VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

CONSTRUCCIÓN DE FUNCIÓN COMO CURVA EN EL PLANO: DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE ENSEÑAZA DESDE APOE

CONSTRUCTION OF FUNCTION AS A CURVE ON THE PLANE: DESIGN AND IMPLEMENTATION OF TEACHING FROM APOS

Román Gpe Esquer Armenta, César Fabián Romero Félix
Universidad de Sonora (México)
ing.romanrgea@hotmail.com, cesar.romero@unison.mx

Resumen
Se presenta el diseño y evaluación de una propuesta de enseñanza del concepto de función como curva en el plano, de manera acorde con la definición formal de curva y retomando algunos elementos del análisis del *significado holístico* del concepto (Parra, 2015). La metodología está basada en el ciclo de investigación de APOE, incorporando el uso de medios tecnológicos como facilitadores para el desarrollo de estructuras mentales. Como resultados de la implementación con estudiantes de ingeniería, identificamos algunas dificultades para el desarrollo del significado planteado y elementos del diseño que permitieron superarlas.

Palabras clave: cálculo, función, APOE, diseño de enseñanza

Abstract
This paper presents the design and evaluation of a teaching sequence for the concept of function as a curve in a plane, in accordance with the formal definition of curve and some elements of the *holistic meaning* of the concept (Parra, 2015). The methodology used in the study is based on the APOS research cycle, including the use of technological tools as facilitators for the development of mental structures. As a result of the implementation with engineering students, we identified some difficulties for the development of the proposed meaning and elements of the design that allowed overcoming such difficulties.

Keyword: calculus, function, APOS, teaching design

Introducción

El presente reporte muestra los resultados de un proyecto de intervención didáctica sobre el concepto de función, dirigido a estudiantes de cursos de Cálculo Diferencial a nivel superior, particularmente en el área de Ingeniería, por lo que se centra en funciones reales de una variable. Aunque existe abundante literatura sobre investigaciones e intervenciones didácticas de alrededor de medio siglo, los problemas de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo se mantienen presentes en las aulas, por lo que necesitan seguir siendo atendidos. Investigaciones recientes continúan mostrando la presencia de bajo desempeño académico en esta rama de las matemáticas, así como dificultades en su aprendizaje, algunas de estas atribuibles a un pobre entendimiento del concepto de función.

Uno de los elementos asociados a las dificultades de aprendizaje del tema es la complejidad del concepto en términos de la diversidad de concepciones y representaciones con las que se enfrentan los estudiantes de ingeniería. Para aclarar esta complejidad, en este trabajo se partió del análisis de significados parciales del concepto de función desarrollado por Parra (2015), quién identificó cinco significados distintos en su análisis de tipo histórico-epistemológico: la función como correspondencia, *el proceso de asignar* elementos de un conjunto a elementos de otro conjunto; como relación entre magnitudes variables, *relación de covariación entre magnitudes de fenómenos físicos*; como curva en el espacio; como expresión analítica; como correspondencia arbitraria, una *relación abstracta* entre dos conjuntos, sin conocer la forma en la que se realiza la asignación entre sus elementos; y finalmente, como parte de la Teoría de Conjuntos, un subconjunto del producto cruz de dos conjuntos dados.

A partir de estas observaciones, se planteó la necesidad de diseñar actividades de enseñanza que favorezcan la construcción de los significados parciales (en términos de Parra, 2015), con énfasis en su posterior *coordinación* como *procesos,* en términos de APOE (Arnon et al., 2014), a partir del establecimiento de relaciones entre los diferentes significados que permitan construir a la función como un objeto mental que incluya a los distintos significados parciales. De tal manera que, para construir el significado de función como curva, se propone una interpretación más allá de las reglas de formación y manipulación de las representaciones gráficas, centrándose en las relaciones entre los objetos que las gráficas representan. En este sentido la función como curva es vista como un objeto en el plano cartesiano, un conjunto de puntos (x, y) dentro de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que manifiesta un tipo de relación entre dos variables, representadas por los *ejes* X y Y, tales que para cada $x \in X$ hay exactamente un $y \in Y$ con (x, y) en la curva. Se enfatiza aquí que, dadas las relaciones de equivalencia entre los distintos significados parciales de función (Parra, 2015), el lector podría inferir las características del significado *conjuntista* o de *correspondencia* al leer la descripción de arriba, pero se refiere específicamente a este objeto con respecto a las características plasmadas de forma gráfica, a la relación dinámica entre determinados valores sobre los ejes que se puede deducir al analizar, crear o manipular una curva en el plano.

Antecedentes

Se encontraron diversas publicaciones relacionadas con la dificultad que se presenta en estudiantes de nivel superior aprender conceptos ligados al cálculo, y en particular sobre la comprensión del concepto función, como se menciona a continuación:

> La noción de función es actualmente uno de los objetos matemáticos más importantes debido a su naturaleza unificante y modelizadora, no obstante, es un concepto complejo debido a la multiplicidad de significados y de registros representativos que generan distintos niveles de abstracción (Ramos 2005, citado por Parra, 2015, p.24).

Otras investigaciones, como la de Zandieh, Ellis y Rasmussen (2017), muestran que el concepto función es de gran importancia para las matemáticas y continúa siendo problemático para los estudiantes de educación superior. En su análisis identificaron que los estudiantes que no contaban con una *construcción robusta* del concepto función no podían identificarlo, ni aplicar sus propiedades en otros contextos; a partir de una caracterización de los distintos significados de función como: ecuación, relación de asignación, gráfica y tipos de variación. A su vez, Maharaj (2010) identificó que los alumnos que solo contaban con una comprensión de función y derivada hasta un nivel algebraico operacional difícilmente podían resolver problemas relacionados con estos conceptos; mientras que alumnos con un significado más completo podían efectuar las distintas transformaciones de las funciones y sus derivadas, necesarias para la solución de problemas relacionados con derivadas.

Los trabajos citados muestran que, como es predecible, las dificultades relacionadas con la multiplicidad de significados parciales limitan el aprendizaje de temas posteriores. De tal manera, en diversas investigaciones se sugiere la creación de actividades orientadas a favorecer la comprensión del concepto de función en distintos sentidos, sustentados por medios tecnológicos (por ejemplo, Maharaj, 2010; Goldenberg, Lewis y O'Keefe 1992).

Marco teórico

En palabras de los autores principales de la teoría APOE (acrónimo de: Acción, Proceso, Objeto y Esquema), este marco:

> Se centra en modelos de lo que podría estar pasando en la mente de un individuo cuando él o ella está tratando de aprender un concepto matemático y utiliza estos modelos para diseñar materiales de instrucción y /o para evaluar los logros de los estudiantes y fallas en el manejo de situaciones de problemas matemáticos (Arnon et al., 2014, p.1).

En APOE se analizan las relaciones entre los *mecanismos* de abstracción reflexiva (en particular *interiorización, coordinación, encapsulación y reversión*) y los diferentes tipos de *construcciones* mentales (*acciones, procesos objetos* y *esquemas*) asociadas al conocimiento matemático,
Figura *1*. Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a guías o estímulos externos que proporcionan detalles de los pasos a seguir. Un individuo que tiene una profunda comprensión sobre un cambio dado puede ejecutar una acción, cuando sea necesario, pero no se limita a operar en el nivel de acciones (Arnon et al., 2014, p.19).

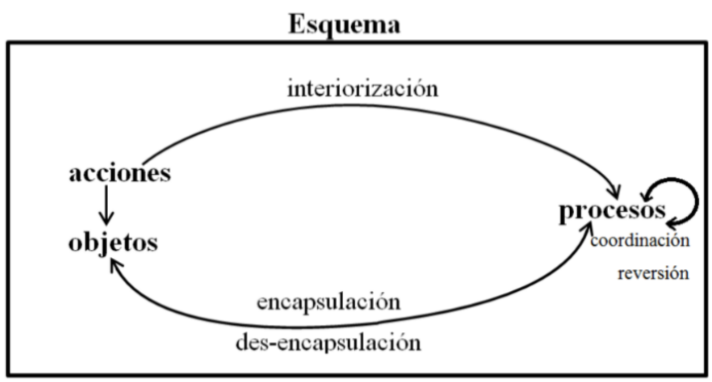


Figura 1 Estructuras mentales y mecanismos para la construcción de conocimiento matemático (Arnon et al., 2014, p. 18)

Cuando un individuo repite y reflexiona sobre las características generales e invariantes de una acción, ésta puede ser interiorizada en un proceso. La interiorización de una acción consiste en construir una estructura mental que, inicialmente, hace el mismo trabajo que el de la acción; se dice que el individuo posee una concepción proceso del concepto cuando puede reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él (Arnon et al., 2014,

p. 20). Cuando un individuo piensa en el proceso como un todo, y puede aplicar transformaciones sobre esta totalidad, se dice que posee una concepción objeto al aplicar el mecanismo de encapsulación (p. 21).

El análisis de las relaciones entre mecanismos y construcciones permite proponer *Descomposiciones Genéticas* (DG)*;* modelos hipotéticos que describen las estructuras mentales y los mecanismos que un estudiante podría construir para aprender un concepto matemático específico. Por lo general, una DG comienza como una hipótesis basada en las experiencias de los investigadores en el aprendizaje y la enseñanza del concepto, su conocimiento de la teoría APOE, su conocimiento matemático, investigaciones previamente publicadas sobre el concepto y el desarrollo histórico del concepto (Arnon et al., 2014, p.27).

Sobre la problemática de establecer relaciones entre distintas representaciones, desde este marco se recomienda centrarse en el desarrollo de conocimiento de los conceptos representados, para permitir que haya una concepción disponible en cada representación que se pretenda relacionar. Particularmente se propone que, para coordinar significados sobre el concepto de función en distintas representaciones, sería necesario desarrollar concepciones proceso asociadas al concepto en cada representación para poder coordinarlas (Arnon et al., 2014, pp. 180-181). De tal manera, se plantea que las dificultades para relacionar los diferentes significados parciales se pueden atribuir a la ausencia de los procesos específicos y/o al no promover activamente la coordinación entre los diferentes procesos.

Metodología

El estudio se organiza con base en el ciclo de investigación de APOE, el cual consta de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos (Arnon et al., 2014, p.94). La implementación de este ciclo comienza generalmente con un análisis teórico de la cognición del concepto matemático, esto da lugar a una DG *preliminar* del concepto (DGp). La DGp permitirá describir las construcciones y los mecanismos mentales que habría que favorecer en una propuesta de enseñanza para que un individuo logre la comprensión de un concepto matemático, la cual deberá ser implementada y evaluada en términos del desempeño matemático de los estudiantes. Si las soluciones y argumentos de los estudiantes muestran un buen desempeño matemático, así como el uso de las concepciones mentales esperadas, se considera como válida a la DG, de lo contrario, se plantean modificaciones a la secuencia de enseñanza y/o a la DGp, repitiendo el ciclo metodológico.

De tal manera, los tres componentes del ciclo se influencian mutuamente al aportar información que permite su reformulación y reimplementación. Los resultados del análisis teórico impulsan el diseño y la implementación de la instrucción a través de actividades destinadas a fomentar las construcciones mentales declaradas en la DGp. Las actividades y ejercicios planteados en la propuesta de enseñanza están diseñados para ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizarlos en procesos, encapsular procesos en objetos y coordinar dos o más procesos para construir procesos nuevos, y a su vez, la implementación de la instrucción proporciona una oportunidad para la recopilación y el análisis de datos.

Análisis teórico: planteamiento de la descomposición genética preliminar

El desarrollo de esta etapa del ciclo de investigación consistió en una revisión documental de literatura en la que se aborda el concepto de función, investigación sobre las problemáticas relacionadas con este concepto, reconstrucciones históricas del concepto e intervenciones didácticas con o sin el uso de medios tecnológicos que promovían la compresión de este objeto matemático (resumido en la sección de antecedentes). A partir del análisis teórico realizado en la primera etapa del proyecto, se plantean las características del significado parcial que será atendido en términos de los elementos que componen las concepciones acción y proceso correspondientes.

Acción: A_1) Definidas las cantidades variables (números reales) que forman dos conjuntos, el individuo las ubica en rectas numéricas reales y asocia en pares, un elemento de cada conjunto, un par a la vez. A_2) Identifica el producto cruz de los conjuntos definidos y representa los pares ordenados como elementos de éste, puntos. A_3) Construye la curva uniendo los puntos.

Proceso: P_1) El individuo puede identificar, de manera general, los elementos que conforman el dominio y rango de la curva. P_2) Puede percibir de manera global propiedades de la curva como relaciones entre el dominio y rango. P_3) Visualiza de manera dinámica el comportamiento de la curva entre puntos dados (interpolación). P_4) Visualiza de manera dinámica el comportamiento hacia los extremos de la curva (extrapolación).

Destacamos que, de acuerdo con la teoría APOE, individuos que sólo cuenten con la concepción acción estarían limitados a la aplicación ordenada de cada *paso* de la acción, sin poder modificar, ignorar, o suponer el cumplimiento de alguno, al intentar resolver problemas sobre curvas. Mientras que, teniendo una concepción proceso, los estudiantes serían capaces de concentrarse en alguno de los elementos, e incluso estarían en condiciones de modificarlos. Finalmente, el proceso de curva permitiría a los estudiantes *visualizar las curvas en su totalidad*, tanto de forma local como global en todo el plano.

Si bien los principios de APOE indican que el alumno podría desarrollar la estructura objeto de la función como curva, éste y los demás posibles *objetos parciales* no son pretendidos dentro de la propuesta de enseñanza, sino que de la coordinación de los procesos posteriormente se encapsule el objeto de función con las cualidades y propiedades de los distintos significados parciales.

Diseño e implementación de la enseñanza

El diseño de la secuencia de enseñanza sigue la metodología ACE propuesta desde APOE, siglas en inglés de: Actividades, discusión en Clase y Ejercicios extra-clase. Las actividades facilitan el desarrollo de las estructuras previstas en el análisis teórico (*acción* y *proceso)*, mediante los mecanismos propuestos en el análisis teórico para cada uno de los significados de función; la discusión permite a los estudiantes reflexionar sobre su trabajo y al instructor le permite observar el progreso del grupo y ofrecer explicaciones y definiciones formales de los conceptos desarrollados; finalmente, la etapa de ejercicios está pensada como un apoyo para continuar el desarrollo de las construcciones mentales y para guiar a los estudiantes en la aplicación de lo aprendido y su relación con otras ideas matemáticas (Arnon et al., 2014, p. 58).

Las actividades en esta secuencia consistieron en la resolución de problemas sobre relaciones entre valores en ejes numéricos y las posibles curvas que se podrían graficar a partir de su observación y manipulación. De esta manera se promueve la concepción acción, requiriendo la formación de las curvas asociadas a diferentes relaciones, funcionales y no funcionales, para después promover la interiorización en la discusión en clase, al cuestionar sobre las diferencias entre los distintos tipos de curvas obtenidas y cuáles podrían ser consideradas como funciones. En la etapa de ejercicios, se plantearon problemas similares y algunos más complejos para que los alumnos continúen la interiorización de la acción y se finalice la construcción del proceso.

Uno de los problemas que se plantearon fue que los alumnos identifiquen el comportamiento de la relación entre valores en rectas numéricas con ayuda de un applet de GeoGebra, (disponible en bit.ly/appletcurva1), dónde podía observar la relación numérica dinámica entre dos cantidades, el comportamientos de los incrementos de la relación; y comparar sus hipótesis sobre la forma de la curva en un segundo applet con la representación gráfica que éste genera (disponible en bit.ly/appletcurva2):

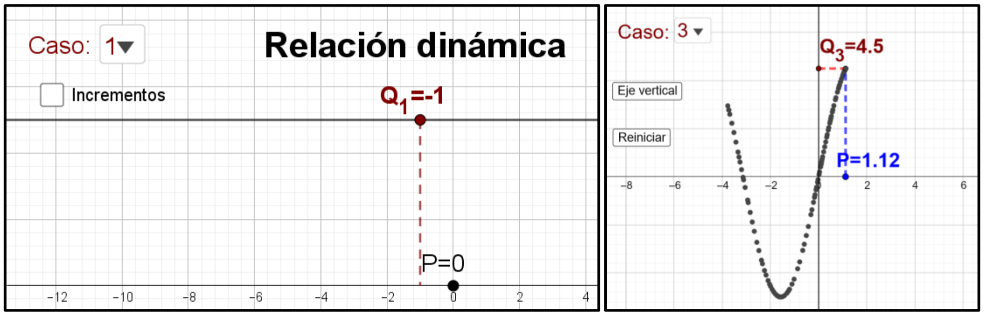


Figura 2. Applets de relación numérica dinámica

Con dichos medios tecnológicos los alumnos tienen que dar respuesta a reactivos tipo acción, obteniendo y manipulando información de casos particulares de curvas, como los que se muestran en la Figura *3*.

a. A medida que trasladas el punto P, ¿Cómo es el cambio (crece o decrece) del punto Q_1?

b. Construye pares ordenados con las cantidades variables del punto P y el punto Q_1.

Valor P	Valor Q_1

Valor P	Valor Q_1

Figura 3. Reactivo nivel acción para el significado de función como curva

Por otro lado, dentro de esta misma etapa los alumnos serán enfrentados a realizar un primer acercamiento a la concepción proceso, dando respuesta al reactivo que se muestran en la Figura *4*, los cuales solicitan ciertas generalidades de las propiedades de la curva.

4. Marca la casilla correspondiente, completa la siguiente tabla.

Propiedad/caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
¿Es función?					
Es creciente en los valores de P:					
Es decreciente en los valores de P:					
Dominio:					
Rango:					

Figura 4. Reactivo nivel proceso para el significado de función como curva.

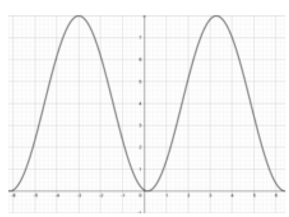
Después de haber realizado las actividades antes mencionadas, se accede a la discusión en clase, la cual consiste en la revisión de las respuestas dadas anteriormente, para valor el grado de construcción de la acción y el inicio del proceso que están desarrollando los estudiantes, como se muestra en la Figura *5*, además se les proporcionó casos nuevos para brindar la oportunidad de desarrollar las estructuras y promover la abstracción reflexiva.

1. Valor independiente y dependiente.
2. Es la relación entre los puntos del Caso 1 y Caso 2, una relación funcional. ¿De dónde salen las pendientes de las rectas?
3. Qué tipo de comportamiento se observa entre los puntos del Caso 1 y 2
a) Definir creciente y decreciente
b) Definir si ΔP es positivo o negativo
4. Tipos de (co)variación
a) (Co)variación proporcional, (Q es proporcional a P): pasa por el origen y con ΔP constante
b) Como distinguir proporcional de lineal (se ve parecido a la curva de engranes, pero no son múltiplos)
c) Si ΔQ varia, puede ser: (de)crece de forma constante o no constante
d) Periódica y no periódica
e) Recta, parábola,
5. ¿Como se moverá Q si a veces es creciente y a veces decreciente, y como seria la curva?

Figura 5. Guion de discusión en clase para significado de función como curva

En la última etapa del ciclo ACE, los ejercicios tienen la finalidad de promover las concepciones acción para los alumnos que no han terminado el desarrollo de esta concepción y desarrollar o finalizar la construcción del proceso, como se presenta en la Figura *6*.

3. Con base en las gráficas trazadas, responda lo que se solicita en cada una de ella.



Determina
Dominio:
Rango:

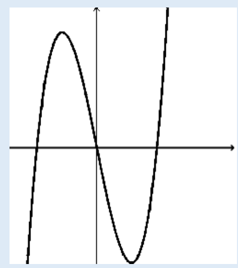
Indica en la gráfica las secciones donde esta es creciente(**C**) o decreciente(**D**).

Defina la dirección de los incrementos en casa sección y su relación con la grafica

Figura 6 Reactivos tipo acción y proceso en la sección de ejercicios.

Análisis y recolección de datos

El análisis de la secuencia se realizó mediante la identificación de las características de las estructuras mentales en el trabajo de los estudiantes, parte de la caracterización se muestra en la siguiente tabla.

<table>
<tr><th>Estructuras mentales</th><th>Características</th><th>Tipos de cuestiones planteadas</th><th colspan="2">Respuesta esperada</th></tr>
<tr><td>Acción</td><td>A_2</td><td>Construye pares ordenados con las cantidades variables del punto P y el punto Q1.</td><td colspan="2"><table><tr><th>Valor P</th><th>Valor Q_1</th></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>8</td></tr><tr><td>4</td><td>11</td></tr><tr><td>5</td><td>14</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Proceso</td><td>P_2</td><td>Determina el domino y el rango de la siguiente curva.</td><td></td><td>Dom:
$(-\infty, \infty)$ o R

Rango:
$(-\infty, \infty)$ o R</td></tr>
</table>

Tabla 1. Instrumento de evaluación

Resultado de la implementación

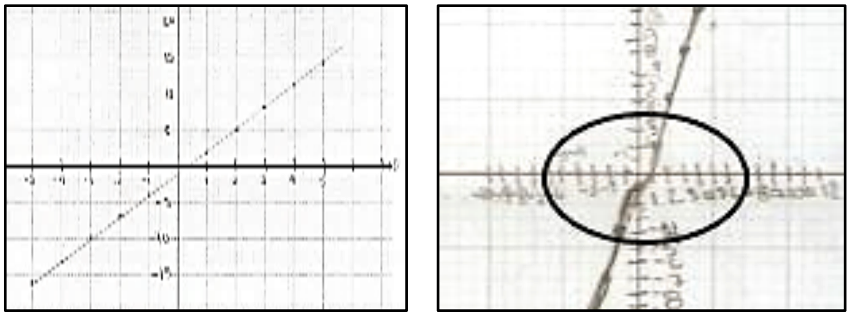
De los 27 alumnos del grupo participante, solo 20 permanecieron de manera constante en la secuencia. Para la etapa de actividad, los alumnos identificaron el comportamiento de la relación entre números en rectas con ayuda del applet denominada curva de relación numérica. El trabajo en el medio tecnológico mostró evidencia de haber promovido la concepción acción, hasta el grado de establecer y definir las cantidades variables. En la Figura *7* se muestra la respuesta proporcionada por un alumno al utilizar el applet para generar pares ordenados.

Valor P	Valor Q_1
1	2
2	5
3	8
4	11
5	14

Valor P	Valor Q_1
-1	-4
-2	-7
-3	-10
-4	-13
-5	-16

Figura 7. Conjunto de pares ordenados generados por los alumnos mediante la manipulación del applet

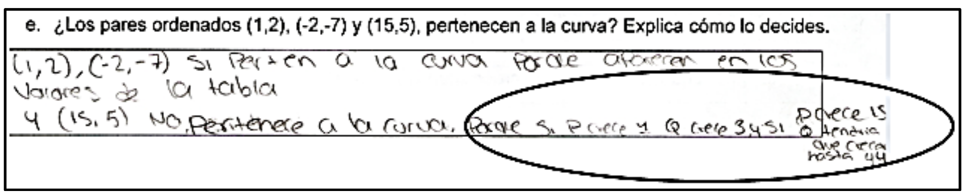
Dado el alto número de estudiantes que lograron construir la gráfica de dispersión con los pares ordenados que lograron definir, no se identifican serias dificultades para el desarrollo de la concepción acción. Sin embargo, en el paso de construir la curva uniendo los puntos de la gráfica de dispersión hubo un caso aislado en el que no se realizó el trazado de la curva como era esperado, ya que no se conectaron los puntos de forma consistente con el comportamiento de los pares ordenados. Se identificó que este alumno contaba sólo con la concepción acción, ya que el trazo *correcto* de la curva solicita un grado mayor de abstracción de la relación: identificar el crecimiento proporcional entre las variables. Los trazos de curvas se muestran en la Figura 8, en el caso a) se realizó correctamente el trazo de la curva como una recta, mientras que en el caso b), aunque los puntos están correctamente ubicados, el estudiante decidió unir los puntos con una curva con cambio de concavidad cerca del origen.



a) b)

Figura 8. Ejemplos de trazado de curvas a nivel acción.

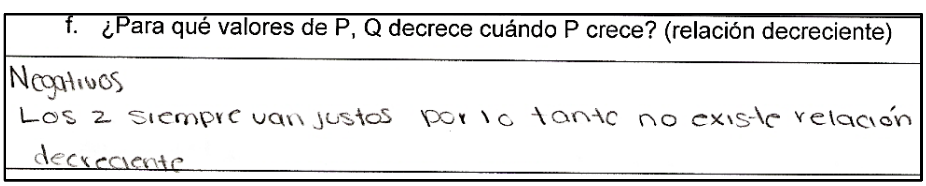
Continuando en la misma concepción, los alumnos lograron definir si un grupo de pares ordenados pertenecen a la curva trazada, pudieron argumentar que dos de los tres pares proporcionados en el reactivo sí pertenecen a la gráfica de la relación, y el par ordenado que no corresponde a la curva era porque el valor de la ordenada no presentaba el mismo comportamiento de las demás ordenadas, aquí los alumnos continúan con una manipulación de la relación a nivel acción, debido a que utilizan la información generada anteriormente en tabla, la cual está compuesta de pares ordenados y es utilizada para tomar la decisión si los pares pertenecen o no a la relación representada en la curva, Figura *9*.


e. ¿Los pares ordenados (1,2), (-2,-7) y (15,5), pertenecen a la curva? Explica cómo lo decides.

(1,2),(-2,-7) si Per+en a la curva Porqe aparecen en los
valores de la tabla
y (15,5) No pertenece a la curva. Porqe si P crece y Q crece 3 y si P crece 15 Q tendría que crecer hasta 44

Figura 9. Identificación de pares que pertenecen a la curva relación.

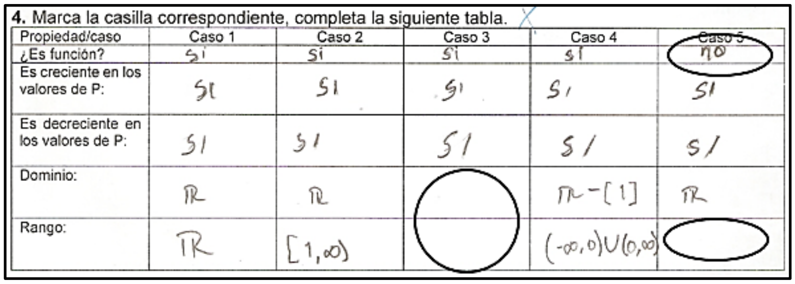
En la misma etapa de secuencia que se desarrolló dentro del aula, los alumnos comenzaron a trabajar con los incrementos, logrando visualizar su comportamiento con el uso de applet, lograron identificar la relación que guardan los incrementos de las variables, la dirección de estos y el vínculo que guarda con la curva. Existió una minoría, dos de los 27 participantes, que a pesar de la ayuda visual que proporciona el applet, no pudo dar respuesta a los reactivos antes mencionados, muestra de lo anterior, en la Figura *10*, los alumnos identifican la relación entre los incrementos y la curva de la relación, lo anterior muestra que los alumnos están iniciando la concepción proceso, debido a que empiezan a proporcionar generalidades de la curva.


f. ¿Para qué valores de P, Q decrece cuándo P crece? (relación decreciente)

Negativos
Los 2 siempre van justos por lo tanto no existe relación
decreciente

Figura 10 Reactivo relacionado con la curva y los incrementos.

En la última sección de la secuencia se plantean reactivos que exigen generalizar las propiedades de las curvas, llevando al nivel proceso, como determinar si la curva es una función, el comportamiento de los incrementos en la representación gráfica, el dominio y el rango. Se presentaron dificultades muy notorias para dar respuesta a estos reactivos (Figura 11), ya que los alumnos no pudieron llenar la tabla con la información solicitada, esto debido a que no pudieron definir por completo el conjunto de pares ordenados de la relación numérica, ni lograr visualizar la curva por completo.



4. Marca la casilla correspondiente, completa la siguiente tabla.

Propiedad/caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
¿Es función?	si	si	si	si	no
Es creciente en los valores de P:	si	si	si	si	si
Es decreciente en los valores de P:	si	si	si	si	si
Dominio:	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}-[1]$	$\mathbb{R}$
Rango:	$\mathbb{R}$	$[1,\infty)$		$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$	

Figura 11. Reactivos a nivel a inicio de proceso.

Tras el trabajo descrito arriba, se inició la etapa de discusión en clase. En esta etapa se logró promover significativamente la abstracción reflexiva, mediante la discusión grupal de las respuestas a los problemas planteados, organizando a los estudiantes en equipos, enfocados particularmente en la interiorización de la acción, así como valorar el grado de construcción de las concepciones de los estudiantes, dicha discusión mostro evidencia de que la mayoría de los alumnos contaba con la estructura de acción y empezaban a mostrar la construcción del proceso.

En la sección de ejercicios, compuesta de problemas sin el uso de medios tecnológicos, los alumnos presentaron un alto desempeño al trabajar con casos particulares, esto mostró que los alumnos lograban contestar los reactivos a nivel acción sin dificultad, indicando que la estructura acción se ha construido correctamente. Por otro lado, en el nivel proceso se siguieron mostrando dificultades, particularmente en la búsqueda de propiedades globales de las curvas, como se observa en la Figura *12*.

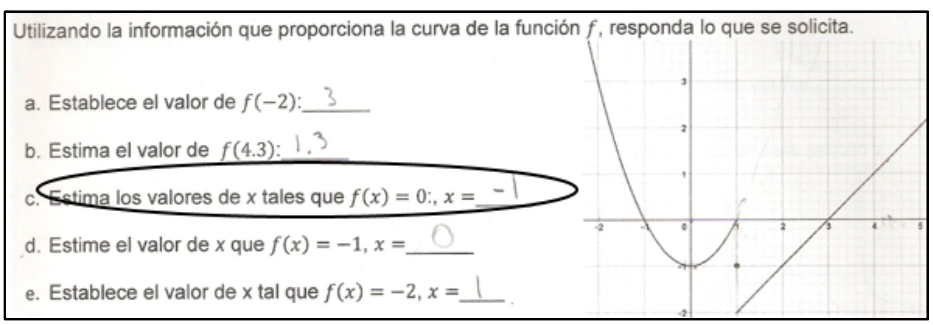


Figura 12. Reactivos a nivel acción y proceso en los ejercicios.

A su vez, a medida que los reactivos solicitan características más generales de la curva, se fueron presentando más dificultades. Evidencia de lo anterior, se muestra en la Figura *13*, en la que se visualiza el paso de acción a proceso, ya que en el reactivo se solicitan distintas características del comportamiento de la curva y después el comportamiento a los extremos de esta.

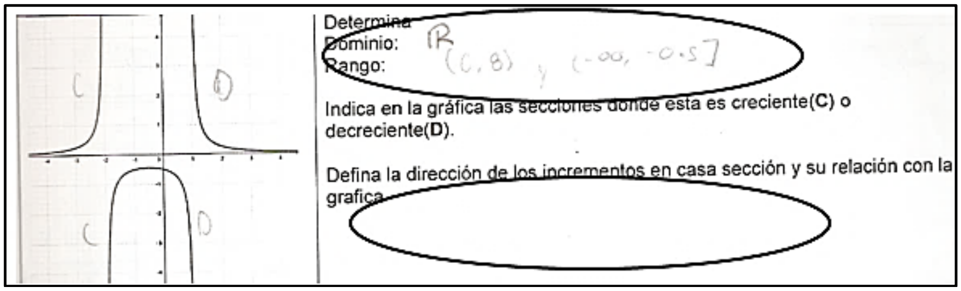


Figura 13. Reactivo de nivel proceso en los ejercicios.

Durante el desarrollo de esta secuencia el alumno tuvo la oportunidad de continuar con la interiorización, mediante el análisis del domino y el rango de la curva, al indicar en la gráfica las secciones donde esta es creciente o decreciente y definir la dirección de los incrementos en cada sección y su relación con la gráfica. Se esperaba que la identificación del comportamiento de curva de manera local y luego en sus extremos permitiera determinar todos los posibles valores que pueden tomar las cantidades variables relacionadas.

Conclusiones

A manera de un concentrado de todo lo declarado anteriormente se muestra la tabla *2*, la evaluación del grado de avance de las construcciones mentales mostradas por los estudiantes, en términos de los criterios de cada estructura para este significado parcial; siendo las características A_i y P_i las definidas en la DGp.

Estructuras	*Características*	*Casos de éxito*	*Porcentaje de aciertos en Actividad*	*Porcentaje de aciertos en Ejercicios*	*Promedio*
Acción	A1	27	100%	95.7%	97.85%
	A2	27	100%	96.7%	98.35%
	A3	27	100%	95.2%	97.6%
97.75%					
Proceso	P1	20	70.03%	74.4%	72.21%
	P2	18	64.1%	72%	68.05%
	P3	18	65%	72%	68.5%
	P4	18	66%	71.7%	68.85
69.40%					

Tabla 2. Resultados de implementación.

Con lo referente a la construcción de la acción, se observa que los alumnos tuvieron un buen desempeño al realizar la actividad en clase, en contraste con la misma concepción en los ejercicios, en la cual se mostró un leve descenso en su desempeño, la causa de esta situación es atribuida a que los reactivos en la actividad en clase eran de baja dificultad, comparados con los del ejercicio, lo anterior en el sentido de que las relaciones que se exploraron fueron básica comparadas con el conocimiento previo con el que contaban los estudiantes. A pesar de lo anterior la secuencia si da evidencia de promover las estructuras deseadas, quizás con una homogenización del nivel de complejidad de los reactivos en la actividad y ejercicios (incluir relaciones más complejas en la actividad) se podrían tener un mejor rendimiento por parte de los estudiantes.

Por otro lado, la construcción del proceso fue más compleja de desarrollar, tanto en la parte en la que se inicia el proceso en la actividad en clase, como en los ejercicios, especialmente con algunos de los criterios que conforman la estructura proceso: definir el conjunto de pares ordenados y generalizar los elementos que conforman los conjuntos dominio y rango; percibir que los puntos de la curva comparten alguna propiedad. Se considera que esta situación es propiciada por la falta de reflexión sobre algunos componentes de la estructura acción, en particular, se podría discutir maneras válidas de unir puntos para trazar las curvas, ya que el desarrollo de estos elementos con mayor énfasis favorecería la generalización de las propiedades y características de la curva. De tal manera, se asocian estas dificultades a la etapa de discusión en clase, al tratarse del mecanismo de interiorización. Se considera que, si en esta etapa se propiciara una discusión más profunda sobre los elementos de la concepción acción esto llevaría a construir de manera más sólida los elementos de la concepción proceso como de la curva *completa*.

Por otra parte, la implementación de las herramientas tecnológicas parece apoyar en el desarrollo de los mecanismos mentales, ya que al construir la representación gráfica de la curva se favoreció en alguna medida la creación de un objeto dinámico. Se coincide con Goldenberg, Lewis y O'Keefe (2010), al afirmar que el extraer información dinámica de un objeto dinámico es más accesible para los estudiantes que extraer información dinámica de un objeto estático. Se piensa que este tipo de manipulación es apropiada para los retos a los que se enfrenta un estudiante en un primer curso de Cálculo, tomando en cuenta que los alumnos seguirán siendo enfrentados a gráficos tradicionales, se cree que ellos se han beneficiado al desarrollar una forma de visualizar el dinamismo en estos.

Por último, esta propuesta de enseñanza plantea una descripción detallada y parcial sobre la forma de construir una parte del significado de función (DGp), el cual es resultado del análisis teórico el cual forma parte del marco referencial, dicho análisis permitió definir la ruta para construir el significado de función como curva en el plano, el cual fue definido por las estructuras y mecanismos. El camino planteado moviliza y se sustenta en objetos previamente construidos como el de número, recta, plano, producto cruz, entre otros. Con los resultados obtenidos en la recolección y análisis de datos, se puede confirmar que la descomposición genética preliminar es válida para la construcción de este significado parcial, además permite la evolución y reformulación de la secuencia implementada para favorecer de manera más eficiente el desarrollo de las construcciones mentales buscadas.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Nueva York: Springer.

Goldenberg, P., Lewis P. & O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of an understanding of function. End G. Harel & E. Dubinsky (Eds), *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 235-260). Washington: Mathematical Association of America.

Maharaj, A. (2010). An APOS Analysis of students' understanding of the concept of a limit of a function. *Pythagoras, 71*, 41-52.

Parra Y. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de los Lagos, Santiago de Chile.

Zandieh M, Ellis J. & Rasmussen C. (2017) Characterization of a unified notion of mathematical function: the case of high school function and linear transformation. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 21–38.