VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

ANÁLISIS DE COMPLEJIDAD Y LA RELACIÓN DE LOS TEMAS DE LINEALIDAD, RAZONES Y PROPORCIONALIDAD: ENFOQUE GEOMÉTRICO DESDE EL PROGRAMA DE ERLANGEN

ANALYSIS OF COMPLEXITY AND THE RELATIONSHIP BETWEEN THE TOPICS OF LINEARITY, RATIO AND PROPORTIONALITY: GEOMETRIC APPRAOCH FROM ERLANGEN PROGRAMM

Larissa Sbitneva, Nehemías Moreno Martínez, Margarito Ramírez Auces
Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Colegio de Bachilleres del estado San Luis Potosí (México)
larissa@uaem.mx, nehemias_moreno@live.com, margarito.ramirez@cbslp.edu.mx

Resumen
Se describe una secuencia de tareas en las que se realizan prácticas matemáticas relacionadas con la complejidad del concepto de proporcionalidad. Se empleó una metodología cualitativa etnográfica para dar cuenta de los significados emergentes a partir de la interacción entre cuatro profesores, dos estudiantes y el profesor-investigador, en el contexto de un curso experimental universitario de Geometría con números complejos. Nuestro análisis se apoya en la teoría de Enfoque Ontosemiótico que proporciona herramientas que permiten describir la complejidad de los objetos matemáticos y de las prácticas de las que emergen. Los resultados muestran que la complejidad de la proporcionalidad está relacionada con sus distintas formas de representación. Mediante este estudio se pretende ayudar a los profesores a entender las dificultades que enfrentan los alumnos en el estudio de los temas de geometría analítica y álgebra lineal.

Palabras clave: proporcionalidad, complejidad, Enfoque Ontosemiótico, representación

Abstract
A sequence of tasks which involve mathematical practices related to the complexity of proportionality concept is described. A qualitative ethnographic methodology was used to account for emerging meanings from the interaction between four professors, two students and the professor-researcher, in the context of an experimental university course in Geometry with complex numbers. Our analysis is based on the theory of Onto-semiotic Approach that provides tools which allow describing the complexity of mathematical objects and the practices from which they emerge. The results show that the complexity of proportionality is related to its different forms of representation. This study aims to help teachers understand the difficulties students face in the study of the topics of analytical geometry and linear algebra.

Key words: proportionality, complexity, Onto-semiotic approach, representation

Introducción

Motivaciones: proporcionalidad en contextos algebraicos y sus representaciones semióticas

En el estudio de las ecuaciones del segundo grado respecto a la variable compleja, cuyas imágenes geométricas son circunferencias o rectas en el plano cartesiano, surgió la cuestión relacionada con la proporcionalidad de las ecuaciones, expresada por la proporcionalidad de las matrices asociadas a tales ecuaciones (Schwerdtfeger, 1979).

Para el estudio de familias (haces) de las circunferencias (rectas) se emplea la combinación lineal de las matrices asociadas, formadas por los cuatro coeficientes de las ecuaciones, dando un lenguaje unificado a los problemas geométricos tales como la intersección, ortogonalidad, etc., de ambos tipos de las configuraciones geométricas. Cabe enfatizar que las combinaciones lineales en lenguaje algebraico matricial no causan dificultades a los estudiantes, sin embargo, la interpretación geométrica asociada y expresada mediante combinaciones lineales de circunferencias (haz de circunferencias) parece ser asombrosa. De modo análogo, las combinaciones lineales de ecuaciones lineales son aceptados, pues en el proceso de simplificaciones de sistemas de ecuaciones lineales (método de Gauss) con variables reales también se realizan las operaciones de multiplicación de una ecuación por un escalar no nulo para obtener la ecuación proporcional a la inicial: prácticamente se realizan combinaciones lineales entre las ecuaciones. Sin embargo, su interpretación geométrica como haz de rectas causó dificultades para su aceptación, a pesar de que en la práctica de enseñanza de la variedad de las formas de ecuaciones de líneas rectas fácilmente se pasan de unas formas de las ecuaciones a otras que representan la misma recta. Cabe destacar que se trata de representaciones semióticas distintas dentro del mismo registro cartesiano. Respecto a este fenómeno: la facilidad de manipulaciones con expresiones algebraicas, y las relaciones con las interpretaciones geométricas correspondientes, M. Chasles llega a las conclusiones:

> ...reflexionando sobre los procedimientos del álgebra y buscando las causas de las enormes ventajas que aporta a la geometría, ¿no se percibe que debe una parte de sus ventajas a la facilidad de las transformaciones que se aplican a las expresiones que se introdujeron al comienzo? (Piaget y García, 2016, p. 92).

Para dar una idea podemos elucidar ¿Cómo se puede dar una interpretación geométrica de la combinación lineal de las ecuaciones? Hay una forma de ecuación llamada haz de rectas
$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = Ax + By + C,$
que representa la familia de todas las rectas que pasan por el punto de intersección de las dos rectas involucradas.

En el libro de texto de Lehmann (Lehmann, 1994) se considera esta forma como haz de rectas en la sección Art. 36, donde también podemos encontrar las observaciones que explican este fenómeno y que el autor le confiere gran importancia

> …a medida que avancemos en el estudio de la Geometría analítica veremos que, una vez que se haya establecido la ecuación general de un tipo particular de curva, las propiedades características distintivas de esa curva pueden determinarse por una investigación de los coeficientes de su ecuación (Lehmann, 1994, p. 66).

Enfatizamos que esta forma de ecuación representa un caso particular de haz de circunferencias, en el registro semiótico de coordenadas cartesianas, lo que está explicado en el Art. 42 en el libro de Lehmann (Lehmann, 1994).

Cabe destacar que las consecuencias geométricas de posiciones mutuas particulares se interpretan gráficamente en el libro de Desarrollo conceptual de geometría en las páginas 141 y 144 (Arcos y Sepúlveda, 2011).

Sin embargo, el cambio de registro a la variable compleja permite obtener las representaciones semióticas de proporcionalidad de ecuaciones en forma matricial e ilustrar todas las geometrías no-euclidianas por medio de representaciones geométricas como en las páginas 64 y 67 del libro Geometry of comlex numbers (Schwerdtfeger, 1979), lo cual nos indica el desarrollo de la geometría más allá de la geometría euclidiana. Este aspecto se expresa en palabras de J. Poncelet, quien estableció fundamentos teóricos para la geometría proyectiva: "Es también inspirándose en los métodos algebraicos que van a dar un sentido 'puramente geométrico' a los elementos 'imaginarios'" (Piaget y Garcia, 2016, p. 92). Y buscando las interrelaciones más profundas se plantea la pregunta "¿No es natural que se busque introducir en forma similar en la geometría pura transformaciones análogas realizadas directamente sobre las figuras propuestas y sobre sus propiedades?" (Piaget y Garcia, 2016, p. 93). Así, naturalmente F. Klein llegó a sistemas de transformaciones geométricas y sus invariantes como el método fundamental de la geometría que ha sido realizado en el Programa de Erlangen propuesto en 1872.

Proporcionalidad en el contexto algebraico y aritmético: representaciones de rectas paralelas en el plano

En las prácticas matemáticas se cuestiona ¿Cuándo dos ecuaciones lineales del primer grado (1) $Ax + By + C = 0$ y (1') $A'x + B'y + C' = 0$ definen la misma recta? Se establece que dos rectas d y d' son paralelas si y solo sí tienen la misma dirección, expresada por sus vectores directores $\vec{u} = \{-B, A\}$ y $\overrightarrow{u'} = \{-B', A'\}$ que deben ser colineales, es decir, $\vec{u} = \gamma\overrightarrow{u'}$, lo que significa la proporcionalidad de dos vectores.

Sean dos vectores directores colineales: la colinealidad de dos vectores se verifica a través de la proporcionalidad de sus componentes correspondientes, $-B = \gamma(-B')$ y $A = \gamma A'$, lo que se expresa empleando las proporciones de los coeficientes en la forma siguiente $(-B) \div A = (-B') \div A'$, o de otro modo, cuando se expresa como la proporción $A' \div B' = A \div B$.
Observaciones: Aquí nos enfrentamos con el problema de definiciones de proporciones que emplean las razones. Es preciso destacar que, en los manuales, se simplifica la situación: la definición que se emplea expresa el significado de proporción aritmética.

Por la definición en los libros de texto, dos parejas de números reales no nulos α, β y α', β' forman una proporción $\alpha \div \beta = \alpha' \div \beta'$, si existe tal número $k \neq 0$ que se cumple $\alpha' = k\alpha,\ \beta' = k\beta.$ El número k se llama el coeficiente de proporcionalidad.

Nota: En el contexto de ecuaciones anterior, empleamos proporcionalidad en esta última interpretación, casí nunca se usa representación con las razones.

En nuestro problema de relacionar dos rectas paralelas, cuando la proporción $A' \div B' = A \div B$ puede ser extendida hasta la proporción de los tres pares de los coeficientes $A' \div B' \div C' = A \div B \div C$, entonces las rectas coinciden. Efectivamente, en este caso todos los coeficientes de una ecuación entre (1) y (1') se obtienen de los coeficientes de la otra por medio de multiplicación por un número μ (no cero), es decir: $A' = \mu A$, $B' = \mu B$, $C' = \mu C$, lo que expresa el significado de la igualdad de tres proporciones aritméticas.

Pero esta proporcionalidad implica que las ecuaciones (1) y (1') son equivalentes, en el sentido que representan la misma recta: efectivamente cualquier punto $M(x, y)$ que satisface a una ecuación también satisface a la otra.

Al revés, si dos rectas d y d' coinciden (es la misma) entonces se verifica la proporción entre tres pares de los coeficientes, lo que se escribe tradicionalmente en la forma de proporciones que expresan la igualdad de las razones $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$.

Cabe destacar que se evita igualar estas razones a su razón común, que está representado por el valor numérico μ: el problema se radica en las consideraciones histórico-filosóficas relacionadas con la inconmensurabilidad de los segmentos, cuya magnitud se expresa por números irracionales, pero estos no fueron permitidos para fungir como razones.

Es importante mencionar que en el caso de ecuaciones de segundo grado también se puede afirmar que si dos ecuaciones representan el mismo objeto geométrico (una cuádrica) entonces son proporcionales y viceversa. Esto se usa libremente en varios contextos sin explicación o justificación alguna.

Con base en los resultados de reflexiones expuestos arriba los participantes llevaron a cabo un análisis de la situación en las prácticas matemáticas respecto a una variedad de las ecuaciones que representan la misma recta en el plano cartesiano. Nuestro análisis permitió aclarar, que los cinco tipos de ecuaciones no son diferentes registros en el sentido de la teoría de R. Duval, sino que son diferentes representaciones semióticas dentro del mismo registro de coordenadas cartesianas. Así la ecuación $y = mx + b$, se obtiene de la ecuación general (1) por la multiplicación por $\frac{1}{(-B)}$, si $B \neq 0$, y puede ser transformada en la forma $(y - y_0) = m(x - x_0)$, que debe verificarse para todas parejas de (x, y). Esta proporcionalidad expresa la condición de que todos los puntos pertenecen a la misma recta. Las demás expresiones para ecuaciones de las rectas en el plano son simplemente expresiones algebraicas proporcionales a la ecuación lineal general.

Se puede ver la situación considerada como una metáfora: que articula (demuestra conexión entre) la proporcionalidad de dos ecuaciones lineales y de sus coeficientes: es el otro modo de decir que las rectas son paralelas o coinciden (Rondero y Font, 2015).

Linealidad y proporcionalidad en el contexto de transformaciones geométricas

La linealidad es el concepto crucial en la definición de las transformaciones lineales en geometría desde el enfoque de F. Klein: se conservan líneas rectas por la definición, que requiere que los puntos alineados se transformen a los puntos alineados.

En las prácticas computacionales de los cursos de la geometría analítica se emplea la unicidad de la recta que pasa por dos puntos dados (según el axioma 1 de Euclides) en la forma de proporciones $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ (que expresan razones de catetos en los triángulos semejantes) que deben cumplirse si y solo si el punto arbitrario (x, y) pertenece a la recta, es decir, cualquier punto debe ser colineal con los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), lo que se verifica con la proporcionalidad de los segmentos sobre ejes coordenados $y - y_1 = m(x - x_1)$, $y - y_2 = m(x - x_2)$ (que demuestra coincidencia de las inclinaciones).

Sin embargo, estas proporciones no expresan el concepto de linealidad donde se requiere proporcionalidad $y = mx$, es decir la dependencia funcional directamente proporcional.
Entonces la linealidad se visualiza geométricamente solamente por las rectas que pasen por el origen (la linealidad de una aplicación lineal en álgebra lineal significa que para la aplicación $x \to y(x)$, se debe cumplir $(x_1 + x_2) \to y(x_1) + y(x_2)$, sin embrago, para la ley $y(x) = kx + b$, $y(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) + 2b$).)

La consideración de las razones de segmentos es crucial en la geometría afín debido a que se conservan bajo transformaciones del grupo afín $y\,(x) = Ax + b$ (producto algebraico del grupo lineal con la matriz A y grupo de traslaciones): así, por ejemplo, el centro de gravedad se conserva, el punto medio se transforma en el punto medio de la imagen.

En el caso de las matrices que representan las transformaciones proyectivas, aparece la proporcionalidad entre dos matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}$ (proporcionalidad que tampoco se expresa en la forma de razones) y toda clase de matrices proporcionales representa la misma transformación proyectiva.
Cabe destacar que los invariantes del grupo de transformaciones proyectivas en el plano se representan por medio de la razón doble (razón de dos razones) $\frac{AC}{CB} \div \frac{AD}{DB} = k$ (o razón cruzada) de los segmentos dirigidos en una recta. Es preciso enfatizar que aunque la colinealidad de los puntos y la colinealidad de sus imágenes se conserva, pero no se preserva el orden entre tres puntos como es el caso en las transformaciones afines.

Situaciones-Problemas donde intervienen proporciones
Proporcionalidad en el contexto geométrico: relación entre razones de dos segmentos

En los cursos de la geometría analítica y del álgebra lineal se tiene un planteamiento de un problema: Encontrar las coordenadas del punto que divide un segmento dado en una razón dada, si los puntos de extremos se determinan por sus coordenadas en el plano cartesiano (así como en el espacio).

En la geometría elemental se define la razón en la que un punto dado R divide un segmento dado con los puntos de extremos A, B, en la forma $\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \lambda$. La resolución de este problema en el escenario del plano cartesiano requiere conocimientos de la geometría euclidiana respecto a las propiedades de proyecciones ortogonales o bien las técnicas de operaciones con el aparato del álgebra vectorial.

Hemos notado que este problema planteado dentro de la lista de problemas de los exámenes
(formulado de diferentes maneras) nunca había sido elegido por los alumnos para ser resuelto. Sin embargo, este problema puede ser considerada de gran importancia desde el enfoque del programa de Erlangen: pues las proporciones se conservan bajo transformaciones afines.

Nuestras reflexiones respecto a este fenómeno nos llevaron a la necesidad de comparar los niveles de dificultad de tal planteamiento con los demás problemas-tipo que se evalúan en dichos cursos (las demás preguntas son de tipo operacional, requieren solamente aplicaciones de métodos algorítmicos y permiten visualización gráfica inmediata). Además, estos problemas-tipo se tratan de modo igual en todos los textos recomendados. Sin embargo, no es el caso del problema de nuestro interés.

Observamos desde inicio, que, si cada estudiante dibuja su propio segmento, diferente de los demás y del cual se derivan procedimientos en los manuales, es natural hacer pregunta: porque el resultado es válido en general. En este momento es necesario involucrar las transformaciones lineales que ponen en correspondencia todos segmentos posibles con los extremos dados.

Antecedentes

En la búsqueda de explicaciones de razones de dificultades, que experimentan los alumnos con este planteamiento, llegamos a unas suposiciones posibles de las causas, algunas, son de una naturaleza muy profunda.

Primeramente, es preciso aclarar el concepto de una razón: Razones y proporcionalidad en la Escuela Pitagórica permitieron desarrollar la teoría de semejanza de triángulos. Pero la suposición era que los miembros que forman razones, son números naturales, así que las razones permitidas representaban solamente números racionales. Para evitar las expresiones con valores irracionales, como la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro (además es imposible construir el punto), más aun para no revelar el problema relacionado con la inconmensurabilidad de los segmentos expresada por un valor irracional: (como la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado, así como lo más importante para su Escuela, la razón entre la diagonal y el lado de un pentágono), se los presentaban como igualdad de las razones de magnitudes geométricas homogéneas.

Por eso, para las razones $AB \div$ AC $=AC \div BC$ (que expresaban media geométrica) se empleaban expresiones: el segmento AB dividido en media y extrema razón.

Es importante resaltar que la definición de proporcionalidad que se emplea expresa el significado de la definición de proporción de Eudoxo (que se presenta en el libro V de Euclides). De esta manera Eudoxo logró eliminar la dificultad que enfrentaron los Pitagóricas, no definiendo la razón misma, sino la igualdad de razones de segmentos geométricos.

En los libros de texto tradicionalmente se define la razón de dos segmentos rectilíneos $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$, que es representado por un número $\lambda = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$ (racional o ¡irracional!), el cual demuestra cuantas veces el segmento $\overline{EF}$ cabe en el segmento $\overline{AB}$. El número λ se llama la razón del segmento $\overline{AB}$ al segmento $\overline{EF}$, y se escribe $\overline{AB} = \lambda\,\overline{EF}$.

Si el valor de esta razón λ es igual a1, es decir $\overline{AB} = \overline{EF}$, se dice que los segmentos son iguales entre sí o congruentes, es decir, se conservan bajo transformaciones euclidianas. Este concepto nos lleva a la definición de la longitud del segmento AB como una magnitud respecto a la unidad de medida EF . Sin embargo, el problema con el valor irracional no ha sido resuelto hasta 1988, cuando R. Dedikind publicó los resultados de sus investigaciones sobre los fundamentos de la teoría de números (Dedekind, 2014).

Por otro lado, el problema se radica en los tratamientos en los libros de texto y los fundamentos teóricos subyacentes.

En algunos manuales se aborda este problema primeramente en la dimensión uno: el segmento se encuentra en la recta numérica involucrando el concepto de distancia para asignar las coordenadas a los puntos de la recta (Véase Ejemplo 1).

En la dimensión dos las presentaciones de las demostraciones se varían: la mayoría de textos aplica las propiedades de proporciones basadas en geometría elemental (Lehmann, 1994) (que actualmente no se enseña en nivel escolar), además es más complicado, dado que para relacionar las líneas paralelas y los segmentos comprendidos formados por las transversales requiere el razonamiento sobre relaciones de relaciones. El uso de álgebra vectorial presenta otras dificultades relacionadas con los axiomas del espacio vectorial, entre los cuales la existencia un marco de referencia se postula (Florey, 1993).

Marco teórico

El trabajo consideró algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), EOS, y una mirada desde la psicogénesis de las ciencias (Piaget y García, 2016). Del EOS se adoptó la noción de *objetos matemáticos primarios* (lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos), los cuales intervienen en las prácticas que lleva a cabo un sujeto, experto o novato, cuando resuelve una tarea o problema matemático. También se consideró el constructo de *complejidad de un objeto matemático* (Rondero y Font, 2015), el cual no es entendido en un sentido coloquial y que se podría referir a la dificultad que aparece cuando tratamos de comprender el objeto, más bien se refiere a los múltiples significados que el objeto puede tener al encontrarse en distintos contextos. Contraria a la idea de entender que el significado de un objeto se reduce a una única definición, en el EOS se considera que el significado de un objeto es un sistema complejo formado por partes o componentes, donde cada parte es un sentido o significado parcial que adquiere el objeto en determino contexto o situación.

En este trabajo proponemos que la complejidad de un objeto matemático no solo aparece de manera transversal en el currículum escolar en un momento o periodo dado, sino que también aparece a lo largo del desarrollo temporal del concepto, donde quizá algunos de los significados parciales del objeto se van "olvidando" en el transcurso de las etapas, años o siglos. Desde la psicogénesis de las ciencias se considera que "el paso de una etapa otra es por una reinterpretación total de los fundamentos conceptuales (no se logra por el incremento de conocimientos con respecto a la etapa precedente…)" (Piaget y García, 2016, p. 106). Por ejemplo, en una primera etapa, en la geometría las propiedades de las figuras y de los cuerpos se estudiaban como relaciones internas entre los elementos de dichas figuras o cuerpos, posteriormente, ocurrió una segunda etapa caracterizada por una puesta en relación de las figuras entre sí. En esta segunda etapa se puede involucrar el punto del origen de un sistema de referencia para trazar el vector-posición del punto situado dentro del segmento y así relacionarlos por métodos de álgebra vectorial (que es tradicional en las exposiciones contemporáneas); en una tercera etapa, relacionada con el programa de Erlangen, se definieron nuevas geometrías.

Metodología y desarrollo de algunos ejemplos

Se consideró una metodología cualitativa con un enfoque etnográfico (Martínez, 1998), donde se tiene como sujeto de estudio a los participantes de un taller experimental, cuatro profesores y dos estudiantes, y al profesor-investigador que impartió el taller "Geometría con números complejos" en la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP), en el estado de San Luis Potosí, México. Se consideró como objeto de estudio a los significados emergentes a partir de la interacción entre los sujetos en las distintas tareas planteadas, buscando descubrir las estructuras significativas que dan razón de las acciones de los sujetos de estudio. La información referente a los distintitos significados parciales relacionados con la proporcionalidad fue recogida en la forma más completa posible a través del análisis de libros de texto, de la experiencia de los docentes comentada verbalmente en clase, a partir de la producción de los docentes en la resolución de problemas en clase y de tarea, mediante la discusión entre pares y entre los participantes del curso con el docente-investigador sobre el material expuesto en clase.

Planteamiento de problemas-situaciones que involucran a la proporcionalidad

En nuestra práctica docente, el problema de "Encontrar las fórmulas para las coordenadas del punto que divide un segmento dado en una razón dada" se manifiesta como un problema muy difícil. Para introducir un puente entre dos escenarios detectados (con la dimensión uno y dos) con base en la revisión de varios libros de texto, proponemos un acercamiento paulatino a este problema por medio de las figuras donde estos elementos (el punto de división y el origen del marco de referencia) emergen de manera natural dentro de cada contexto.

Razones y proporciones: problemas en contextos geométricos en la dimensión uno

En las actividades propuestas resaltamos dos tipos de razones que permiten la construcción geométrica (localización del punto con regla y compás): una razón está dada por el número racional mientras la otra, por un valor irracional, representado por un ejemplo bien conocido de la razón áurea.

Para el primer caso escogemos una razón peculiar que se deriva de un ejemplo comunicado por uno de los autores (con referencia a un problema planteado por el Dr. R. Cantoral).

Ejemplo 1: Se conoce la razón $\frac{|AK|}{|KB|}=\frac{d}{b}$ en que un punto K divide el segmento AB y se pide detectar la ubicación del punto K, si los extremos del segmento A, B se representan por sus coordenadas $x_A=\frac{a}{b}$, $x_B=\frac{c}{d}$. La respuesta es que el punto K esta expresado por su coordenada $x_K=\frac{a+c}{b+d}$ en la recta numérica que contiene el segmento. La construcción del punto solo requiere el método de Tales.

Ejemplo 2. Para el caso cuando la razón no es representada por un número racional, proponemos la construcción de la llamada sección áurea, que aparece en la Proposición 30-VI de los Elementos de Euclides: Se dice que un segmento está dividido en media y extrema razón cuando el segmento total es a la parte mayor como la parte mayor es a la parte menor, es decir, $AB \div AR = AR \div RB$. La idea de la construcción geométrica está sugerida por la expresión analítica de la solución de la ecuación cuadrática que resulta de la definición de la razón áurea representada en la forma de proporciones $\frac{|AB|}{|AR|} = \frac{|AR|}{|RB|}$, que permite tratar coincidencia de dos razones irracionales en términos geométricos.

Destacamos que ambas construcciones en los Ejercicios 1 y 2 están relacionadas con una figura uni-dimensional que es un segmento.

Problema de establecer las fórmulas para las coordenadas en el caso uni-dimensional no presenta dificultades una vez escogido un punto de referencia en la recta, lo que permite asignar las coordenadas a los puntos-extremos del segmento en términos de distancias del origen $\vec{r}_K = \frac{\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B}{1+\lambda}, (\lambda \neq -1)$.

Comentario 1: en algunos libros de texto se emplea el contexto de la ley de palanca: que permite aclarar la interpretación de la fórmula (Bracho, 2009). El caso de ubicación del punto de equilibrio en un sistema con dos masas diferentes, representa un contexto tangible para el cálculo de coordenadas del punto de división del segmento dado en la razón dada. Consideramos que este contexto estático ayuda entender la estructura de fórmulas para coordenadas del punto de división como punto de posición de un soporte, si se sitúan las masas $m_1 \div m_2 = p \div q$ en los extremos A, B de un soporte. La fórmula deducida para el caso $\lambda = \frac{p}{q}$ obtiene la forma $\vec{r}_K = \frac{q\,\vec{r}_A + p\,\vec{r}_B}{p+q}$. En este caso, se dice que el punto K divide el segmento AB (realiza partición del segmento AB) en la proporción $p \div q$. Si $AK = p\,AB$, y $KB = q\,AB$, entonces, la razón en que K divide el segmento AB es, por la definición, $\lambda = \frac{AK}{KB} = \frac{p}{q}$. Los valores p, q son las coordenadas del punto K y se llaman coordenadas baricéntricas cuando $p + q = 1$ (Bracho, 2009). (Además se puede interpretar como una metáfora entre contextos extramatemático e intramatemático).

Sin embargo, para los casos de cuerpos de tres masas diferentes situadas en el espacio necesitamos otros contextos que requieren las consideraciones de figuras planas para generalización (contexto bi-dimensional).

Razones y proporciones: problemas en contextos geométricos en la dimensión dos

Partimos de los conocimientos previos de los estudiantes. Un problema directo, en un contexto bi-dimensional, está relacionado con la búsqueda del punto de intersección de una recta que pasa por el vértice de un triángulo y divide al lado opuesto en la razón dada $1 \div 1$ (se espera que estudiantes reconozcan que esta recta pasa por el punto medio del lado opuesto, y se llama mediana).

Para un problema inverso, se pide encontrar (recordar) la razón en la que la bisectriz de un ángulo en un vértice de un triángulo divide el lado opuesto (aquí pueden surgir varios métodos de demostración, sin embargo, es preciso solo usar paralelismo). En el nivel escolar solamente se considera el punto que se encuentra dentro del segmento que representa el lado del triángulo.

La importancia de que esta razón, establecida en el teorema de la bisectriz, es igual a la razón entre las longitudes de los lados que forman el vértice del cual se traza la bisectriz, consiste en que la proporción resultante involucra los segmentos no colineales en contraste con el problema de división uni-dimensional.

Además, se manifiesta un fenómeno de importancia crucial: existe otro punto más con la misma propiedad, y que se encuentra fuera del segmento que representa el lado (está en la prolongación del mismo lado). Este punto pertenece a la bisectriz del ángulo externo al ángulo de triángulo con el vértice del cual se traza la bisectriz.

Es preciso que los estudiantes realicen las construcciones de ambas bisectrices (que son perpendiculares entre sí) y los dos puntos notables: así la evidencia de la existencia del otro punto es lograda en las construcciones experimentales.

Estos conocimiento previos son indispensables para enfrentar la Situación-Problema (integradora): “Encontrar el conjunto de todos los puntos P en el plano tales que la razón de los segmentos que unen cualquier punto P con los dos puntos dados A y B sea el mismo”.

Con estos requerimientos se debe formar una proporción $\frac{PA}{PB} = \frac{P'A}{P'B} = r$, $(r \neq 1)$ para cualquier punto $P' \neq P$ (se puede observar que el planteamiento tradicional para elipse e hipérbola relaciona las sumas y restas de distancias de dos puntos fijos, mientras aquí se considera el cociente). De los conocimientos previos mencionados, podemos constatar que sobre la recta AB se encuentran dos puntos con la propiedad expresada, a saber, el punto C, dentro del segmento AB, y el otro punto, sea el punto D, que esta fuera del segmento AB, y es el pie de la bisectriz del ángulo externo opuesto al lado AB.

Cuando P es cualquier otro punto (fuera de la recta AB) que cumple la propiedad del que buscamos, el conjunto es la Circunferencia de Apolonio. Este problema es muy antiguo que ha sido planteado y estudiado por Apolonio de Perga 265—170 a. C. de la Escuela de Alexandría, junto con otras cónicas, y nos provee de un paso hacía figuras planas (dos-dimensional) que requiere las consideraciones de puntos fuera de la recta (Arcos y Sepúlveda, 2011).

Observación 1: Los cuatro puntos sobre la recta CD que se relacionan con la proporción $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$ forman el llamado cuaternio armónico, y la relación entre los segmentos en esta recta se llama la razón doble (o razón cruzada).

Observación 2: En el caso de un triángulo isósceles la razón $\frac{AC}{CB} = r = \frac{PA}{PB}$ es igual a uno, y punto C es el punto medio del segmento AB. ¿Qué podemos decidir sobre el punto D, que es su armónico conjugado? (Arcos y Sepúlveda, 2011).

Aquí, este planteamiento sencillo nos obliga considerar el caso límite para posiciones de los puntos D correspondientes a las posiciones del pie de la bisectriz, e introducir un punto absoluto, ideal, en infinito (o punto impropio de la recta AB).

Podemos resumir: Puntos de división emergen en la recta tanto dentro del segmento como afuera, dando una extensión de los casos tradicionales de la geometría elemental especialmente con la introducción de los puntos impropios (Arcos y Sepúlveda, 2011).
Sin embrago queda el problema de establecer las fórmulas para las coordenadas de estos puntos en el caso bi-dimensional.

Deducción de las fórmulas para las coordenadas del centro de gravedad (baricentro, centro de masas o centróide cuando las masas son iguales) respecto a un sistema de referencia relacionado con el triángulo

Posición del centro de gravedad según Arquímedes

El problema respecto a la ubicación del centro de gravedad de un triángulo es semejante al anterior en el sentido que el segmento se incluye como parte de nueva figura bidimensional, triángulo. En este contexto también es necesario abandonar (salir de) un segmento (una mediana) para buscar su punto común (de intersección) con el otro segmento (otra mediana), de este modo se extiende la percepción desde el espacio uni-dimensional del segmento a otros elementos del triángulo (otro objeto, del cual el objeto inicial forma una parte). O, se puede considerar como una metáfora (Rondero y Font, 2015) el problema del centro de masas de un sistema de cuerpos en contexto de física (sistemas en equilibrio). En este planteamiento el problema de ubicación del centróide ha sido resuelto por Arquímedes (287-212 a.C.). Su razonamiento ha sido de siguiente manera: se colocan las masas iguales en los vértices de un triángulo ABC, y sea O representa el centro de gravedad de esas masas, (a saber, si se apoye el triángulo en este punto, entonces se encontrará en el equilibrio). Ahora se trasladan dos de esas masas en el centro de equilibrio del lado correspondiente BC, es decir en el punto medio que es el centro de gravedad de estas dos masas. La posición del centro de gravedad de las tres masas no se cambia, pero está claro que el punto O debe situarse sobre la mediana AM del lado BC y debe dividirla en la razón $2 \div 1$ (contando del vértice A). El mismo razonamiento se aplica a cualquier otra mediana, lo que implica que todas tres medianas pasan por el punto O. Así Arquímedes demostró que en cualquier triángulo las medianas se intersecan en un punto (centróide del triángulo) y este punto divide la mediana en la razón $2 \div 1$ (según la ley de palanca de Arquímedes). Análogamente al problema anterior tenemos como la primera posibilidad ubicar el origen en uno de los vértices del triángulo y luego escoger el marco de referencia que no está relacionado con la figura, pasando de este modo al nivel bi-dimensional.

Un paso natural a los métodos vectoriales: Contexto geométrico con el centro de gravedad G de un triángulo

En el contexto geométrico la solución con los vectores solo involucra la posición del punto G, centro de gravedad, que es desconocida a priori, solo se requiere que el triángulo con vértices A, B, C debe estar en equilibrio, si toda la figura se apoye sobre un soporte situado en este punto G. Este significa que se anula la suma de los vectores $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$, que representan las fuerzas, es decir, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$. ¿Cómo se localiza este punto? Se puede expresar $\overrightarrow{GC} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB})$. Analizamos la suma de dos vectores del lado derecho entre paréntesis: Es la diagonal del paralelogramo con los lados representados por cada vector de la suma. En este paralelogramo la otra diagonal es el lado AB, y como las diagonales del paralelogramo se cortan en los puntos medios, la mitad de la suma es el vector $\overrightarrow{GM}$, M es el punto medio del lado AB. Como resultado obtenemos $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB})$, o $\overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GM}$. Lo que se puede interpretar de la manera que el punto G divide el segmento CM en la razón 2:1 contando del vértice.

Fórmulas para las coordenadas del centro de gravedad respecto a un sistema de referencia no relacionado con el triángulo

La deducción de las fórmulas es estándar, con base en la relación entre los vectores de posición de los extremos y el punto de división, permite fácilmente establecer la relación $\vec{r}_K = \frac{\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B}{1+\lambda}$ $(\lambda \neq -1)$. Esta fórmula sirve también para el caso cuando los vértices se representan cuerpos con masas diferentes.

Resultados

En el transcurso de indagaciones realizadas por los participantes y con base de sus propias experiencias docentes, empleando los métodos socráticos en sus discusiones y las reflexiones de carácter histórico y filosófico se pueden identificar los siguientes logros.

Se aclararon las relaciones entre las ecuaciones que representan el mismo objeto geométrico, curvas de segundo grado o rectas. Los profesores de geometría analítica se dieron cuenta de que si una recta se expresa en forma de las ecuaciones algebraicas diferentes dentro del mismo registro semiótico entonces estas ecuaciones son proporcionales a la ecuación lineal general de esta recta.

Respecto a las razones: la importancia de distinguir entre valores racionales e irracionales se radica en el desarrollo histórico del concepto.

La proporcionalidad se debe considerar en varios aspectos: en aritmética contemporánea, entre magnitudes (de acuerdo con la teoría de proporciones de Eudoxo), entre segmentos geométricos (no necesariamente alineados) y segmentos dirigidos. Por ejemplo: El problema integrador nos obliga considerar dos posibilidades para localización de los puntos tanto dentro como fuera de la recta que contiene el segmento, e introducir los segmentos dirigidos. Tenemos que resaltar, que el concepto de la proporcionalidad de los segmentos involucra dos razones que coinciden, lo cual es suficiente para determinar una línea recta que pasa por dos puntos dados, sin embargo, no expresa el concepto de linealidad. En el caso de semejanza de triángulos se requiere más de dos razones. También se construye las proporciones infinitas relacionadas con los números irracionales (la sección aurea) ARCOS.

Linealidad es la generalización de la proporcionalidad que se proviene de la igualdad de dos o más razones de los segmentos en geometría, expresada en términos numéricos de magnitudes (medidas) como proporcionalidad en aritmética.

El análisis de los textos reveló que en algunos libros de texto se emplea el contexto de corredor: debemos enfatizamos que no es adecuado relacionar el punto de división del segmento en una razón dada con un objeto físico en movimiento debido a varios argumentos (analíticos, mecánicos, etc.) o bien tan solo porque este punto no puede ocupar el lugar del otro extremo.

Entonces, surge la pregunta natural: Si se cambia la posición del punto, y no es movimiento debería ser considerada como una transformación geométrica, ¿de qué tipo?

El problema-integrador con el círculo de Apolonio nos permite aclarar: es una transformación proyectiva con el centro de proyección sobre la circunferencia, su invariante es la razón doble producido por los cuatro puntos alineados (pies de las bisectrices) C y D, que son conjugados armónicas de los extremos A y B del segmento AB (en este caso son dos puntos fijos de esta transformación proyectiva).

Algunos autores acompañan el problema de división del segmento mencionando una de las paradojas de Zenón. Pero estas paradojas han sido inventadas precisamente contra la idea de movimiento, considerándolo como ilusión.

Conclusiones

A través en nuestro análisis se ha revelado que cuando se hace una presencia de la proporcionalidad en las prácticas matemáticas, se usan diferentes representaciones, se hacen énfasis sobre características pertinentes al contexto de problemas e indican las propiedades correspondientes. Así se evidencia que, como afirma EOS, uno de los componentes de la complejidad se relaciona con las representaciones semióticas.

Para el objeto matemático proporcionalidad hemos seleccionado diferentes contextos intramatemáticos y extra-matemáticos, a cada uno de los cuales se les asocia un conjunto de prácticas matemáticas donde se interviene el objeto matemático de nuestro interés.

Entre los problemas que surgieron en el transcurso del desarrollo histórico de la geometría
son de gran importancia las construcciones de configuraciones correspondientes a los casos relacionados con razones de segmentos geométricos en el sentido Pitagórico (VI siglo a.C) (racionales) e Inconmensurables (proporcionalidad en el sentido de Eudoxo (IV siglo a.C)

Problemas de los cursos universitarios respecto a cálculos de las coordenadas de centro de gravedad: de equilibrio de sistema de masas (conexto extramatemático) se conecta con el problema geométrico de centróide (conexto intramatemático).

Se pone énfasis en la proporcionalidad en los contextos algebraicas (entre pares de ecuaciones y vectores) y en el contexto aritmético (proporcionalidad de los coeficientes de las ecuaciones y componentes de vectores).

La asociación ecuaciones – configuraciones geométricas correspondientes confirma la afirmación en EOS "que se considere que el objeto se puede definir de diferentes maneras equivalentes, que se puede representar por distintas representaciones, etcétera" (Rondero y Font, 2015).

La secuencia de tareas para la enseñanza de la proporcionalidad demuestra representación de su complejidad y a la vez refleja el desarrollo del proceso de la formación del concepto contemporáneo de la linealidad y de geometría a lo largo de proceso histórico.
Se pretende realizar una configuración epistémica que es una herramienta poderosa del EOS que permite realizar un análisis a profundidad.

Referencias

Arcos, I. y Sepúlveda, A. (2011). *Desarrollo conceptual de la geometría*. Toluca: Devi Kali.
Bracho, J. (2009). *Introducción analítica a las geometrías*. México: Fondo de Cultura Económica.
Dedekind, R. (2014). ¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática. Madrid: Alianza Editorial.
Florey, F., G. (1993). *Fundamentos de Álgebra Lineal y Aplicaciones.* México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
Godino, D. J., Batanero, C. y Font, M. V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1
Lehmann, Ch. (1994). *Geometría analítica.* México: Limusa.
Martínez, M. M. (1998). La investigación cualitativa etnográfica en educación: manual teórico-práctico. México: Trillas.
Piaget, J. y Garcia, R. (2016). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI editores.
Rondero, C. y Font, V. (2015) Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias, 33.2,* 29-49. Barcelona: Unversitat Autònoma de Barcelona .
Schwerdtfeger, H. (1979). Geometry of Complex Numbers, Circle Geometry, Moebius Transformation, Non-Euclidean Geometry. New York: Dover Publications Inc.