Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 1 / ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

ROMPIENDO LAS REGLAS DE LA SUMA DE FRACCIONES

BREAKING THE RULES OF ADDING FRACTIONS

Larissa Sbitneva, Nehemías Moreno Martínez, Margarito Ramírez Auces
Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Colegio de Bachilleres del estado San Luis Potosí (México)
larissa@uaem.mx, nehemias_moreno@live.com, margarito.ramirez@cbslp.edu.mx

Resumen
Se presenta una reflexión sobre las implicaciones matemáticas generadas a partir del conocimiento erróneo que tienen algunos estudiantes de bachillerato sobre la suma de fracciones mediante la operación $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Se propone una historieta, que tiene la finalidad despertar el interés de los estudiantes por las matemáticas, que se apoya en algunos elementos teóricos de la Educación Matemática Realista. Se describe una situación cuando dos personajes, Nacho y Mónica, al salir de un examen de matemáticas discuten sobre el problema de sumar fracciones. Nacho sorprende a Mónica con interesantes aportaciones que surgen a partir de reinvención de una estructura algebraica e incluye la interpretación geométrica que permite construcciones de cuaternas armónicas. Los descubrimientos de los estudiantes van más allá de lo que pedía el examen, pero no son conocidos por su profesor de matemáticas, el cual asigna una calificación basada en lo que evidencia el examen que demuestra mayores habilidades matemáticas en Mónica, quien sigue las reglas a pie de la letra.

Palabras clave: fracciones, matemática realista, cuaternas armónicas

Abstract
This paper presents a reflection on mathematical implications caused from the mistaken knowledge that some senior-high school students have about the addition of fractions through the operation $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. A story aimed at awakening students' mathematical interest is proposed. It is based on some theoretical elements of Realistic Mathematics Education. The story describes a situation in which two characters, Nacho and Monica, after finishing a mathematics test, argue about the problem of adding fractions. Monica was surprised at Nacho's interesting contributions which emerged from a re-invention of an algebraic structure and includes the geometric interpretation that allows constructing harmonic quaternaries. The students' findings go beyond what the examination asked for, but they are unknown by their math teacher, who assigned a mark based on what is evidenced in the test that shows greater mathematical skills by Monica, who literally follows the rules

Key words: fractions, realistic mathematics, harmonic quaternaries

Introducción

En este trabajo se describe una historieta, que tiene la finalidad despertar el interés de los estudiantes por las matemáticas, que se apoya en algunos elementos teóricos de la Educación Matemática Realista (EMR) (Alsina, 2009; Alsina, Novo y Moreno, 2016; Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado, 2016). La historieta considera dos personajes, Nacho y Mónica, que son compañeros de grupo y cada cual tiene una concepción muy definida de las matemáticas. El personaje de Mónica se presenta como una alumna puntual, responsable, ordenada, pulcra en sus trabajos y en su presentación personal, sus padres están orgullosos de ella, pues en más de una ocasión por sus calificaciones ha estado en el cuadro de honor. Y el personaje de Nacho se muestra como un joven extrovertido de notas no tan brillantes, pero muy crítico y con gusto por los deportes, sin embrago, debido a sus calificaciones representa una preocupación para sus padres. En una ocasión al salir de un examen de matemáticas los personajes discuten sobre un problema de suma de fracciones y Nacho comenta a Mónica la solución (errónea) que obtuvo al resolver el problema, de donde posteriormente surgen interesantes descubrimientos a partir de la discusión establecida entre los personajes. Los descubrimientos de los estudiantes que van más allá de lo que pedía en el examen no son conocidos por el profesor de matemáticas de ambos personajes, el cual asigna una calificación basada en lo que evidencia el examen, el cual muestra errores algorítmicos. No es el caso de Mónica que obtiene una calificación satisfactoria al poseer mayores habilidades matemáticas y al seguir las reglas y los procedimientos al pie de la letra. Por su parte, Nacho plantea una forma de sumar fracciones, aunque incorrecta, cumple como operación con propiedades conmutativa y asociativa, más no lo hace con la propiedad de la existencia del elemento neutro e incluso presenta incongruencias respecto a la propiedad de orden.

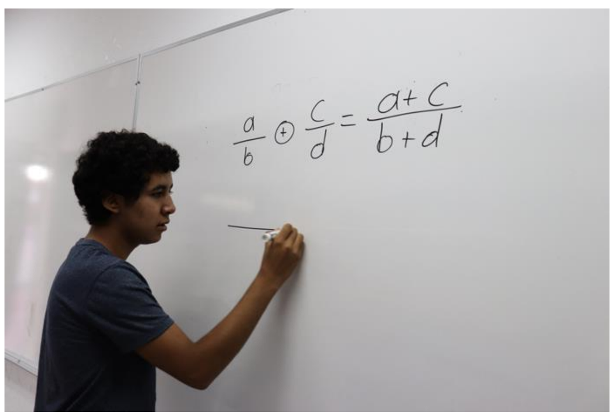

Figura 1. Nacho explica a Mónica su método se sumar fracciones

En la figura 1 podemos observar que algorítmicamente la forma de sumar fracciones que expone Nacho es muy común entre nuestros estudiantes, sin embargo, en este caso Nacho guía a Mónica hacia una reinvención de una estructura algebraica e involucra la interpretación geométrica del resultado de sumar así en forma de coordenadas del punto que divide al segmento definido por los sumandos en una razón dada y además propone algunos problemas donde estas construcciones pueden ser empleadas. Las generalizaciones a los puntos de división externos al segmento sugieren enriquecer las exploraciones con construcciones de conjugados armónicos.

La historieta pretende mostrar algunas de las aportaciones que pueden surgir de un error en la forma de sumar fracciones y se ubica en un momento clave de aprendizaje no valorado en el contexto escolar. Y es exactamente la discusión que al término de un examen sostienen algunos alumnos, quienes en la defensa de sus respuestas contrastan y exponen sus conocimientos e ideas, reconocen sus errores y reafirman algunos conocimientos y procedimientos, actividad que promueve el aprendizaje matemático, pero no es reconocido por situarse en un contexto no controlado por el docente.

Cabe mencionar que, de acuerdo con los datos expuestos en las plataformas de calificaciones del Colegio de Bachilleres del estado de San Luis Potosí, México, lugar donde se llevó a cabo este trabajo, los resultados de las alumnas son superiores al de los alumnos, e incluso los alumnos reprobados en su mayoría son de sexo masculino, lo cual contrasta con las evaluaciones externas tales como PLANEA o las olimpiadas en las cuales en lo general los hombres obtienen mejores resultados.

El propósito de este trabajo es provocar reflexiones respecto de las formas de evaluar el trabajo y el aprendizaje de los alumnos y reconocer que hay temas cuyo contenido matemático requiere de mayor atención, tal como las operaciones con fracciones, los cuales han sido expuestos en diversos trabajos, por la dificultad que presenta su comprensión. Por ejemplo, se han advertido errores inducidos desde la forma de enseñar fracciones en todas sus interpretaciones (como partición, como cociente, como razón, como operador) que lleva a los estudiantes a construir solo agujeros conceptuales (de Di Pego, 2012). Otros han señalado que algunos estudiantes aparentan comprender las fracciones porque utilizan terminología de fracciones y dominan ciertos procedimientos, sin embargo, no reconocen los problemas donde estas pueden ser aplicadas (Parra y Flores, 2008).

Otros investigadores proponen enseñar la suma de fracciones a través del juego con regletas para motivar la participación y el entusiasmo (Meza y Barrios, 2010). En esta misma dirección, en este trabajo se presenta un análisis y algunas reflexiones lógicas sobre las implicaciones matemáticas generadas a partir de la tendencia que tienen algunos estudiantes (representados por un alumno que llamaremos Nacho) de sumar fracciones bajo el siguiente algoritmo:$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, el cual es erróneo de acuerdo al algoritmo que regularmente se enseña en la escuela. Cabe mencionar, que en el contexto de plano cartesiano (caso bi-dimensional) se propone una interpretación trigonométrica con las razones reducidas (una de las coordenadas es la unidad).

Marco referencial

La construcción de la historieta se apoyó en los principios de la EMR: (i) *principio de actividad*, que permite llevar al estudiante a pensar en la matemática como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder "haciéndola". (ii) *principio de realidad*, que sugiere que las matemáticas se aprenden en situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos (iii) *principio de niveles*, donde los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión donde van de lo situacional a lo abstracto; (iv) *principio de reinvención guiada*, donde el aprendizaje se logra a través de la supervisión de una persona experta que lleva al alumno de un conocimiento matemático intuitivo a un conocimiento formal. A través de la lectura y comprensión de la historieta por parte de los estudiantes, se pretende conducirlos a través de los cuatros niveles de la EMR.

En la educación secundaria, uno de los algoritmos más utilizados para enseñar la suma de fracciones se basa en la fórmula dada por la expresión algebraica $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, lo cual centra la atención de los estudiantes en aprenderse a través la misma, esto es, se parte de enseñar el resultado de una actividad (la fórmula) más que de enseñar la actividad misma. Sin embargo, en el presente trabajo se adopta la postura de que la educación matemática debe dar a los alumnos la oportunidad, guiada por el maestro, de reinventar la matemática (no crean ni descubren las matemáticas). En este sentido, hacer matemáticas (matematizar) es más importante que aprenderla como producto terminado (Alsina, Novo y Moreno, 2016). En otras palabras, el énfasis no está en aprender algoritmos, sino en el proceso de construir una algoritmización.

El planteamiento matemático que está de fondo en la historieta ha sido el resultado de otorgar al estudiante, en la clase de matemáticas, la libertad para explorar sus creencias o tendencia "natural", que se establece en el aula como incorrecta, acerca de la suma de las fracciones mediante la operación $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Se cuestionó entonces ¿qué implicaciones matemáticas surgen al escuchar a los estudiantes acerca de llevar a cabo la suma de fracciones mediante esta forma?, y también, ¿cómo guiar a los estudiantes en la búsqueda de dichas implicaciones matemáticas de una manera divertida?

Con lo anterior, se consideró el conjunto de las fracciones (representadas por una razón de dos números naturales) y $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ como una operación binaria y se exploró si satisfacía las propiedades de asociatividad, conmutatividad, elemento neutro y propiedad de orden.

Una vez realizada la exploración se seleccionó a la historieta, como medio de expresión artístico, para presentar de manera secuencial la verificación de las propiedades construyendo al mismo tiempo un relato entre dos personajes.

La historieta, de tipo humorístico, considera viñetas (recuadros donde tienen lugar los diálogos entre los personajes), ilustraciones (dibujos que transmiten al lector lo que ocurre), globos de texto (diálogos de los personajes) e iconos y signos (para representar emociones).

Desarrollo de algunos ejemplos

A continuación, se describe el contenido matemático.
Considerando el conjunto de las fracciones y la operación $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, se observa que dicha operación cumple la propiedad conmutativa, ya que no cambia el resultado al permutar los sumandos. También se puede observar que cumple la propiedad asociativa.

Sin embargo, no se cumple con la existencia de elemento neutro, ya que al considerar $\frac{a}{b} \oplus \frac{x}{y} = \frac{a+x}{b+y} = \frac{a}{b}$, implica que $x = 0$ e $y = 0$, de manera que la fracción "neutra" debería de tener la forma $\frac{0}{0}$, lo que implica que no existe una fracción que representa un elementos neutro. Sin embargo, se sabe que hay conjuntos de números con operaciones que carecen el neutro, por ejemplo, en el conjunto de los números naturales el subconjunto de números pares, con la operación de multiplicación usual, no tiene neutro porque el neutro multiplicativo es uno y no pertenece al subconjunto de los números pares. Por otro lado, tampoco se verifica la propiedad de orden de los números reales ya que se debería tener que la suma de dos números positivos sea mayor que cada uno de ellos.

Lo más interesante es la siguiente consideración: $\frac{a}{b} \oplus \frac{a}{b} = \frac{a+a}{b+b} = \frac{a}{b}$. En álgebra moderna un elemento con esta propiedad tiene nombre idempotente. Hay un ejemplo sencillo: si se define una operación de construir un punto simétrico respecto a un punto dado, entonces este centro de simetría es el elemento idempotente.

Desarrollo de actividades discursivas

Mónica: Hola, Nacho, ¿cómo te fue en el examen?, ¿pudiste resolver el problema de la suma de fracciones?

Nacho: Ohhh, por supuesto sumar fracciones es la cosa más fácil para mí.

Mónica: Ahh, yo pensé que las matemáticas eran difíciles para ti.

Nacho: sumar fracciones es fácil, la fórmula es muy simple, mira si tenemos dos números en la forma de fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ la suma es $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Mónica: ¡Nacho! ¡Eso es incorrecto! Tendrás mal el resultado ¡Esa operación no es válida! ¡Hay Nacho seguro la tienes mal!

Nacho: ¡Eso no puede ser! Mira Mónica, analiza bien mi método de sumar. Es una operación válida, incluso cumple la propiedad conmutativa, si cambiamos el orden de los sumandos el resultado es el mismo.

Por si fuera poco, también cumple la propiedad asociativa pues el resultado de sumar pares de las tres fracciones no depende si primero sumamos las dos fracciones primeras y luego el resultado obtenido sumamos con la tercera fracción, o bien de otro modo: formamos la suma de la primera fracción con el resultado de sumar la segunda con la tercera. Solo gracias a esta propiedad se puede hablar de la suma de tres o más fracciones.

Mónica: Mmmm pues me empieza a parecer interesante tu forma de sumar…. Pero y ¿el elemento neutro? Tu sabes que el elemento neutro de la operación suma de los números reales es el cero y en este caso sería una fracción $\frac{x}{y}$ tal que: $\frac{a}{b} \oplus \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Si calculamos según esta regla $\frac{a}{b} \oplus \frac{x}{y} = \frac{a+x}{b+y} = \frac{a}{b}$, esto solo se cumpliría si $x = 0$ e $y = 0$. Lo cual implicaría que el elemento “neutro” sea $\frac{0}{0}$ y tú sabes que no está permitido dividir entre cero por tanto no hay neutro en tu forma de sumar.

Nacho: Mmm bueno, esto no es del todo importante, pues sabemos que hay conjuntos de números con operaciones buenas que carecen de elemento neutro.

Por ejemplo, en el conjunto de números naturales el subconjunto de números pares, con la multiplicación usual, no tiene neutro, porque el neutro multiplicativo es uno y no está entre los números pares.

Mónica: Ok, ok, sin embargo, no has verificado las propiedades de orden que se cumplen para los números reales. La suma de los dos números positivos debe ser mayor que cada uno de los sumandos y tu forma de “sumar” no cumple con esto: observa que el resultado de la “suma” de dos fracciones no es mayor que cada uno de los sumandos, sino que está entre los sumandos, esto es $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Y esto te lo puedo probar de forma general, observa: comencemos por definir que $a,\ b, c, d$ son números naturales, por tanto si una fracción es menor la otra, digamos, si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, se cumple $ad < cb$ o bien $cb - ad > 0$ ¿de acuerdo?

Demostremos pues que la “suma” es menor que el sumando $\frac{c}{d}$:
$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{c(b+d)-d(a+c)}{d(b+d)} = \frac{cb+cd-da-dc}{d(b+d)} = \frac{cb-da}{d(b+d)}$, lo cual obviamente es mayor que cero pues de acuerdo a lo establecido $cb - da > 0$.

Y seguramente de la misma forma podemos demostrar que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$.

Figura 2. Nacho verifica que con su método de sumar fracciones el resultado es menor que uno de los sumandos

Podemos observar que la discusión continua en la figura 2 donde Nacho aborda un ejercicio en particular.

Nacho: Pensemos en dos fracciones $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ y $\frac{c}{d} = \frac{9}{2}$ y marcamos los puntos con las coordenadas correspondientes sobre un eje horizontal.

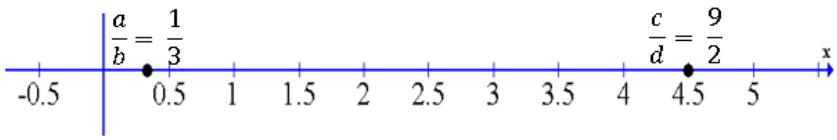

Figura 3. Ejemplo con las fracciones en el eje numérico

En la figura 3 exponemos el caso particular que Nacho elige para continuar su explicación acerca de su forma de "sumar".
Nacho: Observa que si usamos mi manera de "sumar" obtenemos

$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{c+d} = \frac{1}{3} \oplus \frac{9}{2} = \frac{1+9}{1+3} = \frac{10}{5} = 2$. Llamemos a este valor x_C=2, es decir, la coordenada del punto C, como en la figura 4.

Ahora observa algo interesante: el punto C divide al segmento llamémoslo AB en la razón 2:3 si asignamos las coordenadas $x_A = \frac{1}{3}$, y $x_B = \frac{9}{2}$.

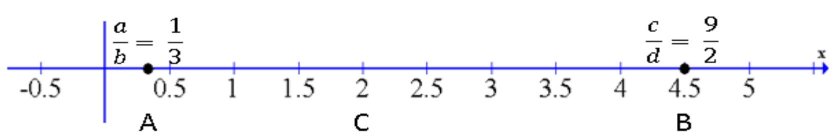

Figura 4. Ejemplo con los puntos determinados por sus coordenadas

¡Compruébalo tú misma!
Mónica: $\frac{AC}{CB} = \frac{\frac{2}{1}-\frac{1}{3}}{\frac{9}{2}-\frac{2}{1}} = \frac{\frac{6-1}{3}}{\frac{9-4}{2}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3}$, es correcto e incluso se puede probar de forma algebraica y el resultado siempre será $\frac{d}{b}$.

Nacho: Y viene lo mejor… Observa esta interpretación geométrica:
Construyamos sobre el segmento AB un triángulo AKB cuyos lados sean $AK = l = 2$ y $BK = m = 3$, tendremos entonces un triángulo como en la figura 5:

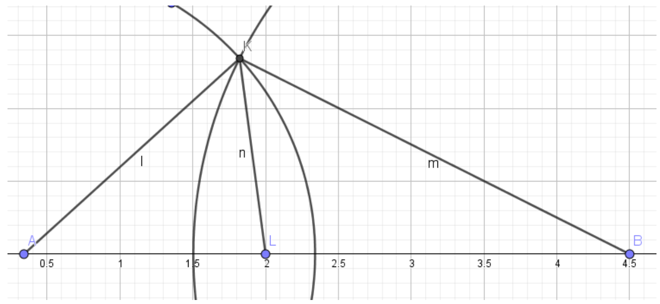

Figura 5. Construcción del punto de división del segmento AB

Observa que con $AK = 2$ y KB=3, la bisectriz del ángulo AKB corta AB exactamente en el punto L, con su coordenada x_L =2 ¡no te parece sorprendente!

Mónica: Pues de hecho eso es el teorema inverso del teorema de la bisectriz que según mis apuntes dice:
Teorema: La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos cuya razón es igual a la razón de los lados que forman el ángulo, es decir en el triángulo BAC, ver Fig.6, si AD biseca al ángulo A entonces $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

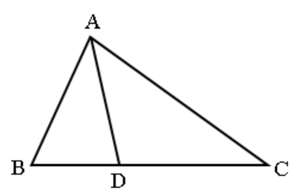

Figura 6. Teorema de bisectriz de un ángulo de un triángulo

Entonces, en la figura 5 el segmento KL es la bisectriz del ángulo AKB en el triángulo AKB porque divide al lado opuesto en la razón que es igual a la razón que forman las longitudes de sus lados $\frac{AK}{BK} = \frac{2}{3}$ y $\frac{AL}{BL} = \frac{AK}{BK} = \frac{2}{3}$ (por nuestra construcción de los lados).

Nacho: ¡Pero además existe algo con la bisectriz del ángulo exterior, sorpréndete! Mira donde corta al eje Ox.

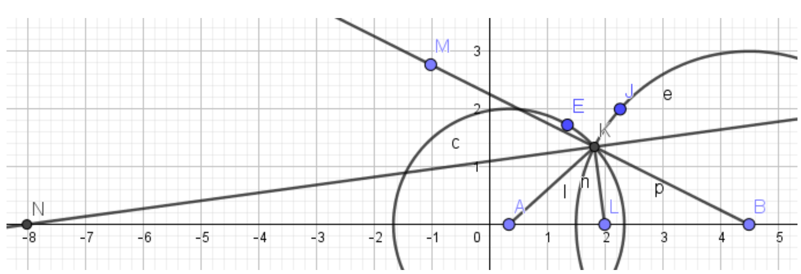

Figura 7. Bisectriz del ángulo externo

Observa en la figura 7, que su pie está en el punto N cuya coordenada es $x_N = -8$. Como todos los puntos A, B, L, N se encuentran sobre el mismo eje horizontal podemos considerar los segmentos dirigidos y entonces ocurren valores negativos en las razones ya que el segmento AN se dirige a la izquierda, en el sentido negativo del eje, y NB, a la derecha, en el sentido positivo del eje Ox. Si $\frac{AL}{LB} = \frac{2}{3}$, entonces $\frac{AN}{NB} = -\frac{2}{3}$. Comprobemos lo que te digo.

Tenemos para la magnitud del segmento (su longitud con el signo) $AN = \frac{-25}{3}$, mientras que la longitud del segmento $NB = \frac{25}{2}$. Entonces, la razón $\frac{AN}{NB} = \frac{\frac{-25}{3}}{\frac{25}{2}} = -\frac{2}{3}$ (ver Fig. 8).

Mónica: Es sorprendente como se relaciona tu forma de sumar con otros temas de la matemática, te felicito, eso no es lo que pedía el examen, pero es muy interesante.

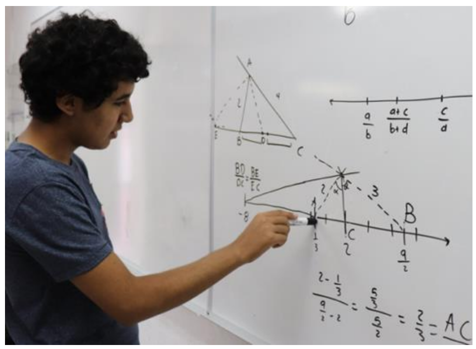

Figura 8. Construcción de segmentos dirigidos sobre el eje numérico

Interpretación geométrica de la "suma" como coordenada del punto de división

Continuemos ahora trabajando sobre el tema que Nacho y Mónica iniciaron con su conversación y vamos a buscar la expresión para la coordenada del punto de división de un segmento determinado por dos fracciones en el caso general. Empleando la figura 5 y considerando punto L como el que divide el segmento A, tenemos las expresiones para las longitudes de los segmentos en términos de las coordenadas de sus extremos: $AL = x_L - x_A$, $LB = x_B - x_L$. De acuerdo con la definición de una razón $r = \frac{AL}{LB} = \frac{x_L - x_A}{x_B - x_L}$.

De esta ecuación podemos obtener $x_L - x_A = r(x_B - x_L)$ y simplificando tenemos $x_L(1 + r) = (rx_B + x_A)$, de donde deducimos la fórmula general, solo cuando $(1 + r)$ no es cero, $x_L = \frac{x_A + rx_B}{(1+r)}$, $(1 + r \neq 0)$.

Es preciso resaltar que en la geometría euclidiana solo consideran las razones positivos, sin embargo, veamos un problema sencillo: en la prolongación del segmento AB encontrar el punto P tal que su distancia del punto A sea el doble de la distancia del punto B (Vyugodski, 1963). Sean, por ejemplo, los puntos A, B dados por sus coordenadas $x_A = 1$ y $x_B = 3$. El punto P que buscamos divide al segmento AB en la razón $r = \frac{AP}{PB} = -(2 \div 1)$ (el signo menos indica que el punto está fuera del segmento). Expresamos las razones $(x_P - x_A) \div (x_P - x_B) = -2 \div 1$, de donde, $x_P = x_A - 2(x_P - x_B)$, entonces,

$2x_P - x_P = x_A + 2x_B$, y $x_P = -1 + 2 \cdot 3 = 5$. O, de otro modo, aplicando la fórmula general, encontramos directamente $x_P = \frac{x_A + rx_B}{(1+r)} = \frac{1+(-2)3}{(1+(-2))} = 5$.

Interpretación geométrica con los Conjugados Armónicos (cuaternas armónicas)

Existe una construcción geométrica muy antigua que ilustra las situaciones con las parejas de los cuatro puntos colineales C,D y A, B tales que se verifica $\frac{AC}{CB} \div \frac{AD}{DB} = -1$ que son conocidos desde los tiempos de Pitágoras como Conjugados Armónicos (cuaternas armónicas) (Sbitneva, Moreno Martínez, Serna Herrera, 2017). En la figura 7 se ven los puntos de conjugados armónicos, pues la razón doble $\frac{AL}{LB} \div \frac{AN}{NB} = -1$ es la razón armónica.

Si continuara la discusión entre Nacho y Mónica seguramente a él le surgirían ideas como
las siguientes: por cierto, ¿por qué son armónicos?

Uno sabe que los tres valores $u, v\ w$ que representan las longitudes de los segmentos digamos $AB, BC\ AC$ forman una terna armónica si la semisuma de sus recíprocos es igual al recíproco del tercero $\frac{1}{2}(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}) = \frac{1}{w}$.

Ante esto Mónica relacionaría esta información con la obtención de la media aritmética:
-"Yo ya conocía de cómo construir media aritmética que es $\frac{1}{2}$(u+v) y también la media geométrica que es $(u \times v)^{\frac{1}{2}}$ (pues, el último se representa como la altura del ángulo recto del triángulo inscrito dentro de un circulo con la hipotenusa como diámetro, lo que ilustra la relación notable entre estas dos magnitudes). Ahora conozco el método de construcción del medio armónico".

A lo cual Nacho diría:
En mi ejemplo, si w representa la longitud del segmento AN de la figura 7, y $AL = u$ y $LB = v$, se cumple. También hay un método elemental de construirlo: En un trapecio el segmento paralelo a las bases si pasa por el punto de intersección de las diagonales representa media armónica entre las longitudes de las bases.

Interpretación vectorial de la "suma" $\frac{a}{l} \oplus \frac{b}{m} = \frac{a+b}{l+m}$ *en un plano cartesiano*

Se puede representar cualquier fracción $\frac{a}{l}$ como la pareja de números (a, l), es decir, como un punto A de un plano cartesiano con las coordenadas (a, l), y también como el vector $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ con las coordenadas (a, l) en este plano cartesiano con el origen O. Del mismo modo podemos ver la otra fracción $\frac{b}{m}$ que es el otro par de valores (b, m), que pueden ser interpretados como coordenadas del otro punto B, o como el vector $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Con esta óptica nuestra "suma" $\frac{a}{l} \oplus \frac{b}{m} = \frac{a+b}{l+m}$ representa el vector con las coordenadas $(a + b, l + m) = \vec{w}$ y, por la ley de paralelogramo de la suma de dos vectores geométricos expresada por medio de sus coordenadas, obtenemos $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

También podemos ver la relación con las funciones trigonométricas,
Reducimos el vector (a, l) a la forma $\left(\frac{a}{l}, 1\right)$, que representa las coordenadas un vector $\vec{p} = \left(\frac{a}{l}, 1\right) = \frac{1}{l}(a, l)$, $\vec{p} = \frac{1}{l}\vec{u}$, colineal al vector $\vec{u}$, y observamos que $\vec{p} = \frac{1}{l}\vec{u}$ caracteriza la misma recta por el origen con la pendiente $k = tg\ \theta = \frac{l}{a}$, siendo su vector director.
De modo análogo formamos el vector reducido $\vec{q} = \frac{1}{m}(b, m) = \left(\frac{b}{m}, 1\right)$, $\vec{q} = \frac{1}{m}\vec{v}$.

Luego, si $k = tg\,\theta = \frac{l}{a}$ para la recta con vector director $\vec{u}$, entonces $\frac{a}{l}$ representa $\cot\theta$.
Del mismo modo $k_1 = tg\,\varphi = \frac{m}{b}$, para la recta con vector director $\vec{v}$, entonces $\frac{b}{m}$ representa $\cot\varphi$. Nuestra "suma" $\frac{a}{l} \oplus \frac{b}{m} = \frac{a+b}{l+m}$ representa el vector con las coordenadas $(a+b, l+m) = \vec{w}$, su forma reducida será $\left(\frac{a+b}{l+m}, 1\right)$.
De este modo se puede ver los puntos $\left(\frac{a}{l}, 1\right)$ y $\left(\frac{b}{m}, 1\right)$ como puntos de intersección de las rectas OA y OB (con las pendientes correspondientes) con el eje de cotangentes. Por eso el punto

$$\left(\frac{a+b}{l+m}, 1\right)$$

sería la representación del punto de intersección con el eje de cotangentes de una recta intermedia entre nuestros dos rectas iniciales.

¡Sin embargo, no representaría ninguna relación entre los ángulos!

Aplicación en un contexto de la vida cotidiana: relación de concentraciones

La interpretación de las fracciones que expresan las concentraciones de las soluciones proviene de la Conferencia Magistral en RELME 31 comunicado por el DR. R. Cantoral. la pareja de coordenadas reducida nos expresa la cantidad de una sustancia para una unidad de líquido (por ejemplo). Así las fracciones simplemente indican que $a \div l = \frac{a}{l} \div 1$,
de acuerdo con las definiciones de las proporciones.

Se puede extender el discurso sobre proporciones geométricas debido a Eudoxo y su relación con inconmensuralidad e irracionalidad (lo que significaba sin razón).

Implicaciones

El propósito de presentar este trabajo es provocar la reflexión en los docentes de matemáticas en torno a la forma de evaluar a esos alumnos cuando en ocasiones sus ideas o sus formas de trabajo no se ajustan al procedimiento visto en clase, sabemos que es complicado encontrar algunos Nachos en nuestro grupo, sin embargo, recordemos que muchos de los matemáticos que nos presenta la historia en su momento fueron catalogados como alumnos no muy brillantes.

Por otro lado, pretendemos que en cada aula provoquemos este tipo de discusiones post examen ya sea a través de pequeños grupos o parejas y aunque esto no cambie la calificación sin duda provocará aprendizaje, el cual permitirá una mayor comprensión de nuestra asignatura y nos ahorrará algunos dolores de cabeza.

Algunos resultados que podemos compartir:
Materiales didácticos para proponer los problemas que fomenten el pensamiento lógico deductivo basado en resultados de búsqueda de las cuestiones coherentes.

En las fuentes bibliográficas encontramos material que nos ha proporcionado las respuestas a las preguntas planteadas en el texto, así como aclarar la relevancia del tema, y todo esto es el resultado de indagación de artículos de investigación. La forma de sumar fracciones que propone Nacho es un re-invento de la idea del mediante, que fue producido a mediados del siglo XIV, sin embargo fue publicado solo en 1801 por Ch. Haros, quien lo aplicaba a las necesidades de convertir cada fracción a su representación decimal equivalente. Ahora es conocida como sumas de Farey debido a O. Cauchy (1816), quien la estudió y demostró sus propiedades: cada nuevo término de la sucesión de Farey es el mediante de sus vecinos, de aquí es el término. Cabe destacar que nuestro enfoque es geométrico: con las interpretaciones geométricas y trigonométricas demostramos que su valor se encuentra estrictamente entre dos valores de las fracciones sumandos. También el mediante tiene el mismo valor que el promedio de coordenadas de dos vectores: dado que la razón $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ y $\left(\frac{l+m}{2}\right)$ da el mismo valor que $\left(\frac{a+b}{l+m}\right)$ que es el mediante.

Por otro lado, si consideramos la operación de Nacho como operador, que transforma segundo miembro por medio del primer, obtenemos una transformación proyectiva (con su invariante, razón doble, o cuaterna armónica como en nuestro ejemplo numérico).

Algebraicamente, si consideramos la fracción como el cociente, entonces es un número racional, que representa toda clase de equivalencia, y se pierda la propiedad de asociatividad. Por eso es importante distinguir entre los conceptos de fracción como razón de dos números naturales y el cociente que es un número real.

En publicaciones hay más aplicaciones en álgebra abstracta, geometría diferencial de espacios proyectivos y sistemas dinámicos. Por ejemplo, en el álgebra moderna esta operación se relaciona con un álgebra dos dimensional representada por las matrices 2x2, y que representa los números dobles, o números de Cayley. En esta forma se descubren las relaciones profundas con la geometría diferencial de espacios proyectivos en la dimensión cinco.

Conclusiones

Mediante la historieta se pretende que los estudiantes logren un acercamiento a algunos conceptos matemáticos de gran importancia como los de operación binaria, axiomas de grupo, propiedades de orden. A través del discurso de los personajes de la historieta se busca que el estudiante adquiera la libertad de cuestionar las reglas que les presentan en el salón de clases, las cuales aparecen frecuentemente como objetos acabados prescindiendo de cualquier explicación del por qué dichas reglas se plantean de esa manera.

La interpretación geométrica permite desarrollar la intuición y creatividad.

La interpretación trigonométrica permite relacionar aspectos algebraicos y geométricos para interpretar las relaciones entre las magnitudes que surgen en las consideraciones.

Las generalizaciones a los puntos de división externos al segmento sugieren enriquecer las exploraciones con construcciones de conjugados armónicos. Lo que permite entrar de una manera natural a la geometría moderna.

Con esto, se pretende que los alumnos desarrollen un pensamiento crítico, la creatividad, rigor y razonamiento lógico, en concordancia con lo declarado por Hipatia de Alejandría:
defender el derecho a pensar, incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar.

Deseamos expresar nuestros agradecimientos al Lic. Dagoberto Gerardo Pérez Moreno, director del plantel 28 del colegio de bachilleres del estado de San Luis Potosí, por las facilidades para realizar las fotos en el plantel, a Eduardo Jaziel Juárez Martínez por representar el papel de Nacho en la historieta y a Citlalli Guadalupe Ramírez Santana por representar el papel de Mónica.

Referencias

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 119127). Santander: SEIEM.

Alsina, Á., Novo, M. M. L. y Moreno, R. A. (2016). Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos: Aprendizaje realista de la geometría en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *5(1)*, 1-20.

Berciano, A. A., Jiménez-Gestal, C., y Salgado, S. M. (2016). Tratamiento de la orientación espacial en el aula de Educación Infantil desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista. *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 93, 31-44.

De Di Pego, V. P. (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza?. *Revista Pilquen, Sección Psicopedagogía*, *8*, 1-12.

Meza, S. A. y Barrios, G. A. (2010). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones. *Memoria 11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Trabajo presentado en Bogotá, Colombia.* Recuperado el 26 del junio de 2019 de http://tiny.cc/iv564y

Parra, A. M. y Flores, R del C. (2008). Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones. *Educación matemática, 20(1)*, 31-52.

Sbitneva, L., Moreno Martínez, N. y Serna Herrera, L. (2017). Experiencias en el desarrollo de la visualización de invariantes geométricos en el contexto de la visión 3d por computadora con el apoyo de Geogebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 1543-1552.

Vyugodskiy, M.Y. (1963). *Geometría Analítica.* Moscú: Literatura Físico-Matemática.