91% de los estudiantes que respondieron la tarea 2.1 reflejaron el mismo error: el dibujo del circuito del auto de carreras como la gráfica que describe el recorrido del auto de carreras, esto quiere decir que presentaron interpretación icónica. Gran parte no tuvo problema en responder que el circuito consta de tres curvas, pero al momento de pasar la información gráfica a un dibujo, tuvieron complicaciones para ello. Confundieron la trayectoria como la propia situación. Esto se puede explicar debido a que muchos libros enfocan su atención a gráficas y funciones abstractas más que a las gráficas de situaciones.

Continuando con los resultados de la tarea 2.4, el estudiante presentó una interpretación icónica, esto quiere decir que confunde la forma del recipiente como la gráfica del llenado de dicho recipiente. Otro concepto matemático que probablemente causa dificultades en este caso de análisis tiene que ver con la variación no lineal. Lo anterior provoca una preferencia por la linealidad, donde el estudiante debe de dibujar la gráfica del llenado del recipiente con intervalos cóncavos, al inicio de la gráfica y al final, que son los intervalos que corresponden a la base inferior y la base superior del recipiente. Como consecuencia, discretizan las variables cuando el problema que se presenta es continuo, y al momento de construir la gráfica correspondiente a la situación, dibuja puntos, para luego unirlos, lo que nos lleva a decir que algunos estudiantes tienen la idea de que una gráfica de función se construye a partir de algunos puntos unidos por segmentos de recta, cuando en realidad hay infinitos puntos en la gráfica de la función.

Hay que mencionar que se encontró un error que no se menciona en la literatura, pero podría verse como interpretación icónica, que ocurre cuando el estudiante confunde la pendiente de la gráfica del llenado del recipiente como la forma del propio recipiente. Lo interesante, es que el estudiante logra describir bien cómo varía la altura del agua dentro del recipiente, pero al momento de plasmarlo gráficamente, tiene complicaciones, podría decirse que hay dificultad para la visualización de la gráfica correspondiente, o más bien, dificultad para la identificación de las variables presentes, o incluso, el darles nombre a los ejes.

Estos resultados, consideramos que nos están mandando señales de que razonemos sobre qué es lo que esta pasando en el progreso de la enseñanza matemática entre el nivel secundaria y bachillerato, ya que los ejercicios que tomamos como referencias y modificamos para nuestro instrumento, los obtuvimos de libros y artículos que donde se aplicaron tareas de construcción e interpretación de gráficas a estudiantes de nivel secundaria, con resultados similares a los que obtuvimos. Dada las similitudes de nuestros resultados con los que encontraron los autores en sus trabajos, consideramos que se necesita potencializar las gráficas como herramientas, especialmente lo que nos puede otorgar el leer e interpretar gráficas, como apoyo cuando la abstracción no se ha desarrollada o está en desarrollo, especialmente con el concepto de función. Además, sería importante que se implementen actividades con un enfoque donde el estudiante identifique y describa el tipo de variación en cualquier contexto y lograr relacionarlo con una gráfica, con la finalidad de que se trabaje con la noción de variación y lograr pasar de una representación a otra (Bell y Janvier, 1981), para poner en práctica más el análisis de problemas y no la memorización.

Referencias bibliográficas

Acuña, C. (2001). Conversión entre gráficas y ecuaciones a través de la descripción de semiplanos. *Educación Matemática, 13(3),* pp 75-92.

Alsina, C. Burgués, C., Fortuny J., Giménez, J. y Torra, M., (2013). Capítulo: Enseñar matemáticas. En el libro: Enseñar matemáticas. GRAÓ, Barcelona, pp 9-37.

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa (RELIME), 19(1),* pp 15-40.

Backhoff, E., Vázquez, R., Baroja, J., Guevara, G. y Morán, Y. (2017). México en el proyecto TALIS-PISA: Un estudio exploratorio Importancia de las escuelas, directores, docentes y estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

Bell, A. y Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics (FLM), 2(1),* pp 34-41.

Bowen, G. y Roth, W. (1998). Lecturing Graphing: What features of lectures contribute to student difficulties in learning to interpret graphs, *Research in Science Education,* 28*(1),* pp 77-90.

Deulofeu, J. (1991). El lenguaje de las gráficas cartesianas y su interpretación en la representación de situaciones discretas. *Comunicación, Lenguaje y Educación (CL&E),* pp 11-12, 77-86.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 7(3)*, pp 195-218.

García, J. y Perales, F. (2007) ¿Comprenden los estudiantes las gráficas cartesianas usadas en los textos de ciencias?*, Enseñanza de las ciencias, 25(1)*, pp 107–132.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function, *Journal of Mathematical Behavior (JMB), 17(1),* pp 123-134.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stain, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching*, Review of Educational Research, 60(1)*, pp 1-64.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Harel & Dubisnky,* pp 25-58.

Swan, M. (1985). *The language of functions and graphs. An examination module for secondary schools.* Join Matriculation Board, pp 6-240.

Yavuz, Í. (2010). What does a graphical representation mean for students at the beginning of function teaching? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(4)*, pp 467-48.

Zaldívar, J. (2016). Usos de las gráficas, tecnología y visualización en el desarrollo del pensamiento matemático, *Boletín C+1, 1*(3)*,* pp 3-6.

Zaldívar, J. (2017). Reflexiones en torno al uso de las gráficas en la enseñanza de las ciencias, *Tlahuizcalli, 3(9),* pp 13-24.