DEL AULA DE NOVENO GRADO PARA LA OLIMPIADA DE MATEMÁTICA

FROM NINTH-GRADE CLASS TO THE MATHEMATICS OLYMPIAD

Nelson Tomás Hernández Reyes, Carlos Jiménez Tejeda, Dennys Toro Leyva
Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría", Escuela Militar "Camilo Cienfuegos" (Cuba)
nelsonh@cemat.cujae.edu.cu, prof.cjimenezt.2013@gmail.com, dennys.toro@nauta.cu

Resumen
Las competencias de matemática son espacios que permiten a los estudiantes desarrollar habilidades tales como la constancia, el pensamiento lógico y la resolución de problemas. Sin embargo, la posibilidad de no conseguir resolver los problemas que son presentados, provoca que los estudiantes no se sientan motivados a participar en este tipo de competencias. Es necesario trabajar en función de desarrollar la motivación de los estudiantes a participar en la preparación y ejecución exitosa de estos concursos. Este trabajo tiene como objetivo determinar los niveles de preparación que deben alcanzar los estudiantes para enfrentarse a eventos nacionales e internacionales de Matemática. Se propone una categorización de ejercicios de acuerdo con sus niveles de dificultad; se establece un programa y una metodología para el entrenamiento de estudiantes de noveno grado. Además, se presenta un ejemplo de un entrenamiento en Geometría.

Palabras clave: geometría, entrenamiento, problema

Abstract
Mathematics competitions allow students to develop skills such as perseverance, logical thinking and problem solving. However, the possibilities of not being able to solve the problems that are presented in this kind of competitions make students feel unmotivated to participate on them. It is necessary to work in order to develop students' motivation to participate in the successful training and fulfillment of these competitions. This work is aimed at determining the levels of training that students must achieve to face national and international Mathematical Olympiads. The classification of the exercises according to the levels of difficulty is proposed; a program and a methodology for the training of ninth-grade students are established. Besides, an example of training in Geometry is presented.

Key words: geometry, training, problem

Introducción

La matemática es una ciencia que prepara al hombre para enfrentar y solucionar los diversos problemas que se presentan en la cotidianidad, oficio y profesión. Esto se ha manifestado en el transcurso del desarrollo de la humanidad. Incursionar desde edades tempranas en el mundo de las matemáticas, contribuye al desarrollo de la personalidad del individuo, ya que disciplina al estudiante hacia el logro de su constancia, desvelo, paciencia, pensamiento lógico y encanto por encontrar las soluciones a los problemas.

Los concursos de matemática en los diferentes niveles de enseñanza, conocidos en el mundo como Olimpiadas, constituyen espacios donde se pueden desarrollar todas estas cualidades. En el mundo se celebran diversas Olimpiadas de matemática en diferentes niveles de enseñanza. Cuba participa, conjuntamente con las que se organizan nacionalmente, de forma regular en las Olimpiadas de Mayo, Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, Olimpiada Iberoamericana de Matemática, Olimpiada internacional de Matemática y en la Olimpiada Iraní de Geometría.

Sin embargo, la imposibilidad de los estudiantes para resolver los problemas que se plantean en estas olimpiadas de matemática, constituye un fracaso para ellos que atenta en la participación en estos concursos. En Cuba, esta situación se manifiesta en estudiantes que en su tránsito por la escuela han obtenido altos resultados en esta disciplina.

Los autores de la presente investigación se proponen, partiendo de las fortalezas, debilidades y oportunidades existentes en nuestro sistema educacional, el análisis de las problemáticas siguientes: ¿qué nivel de preparación debe alcanzar un estudiante de noveno grado para lograr la motivación hacia la participación en las olimpiadas nacionales e internacionales de matemática? ¿Cuáles son las fortalezas y debilidades del programa de estudio de la asignatura de Matemática de noveno grado para lograr el tránsito de los estudiantes de los niveles escolares hacia los niveles requeridos para su desempeño en estos concursos? ¿Qué otros temas y sistemas de ejercicios se pueden proponer para lograr el tránsito de los estudiantes de los niveles escolares hacia los niveles requeridos para su desempeño en estos concursos?

En el presente trabajo se hará referencia a la Olimpiada de Mayo, a la Olimpiada Iraní, Olimpiadas internacionales donde se participa de manera masiva, así como a la Olimpiada Centroamericana y del Caribe por ser la primera donde Cuba ha participado de manera presencial. En esta última no se ha convocado la participación de estudiantes de secundaria básica, a pesar de que el reglamento los incluye.

Para todo lo explicado anteriormente se proponen los siguientes objetivos:

1. Determinar los niveles de preparación que deben alcanzar los estudiantes para enfrentarse a los concursos y olimpiadas nacionales e internaciones de Matemática.
2. Proponer, a partir del estudio del Programa y libro de texto de noveno grado, otras temáticas y sistemas de ejercicios que contribuyan a alcanzar el tránsito de los niveles escolares a los niveles requeridos para el desempeño de los estudiantes en las Olimpiadas de matemática.

Desarrollo

Las tres Olimpiadas de matemática a las que hacen referencia los autores de esta investigación, se organizan de la siguiente forma:

Olimpiada de Mayo: Tiene dos niveles de participación

Primer Nivel: Estudiantes que no han cumplido 14 años en el año que se efectúa la competencia. En Cuba estudiantes de séptimo grado.
Segundo Nivel: Estudiantes que no han cumplido 16 años en el año que se efectúa la competencia. En Cuba estudiantes de octavo y noveno grado.

Olimpiada Iraní: Tiene cuatro niveles de participación.
Leve: Estudiantes de séptimo y octavo grado
Intermedio: Estudiantes de noveno y décimo grado
Avanzado: Estudiantes de duodécimo grado
Libre: Toda aquella persona que esté interesado (estudiantes, profesores u otros).

Olimpiada Centroamericana y del Caribe: Estudiantes menores de 15 años.
Aunque en estos concursos se presentan problemas de diversas áreas de la matemática, los autores de este trabajo hacen referencia solamente a los problemas de geometría. Estos problemas pueden clasificarse en tres grupos: Problemas de cálculo, Problemas de demostración y Problemas de construcción.

Para el trabajo con los estudiantes, es importante tener en cuenta que los problemas de geometría que aparecen en las olimpiadas de matemática no pueden ser algoritmizados y requieren un proceso de reflexión y exploración que recurre a varios esquemas adquiridos.
Las habilidades que un estudiante debe desarrollar para resolver con éxito un problema olímpico son varias e involucran procesos de reflexión, de ensayo y error, de conjeturas, de búsquedas de patrones, de razonamiento inducción y de deducción.
Indagar y discernir los niveles de dificultad entre los ejercicios y problemas que están en los libros de texto, los que se utilizan para el entrenamiento y los que se presentan en los concursos, es uno de los objetivos de los autores del presente trabajo. Para lograrlo, se utiliza la clasificación realizada por los propios autores en el trabajo presentado en el presentada RELME 33, expuesta a continuación:

Nivel 0: Conocimientos usuales. Ejercicios con soluciones algorítmicas básicas.
En estos se puede implementar de manera inmediata una solución. Solo demandan de una o dos operaciones básicas o del análisis de una sola relación o concepto. Nivel de exigencia mínimo del programa del grado.

Nivel 1: Procedimientos rutinarios. Ejercicios que además del uso de una relación o concepto demandan de la aplicación de un algoritmo. En estos se puede implementar de manera Inmediata una solución.

Las fórmulas, ecuaciones o esquemas necesarios para la solución se obtienen inmediatamente o a partir de una determinada sucesión de pasos simples.
En estos dos primeros niveles, los conceptos, los ejercicios y las relaciones involucradas en la solución se dan de manera explícita. Con ello se puede determinar inmediatamente los recursos matemáticos a utilizar.

Nivel 2: Uso de Procedimientos Complejos. Ejercicios o problemas en los que no se puede aplicar algún procedimiento inmediatamente. En la descripción del problema hay relaciones que no aparecen de manera explícita, ya que requieren cálculos intermedios. Se necesita de una reflexión, de búsquedas para establecer uno o dos procedimientos que conduzcan a la solución. Los procedimientos a implementar pueden requerir de habilidades no usuales como construcciones auxiliares, tecnicismo algebraico, el uso de relaciones y/o propiedades de temas no escolares, entre otras.

Nivel 3: Problemas Complejos. La mayoría de las relaciones involucradas en la situación del problema están implícitas. Problemas en los que no se pueden aplicar algún procedimiento inmediatamente. Se necesitan de varias búsquedas parciales que lo dividan en problemáticas parciales. Los temas y recursos involucrados pueden haber sido tratados recientemente, pero son variados.

Nivel 4: Problemas con alternativas inusuales. Demandan de una creatividad y en ellos se exploran alternativas inusuales.

Teniendo en consideración estos niveles, los autores realizaron la revisión del libro de texto de Noveno grado en el tema de Geometría. (Acosta, S. Quintana, A. Gort, M. Báez, L. Canto, J. Domínguez, O. (2015). Matemática 9^0. grado. La Habana: Pueblo y Educación).

De esta, se concluye que la mayoría de los problemas se encuentra en los niveles 0 y el 1; y solo 5 problemas corresponden al nivel 2 y no existen problemas en los niveles 3 o 4.

En un artículo publicado por Davidson (1989) se plantea que es preciso:

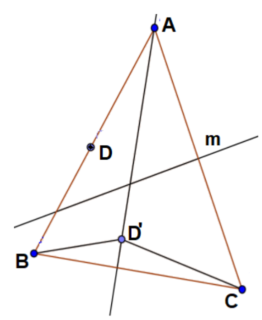
1. Crear en cada escuela, tanto de secundaria como de pre universitario, círculos de interés donde profesores y estudiantes se sientan estimulados por los entrenamientos sistemáticos; es importante que estos entrenamientos comiencen como mínimo, en séptimo grado.
2. Impartir periódicamente cursos y seminarios para aquellos profesores que se dedican en cada escuela, al entrenamiento de los alumnos en la solución de problemas.
3. Elaborar una base material más amplia relativa a este aspecto.
4. Crear centros de entrenamientos municipales o provinciales donde se refuerce la preparación de los alumnos (p.7).

Solo en estos espacios señalados por este autor, se puede garantizar trabajar en función de lograr que los alumnos puedan enfrentar con éxito problemas olímpicos.

Por ejemplo, veamos el siguiente problema del Banco de la X Olimpiada de Matemática Centroamericana y del Caribe

Problema G-1 del Banco X OMCC

Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$ y $\angle BAC = 20^0$. Sea D un punto en el lado AB tal que $AD = BC$. Halle la amplitud del $\angle DCA$.



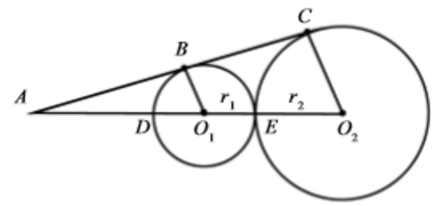
Solución.
Sea m la mediatriz del segmento AC y sea D' el simétrico de D respecto a m. Entonces el $\angle D_1CA = \angle DAC = 20^0$, por lo tanto $\angle D_1CB = \angle ACB - \angle D_1CA = 80^0 - 20^0 = 60^0$. Como los segmentos $D'C = DA = BC$, el triángulo $D'BC$ es equilátero, por lo que D' equidista de B y C al igual que A. Esto significa que la recta AD' es la mediatriz del segmento BC, que es también bisectriz del $\angle BAC$ por ser ABC isósceles, luego $\angle DCA = D'AC = 10^0$

Este problema corresponde al nivel 4: no hay un procedimiento inmediato, necesita de una construcción auxiliar (creatividad) y las conexiones para llegar a la solución son puramente conceptuales.

A continuación, presentamos un ejemplo tomado del libro de texto de noveno grado:

En la figura, $\overline{AC}$ es tangente en B y en C a $C_1(O_1;r_1)$ y $C_2(O_2;r_2)$ respectivamente. Además, se cumple que: $\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{2}$ los puntos A, O_1, E y O_2 están alineados. $E = C_1 \cap C_2$

a) Demuestre que O_1 es el punto medio de $\overline{AO_2}$
b) Demuestra que $\overline{AO_2} = 6r_1$



Comentario de la solución:

a) Como AC es tangente a las circunferencias entonces $BO_1 \perp AC$, $AC \perp CO_2$ luego los radios son paralelos

$\triangle ABO_1 \sim \triangle ACO_2$ Teorema fudamental de la semejanza

Luego $\frac{AC}{AB}=\frac{AO_2}{AO_1}=\frac{BO_1}{CO_2}=2$

Por tanto, O_1 es punto medio de AO_2

b) Como $\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{2}$ y por inciso a $AO_2 = 2AO_1$ entonces $AO_2 = 6r_1$

Se considera que el problema antes analizado se encuentra en el segundo nivel y no en el nivel 3 por las cuestiones siguientes:

- Brinda una figura (la mayoría, o totalidad, de los problemas de geometría que se proponen tanto en entrenamientos como en concursos no cuentan con figura, por lo que el resolutor debe realizarla).
- No es necesario realizar construcciones auxiliares ni aplicar ningún tecnicismo de resolución de problemas geométricos como pudieran ser reducción al absurdo, camino hacia atrás, transformar el problema en otro ya conocido, entre otros.

La gran diferencia entre los problemas de nivel 2 y los de niveles 3 y 4, reflejada en estos dos problemas, muestra que es ineludible realizar acciones que les permitan a los estudiantes tener las competencias necesarias para poder enfrentar problemas de los niveles 3 y 4. Para ello decidimos ajustar el programa de concursos de secundaria básica de la manera siguiente:

Propuesta de las temáticas para los entrenamientos de alumnos de 9no

Algebra

Tema 1.- Razones y proporciones. Problemas
Tema 2.-Trabajo con variables. Tecnicismo algebraico Avanzado.
Tema 3.-Polinomios. Problemas
Tema 4.-Ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Problemas
Tema 5.-Inecuaciones y desigualdades. Problemas
Tema 6.-Funciones. Ecuaciones Funcionales sencillas.

Teoría de números

Tema 6.-Ecuaciones en enteros. Resolución de ecuaciones lineales con dos variables cuyas soluciones sean números enteros. Solución general para este tipo de ecuaciones-Solución de ecuaciones no lineales con dos variables cuyas soluciones sean números enteros. Solución general para este tipo de ecuaciones.

Tema 7.-Congruencia Aritmética. Concepto. Propiedades-Problemas

Geometría

Tema 1.-Elementos básicos de la geometría plana.
Tema 2.-Triángulos. Concurrencia-Colinealidad. Problemas

Conjuntos, combinatoria, tableros, juegos, y coloración de planos.

Tema 2.-Combinatoria. Problemas de Conteo-Problemas de Combinatoria
Tema 3.-Cuadrados mágicos. Métodos para llenar cuadrados mágicos de orden impar-Cuadrados mágicos. Análisis de los cuadrados mágicos de orden par.
Temas Especiales
Tema 4.-Coloración de planos. Principios básicos de coloración de planos-Problemas elementales de coloración de planos.
Tema 5.-Juegos. Teoría de Juegos. Principios básicos-Estrategias a utilizar en algunos juegos.

Los Entrenamientos

Los entrenamientos se estructuraron tomando en consideración los trabajos, breve acercamiento a una metodología para abordar problemas geométricos de tipo olímpico [García, E. 2015] y la Tesis Doctoral Estrategia didáctica para la preparación de concursantes en matemática de la educación preuniversitaria sobre la base de la gestión de conocimiento [Pérez, E. 2014]. Asimismo, se tuvo en cuenta la experiencia en el entrenamiento a los estudiantes de Secundaria Básica de la capital en el curso 2017-2018.

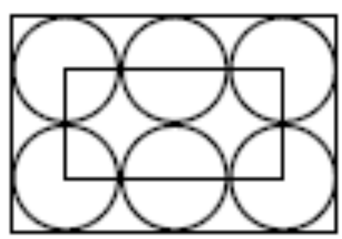
Se estructuraron de la siguiente manera: Ejercicios iniciales (E. Inc); Sistemas de ejercicios (SE); Ejercicios individuales (E. Ind); Tarea

A continuación, ilustraremos una sección de entrenamiento en el tema de geometría.

Circunferencia

Ejercicios Iniciales: Son problemas que se encuentran por lo general en los en los niveles 1y 2

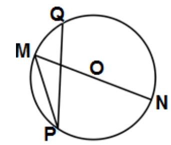
1. (E.Inc)En la figura se muestran 6 círculos idénticos. Sabiendo que el rectángulo pequeño pasa sobre los centros de todos los círculos y que su perímetro es 60 cm, ¿Cuál es el perímetro del rectángulo grande?



Comentario sobre la solución:

Para dar solución a este ejercicio se debe tener en cuenta que: la línea del rectángulo pequeño cubre 12 radios.$P_{rp} = 12r, entonces\ r = 5cm$. Mientras que el rectángulo grande cubre 20 radios: $P_{rg} = 20r = 100cm$

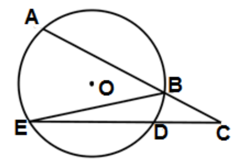
2. (E.Ind)Si O es el centro de la circunferencia,$\overline{MN}$ diámetro y $\angle MPQ = 20^0$.Determine la amplitud del $\angle QON$



Comentario sobre la solución:

Se trabaja con la relación entre la amplitud del ángulo central e inscrito sobre un mismo arco.$\angle QON = 140^0$

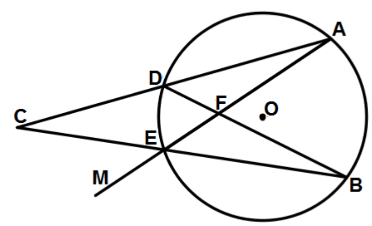
3. (E.Inc)Si$\angle ABE = 40^0, \widehat{BD} = 20^0$.Determina la amplitud $\angle ACE = 40^0$



Comentario sobre la solución:

Se trabaja con la relación entre la amplitud del ángulo inscrito y su arco correspondiente. Luego $\angle ABE = \angle BEC + \angle ACE, entonces\ \angle ACE = 35^0$por ser ABE un ángulo exterior del triángulo BEC. Por otro lado, teniendo en cuenta que el ángulo ACE es un ángulo exterior de la circunferencia: $\angle ACE = \frac{\widehat{AE}-\widehat{BD}}{2} = \angle ABE - \frac{\widehat{BD}}{2} = 35^0$

4. (E.In) En la figura se tiene que $r_{AC}, r_{BC}\ y\ r_{AE}$ son secantes a la circunferencia, $\widehat{AB} = 150^0, \widehat{DE} = 90^0$.Determine las amplitudes de: $\angle DAE, \angle EFB, \angle ACB, \angle BEM\ y\ \angle AOB$



Comentario sobre la solución:
Se trabaja con los aspectos teóricos abordados en los incisos anteriores:

$$\angle DAE = \frac{\widehat{DE}}{2} = 45^0, \angle ACB = \frac{\widehat{AB} - \widehat{DE}}{2} = 30^0, \angle AOB = 150^0$$
$$, \angle EFB = \angle DAF = 60^0, \angle BEM = \angle EFB + \angle DBE = 105^0$$

5. (E.Inc) Considere el triángulo ABCdonde AB es el diámetro del circuncírculo y CD es la altura del triángulo desde el vértice **C**. Si el segmento $AD = 25cm$ y el segmento $BD = 16cm$. Determina:

a) El área ΔABC b) Longitud de la mediana sobre el lado AB

Comentario sobre la solución:

Teniendo en cuenta que AB es el diámetro del circuncírculo, se concluye que el triángulo es rectángulo en C. La altura CD se puede hallar aplicando el teorema de la altura:

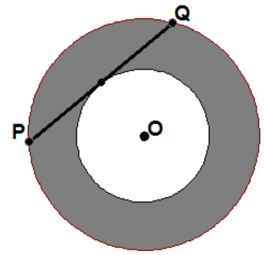
$CD^2 = AD \cdot DB \rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = 20cm$

a) $(ABC) = \frac{AB \cdot CD}{2} = 410cm^2$

b) $lm = \frac{AB}{2} = 20{,}5cm$

Sistema de Ejercicios:

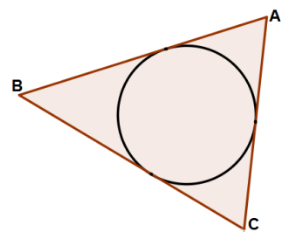
1. (SE) Si el área de una corona circular (región sombreada) es $\frac{25\pi}{2}\mathbf{cm^2}$ ¿Cuál es la longitud de la cuerda PQ de la circunferencia mayor tangente a la menor?

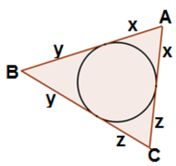


Comentario sobre la solución:

Teniendo en cuenta que la cuerda PQ es tangente a la circunferencia pequeña, llamemos R al punto de tangencia, este será el punto medio de dicha cuerda. Aplicando el teorema de Pitágoras: (1) $PQ = 2\sqrt{OQ^2 - OR^2}$. Sucede que OQ y OR son los radios de las circunferencias. $A_{somb} = \pi(OQ^2 - OR^2) \rightarrow \frac{A_{somb}}{\pi} = OQ^2 - OR^2$. Sustituyendo este resultado en (1) obtenemos que:$PQ = 2\sqrt{\frac{25\pi}{2\pi}} = 5\sqrt{2}cm$

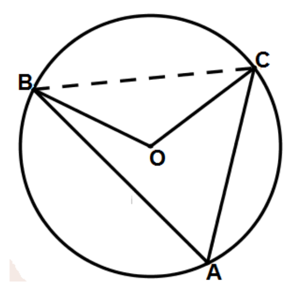
2. (SE) Sea ABC un triángulo cuyo perímetro es de 18 cm. Si el lado a tiene una longitud de 7 cm, determine la distancia desde el vértice A a uno de los puntos de tangencia del incírculo con uno de los lados adyacentes a dicho vértice





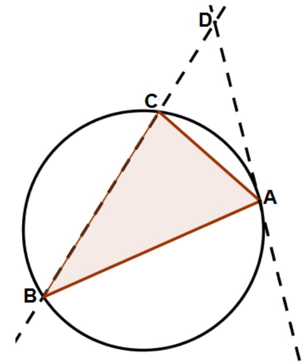
Comentario sobre la solución:
Teniendo en cuenta la figura, $a = y + z, P = 2x + 2y + 2z \rightarrow x + y + z = \frac{P}{2} = p \rightarrow x = 9 - 7 = 2cm$ La relación $x = p - a$ es muy útil para el trabajo con circunferencias inscritas en triángulos rectángulos.

3. (SE) Dado un ángulo inscrito BAC y su ángulo central BOC, tal que: $\angle BAC + \angle BOC = 180^0$ Calcular la amplitud del ángulo OBC.
Comentario sobre la solución:
Una estrategia útil puede ser introducir un parámetro auxiliar: hagamos $\angle BAC = x \rightarrow \angle BOC = 2x \rightarrow 3x = 180^0 \rightarrow x = 60^0$ Por otro lado el triángulo BOC es isósceles de vértice principal O, luego: $\angle OBC = 30^0$



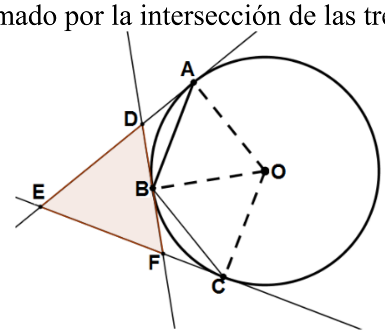
4. (SE) En un triángulo ABC, inscrito en una circunferencia, se tiene que $\angle BAC = 10^0 + 3x$, $\angle ABC = 5x - 10^0$ y $\angle BCA = 76^0$ La prolongación del lado BC corta a la recta tangente r_{AD} en un punto O. Halle las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo ABD.

Comentario sobre la solución:



Teniendo en cuenta los ángulos interiores del triángulo ABC, $\angle BAC + \angle ABC + BCA = 180^0 \rightarrow x = 13^0 \rightarrow \angle ABC = 55^0$ por ser ángulos inscrito y seminscrito sobre el arco AC, $\angle ABC = \angle CAD = 55^0$. Teniendo en cuenta que el ángulo ACB es un ángulo exterior del triángulo CAD, $\angle D = 21^0$. Finalmente, $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 8x = 104^0$

5. (SE)En una circunferencia se dan dos cuerdas que tienen un extremo común y cuyas longitudes son iguales al radio de la circunferencia dada. Construya las tangentes en los tres puntos que tienen en común la circunferencia y las dos cuerdas. Clasifique el triángulo formado por la intersección de las tres tangentes.
Comentario sobre la solución:

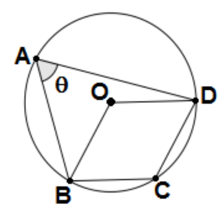


Como las dos cuerdas $AB\ y\ BC$ son iguales a los radios de la circunferencia, los triángulos $ABO\ y\ BCO$ son equiláteros por lo que $\angle AOB = 60^0 = \angle COB$. Teniendo en cuenta que:

$$AO \perp AE, DB \perp OB \rightarrow \angle AOB = \angle EDF = 60^0$$
$$OC \perp EC, DB \perp OB \rightarrow \angle COB = \angle EFD = 60^0$$

, entonces, ΔEFD es equilátero

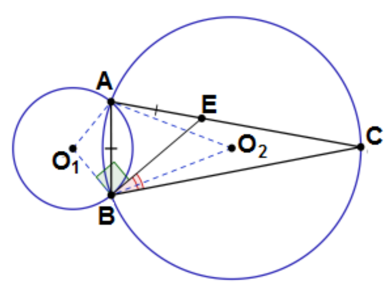
6. (SE) En la figura $BCDO$ es un rombo. Determine el valor del ángulo θ y la medida de las diagonales del rombo si el radio de la circunferencia mide 6 u.



Comentario sobre la solución:

$\angle BOD = 2\angle BAD = 2\theta$. Teniendo en cuenta las propiedades de las diagonales del rombo,$\angle BOC = \theta = \angle BAD$. Como el triángulo BOC es equilátero,$\angle BOC = 60^0 = \theta$
La diagonal OC tiene la misma longitud del radio de la circunferencia, 6 u. Para hallar la longitud de la diagonal BD podemos tener en cuenta que es el doble de la altura del triángulo equilátero BOC, es decir: $BD = 2h_{oc} = 2\frac{OB}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$u.
Interesante también se pudo haber hecho uso de la relación que se cumple para los paralelogramos:$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$ donde a y b son las longitudes de los lados consecutivos del paralelogramo y d_1 y d_2 sus diagonales.
$BD^2 + OC^2 = 4OB^2 \rightarrow DB = \sqrt{3OB^2} = 6\sqrt{3}u$

7. (SE)En la figura, se sabe que $\angle AO_1B - \angle AO_2B = 70^0$y además la tangente EB forma el triángulo isósceles ABE, con $AB = AE$. Determine la amplitud del $\angle EBC$.



Comentario sobre la solución:

Una estrategia útil puede ser introducir un parámetro auxiliar: hagamos$\angle AO_2B = 2\theta$, entonces $\angle ACB = \theta$ y por hipótesis $\angle AO_1B = 2\theta + 70^0$. Por ángulo seminscrito, $\angle ABE = \theta + 35^0$, y como el triángulo ABE es isósceles, $\angle AEB = \theta + 35^0$. Finalmente, por la fórmula del ángulo exterior aplicada al triángulo BCE, $\angle EBC = \angle AEB - \angle ECB = 35^0$

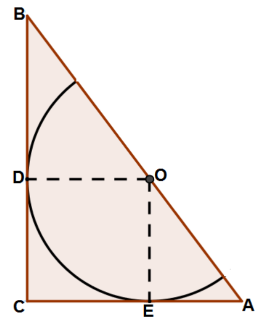
8. (SE)Sea ABC un triángulo rectángulo en C, cuyos catetos miden $9cm\ y\ 12cm$ respectivamente, y r el radio de la semicircunferencia que es tangente a los catetos y que tiene su centro sobre la hipotenusa.
   a) Determine la longitud de r.
   b) Determine el área y el perímetro del semicírculo.
   Comentario sobre la solución:
   a) Demostremos primeramente que $r = \frac{ab}{a+b}$ donde $a\ y\ b$ son los catetos. Para esto es útil emplear el método de las áreas.

$$(BCA) = (BOC) + (OCA) \to \frac{ab}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} \to r = \frac{ab}{a+b}$$

Luego $r = \frac{36}{7}cm$

b) $A_{semic} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{648}{49}\pi cm^2$

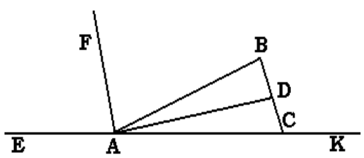
$P_{semic} = \frac{L_{circ}}{2} + diám = \pi r + 2r = (\pi + 2)rcm$



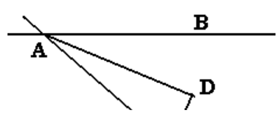
Tarea:

Ejercicios PROPUESTOS

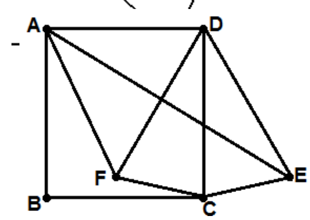
1. En la figura: $AD\ y\ FA$ bisectrices de los $\angle BAC\ y\ \angle EAB$ respectivamente; los puntos $A\ y\ K$ pertenecen a r_{EC}. Conocido que $\angle B = 80^0\ y\ \angle BCK = 110^0$.
   Calcule la amplitud del $\angle FAD$



2. En la figura: $r_{AB} \parallel r_{EC}$; $\overline{AD}\ y\ \overline{CD}$ bisectrices de los $\angle BAC\ y\ \angle ACE$ respectivamente.
   Calcule la amplitud del $\angle$**ADC**

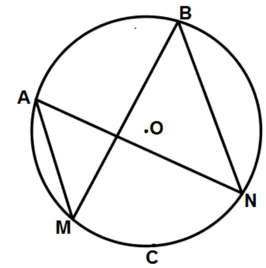


3. En la figura, $ABCD$ cuadrado; $\angle BCE = 160^0$; ΔDCE Isósceles y acutángulo y $CEDF$ cuadrilátero simétrico respecto a $\overline{CD}$.
   Calcule la amplitud del$\angle EAF$

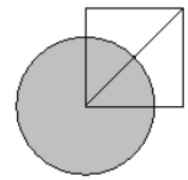


4. Pruebe que el ángulo entre las bisectrices de:

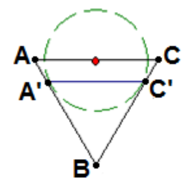
   a) dos ángulos adyacentes es recto
   b) dos ángulos conjugados entre paralelas es recto
5. Teniendo en cuenta la figura:
   a) si$\angle MCN = 125^0$, hallar las mediciones de $\angle MON, \angle MAN\ y\ \angle MBN$
   b) Si $\angle MBN$ fuera un ángulo recto, ¿qué clase de ángulo sería $\angle MON$ y cómo debería dibujarse la figura para que así sucediera?
   c) ¿Qué puntos deben unirse para obtener un ángulo que sea el doble del $\angle AMB$?



6. Los lados de un triángulo inscrito en un círculo interceptan tres arcos que están en la relación de 3:7:8. Hallar la amplitud de los ángulos interiores del triángulo.
7. En la figura, el lado del cuadrado mide 8cm. La circunferencia pasa por el punto medio de la diagonal del cuadrado. ¿Cuál es el área de la región no sombreada?



8. Dadas dos circunferencias concéntricas de centro $D. AB$ es una cuerda de la circunferencia de mayor radio y que es a su vez tangente a la circunferencia más pequeña. Si AB $= 20$ cm, calcule el área del anillo circular que se forma entre las dos circunferencias.
9. Consideremos la figura adjunta. El triángulo ABC es equilátero, el círculo que tiene su centro sobre el segmento determinado por los puntos $A\ y\ C$, es tangente a las rectas determinadas por los puntos $A\ y\ B;\ B\ y\ C$ y tiene radio 2. El triángulo $A'BC'$ tiene igual área que el círculo y AC es paralela a $A'C'$. Encuentra la altura del triángulo $A'BC'$.



10. Las bisectrices $BP\ y\ CQ$ del triángulo ABC se cortan en I. Demuestre que si$\angle BAC = 60^0$, entonces el triángulo PQI es isósceles.
11. Un cuadrado de área 4 cm^2 gira 360º alrededor de su centro. Hallar el área de la región que recorren sus lados.

A continuación, presentamos un resumen de los niveles donde se encuentran los ejercicios presentados

	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
INICIALES		1	3		
SISTEMA			1-2-3-4-5-7	8	
INDIVIDUALES			1		
TAREA			1-2-3-4-5-6-7-8	9-10-11	

El entrenamiento mostrado en este trabajo es el tercer adiestramiento realizado en el cual se trabaja en función de preparar a los estudiantes para resolver problemas de los niveles 3 y 4, por esta razón prevalecen los problemas del nivel 2.

Conclusiones

En la revisión realizada por los autores al Libro de texto y Programa de la asignatura de Noveno grado, existen temáticas y sistemas de ejercicios necesarios para la preparación y éxito competitivo de los concursantes que no se encuentran en estos.

La propuesta de los autores de estas temáticas y sistemas de ejercicios puede contribuir, conjuntamente con las existentes en el Programa y Libro de texto, a alcanzar la preparación de los estudiantes y posibilitar el tránsito de los niveles escolares a los niveles requeridos, para lograr el desempeño de estos en las Olimpiadas de matemática.

Referencias bibliográficas

Acosta, S. Quintana, A. Gort, M. Báez, L. Canto, J. Domínguez, O. (2015). *Matemática 9^{0}. grado*. La Habana: Pueblo y Educación.

Davidson., Jimenez, M., Ordaz, R. y Miranda, J. (1989). Olimpiadas Internacionales de Matemática: Incidencia en el desarrollo ulterior de los concursantes cubanos. *Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación 11*, 7-9

García, E. (2015). Breve acercamiento a una metodología para abordar problemas geométricos de tipo olímpico, *IX Taller científico Metodológico de la Cátedra "Dulce María Escalona".* La Habana, Cuba.

Jiménez, C. (2017). Geometría Plana. *XI Encuentro Taller Científico Metodológico de la Cátedra "Dulce María Escalona".* La Habana, Cuba.

Pérez, E. (2014). *Estrategia didáctica para la preparación de concursantes en matemática de la educación preuniversitaria sobre la base de la gestión de conocimientos*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas "Blas Roca Calderío". Bayamo, Cuba.