Función Seno. Una Propuesta Didáctica Para Su Enseñanza En Nivel Medio Superior

María Cleotilde Juárez Camacho, Ruth Verónica López Hernández
cotyjuarez@hotmail.com, r_veronic@ingenieros.com
Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas UNACH

Resumen

Los estudiantes del nivel medio superior, inician con carencias básicas, entre ellas, el conocimiento y pensamiento matemático. Es necesario actuar benéficamente para disminuir, haciendo accesible a los alumnos, el conocimiento que antecede a la función trigonométrica.

Con nuevos modos de enseñanza los aprendizajes significativos se han favorecido la aprobación y absorción del estudiante en su formación para sincronizar esas actividades matemáticas en competencias específicas.

La investigación que ahora presentamos es una aportación a la solución del problema educativo que vive nuestra sociedad actualmente, pero puede ser sumamente significativa para la enseñanza de la ciencia matemática en este nivel. Habitualmente la convivencia de las matemáticas con otras áreas científicas escolares se entiende como la aplicación de las matemáticas en los problemas de las demás ciencias. Esta investigación muestra el caso de la función trigonométrica Seno, que es en estas otras áreas científicas donde nacen las ideas y nociones, en las cuales sino consideramos los conocimientos matemáticos no tienen una significación, rendimiento y dirección, adecuada.

En relación a cómo vive la función trigonométrica en el medio escolar, encontramos diversas representaciones de ella. Es decir, es presentada, en el contexto del triángulo rectángulo, definiéndose como *razones*; para ampliar el dominio de los ángulos (ángulos medidos en grados, de cualquier valor: negativos y positivos) se refiere al sistema de ejes coordenados, definiéndolas también como *razones*. Con el círculo unitario se hace la conversión de ángulos

medidos en grados a radianes, para tratar, posteriormente, a las funciones trigonométricas como funciones de variable real (Maldonado, 2005)

Palabras Claves: Funciones trigonométricas, Círculo unitario, Descripción geométrica, Educación Media, Diseño didáctico.

Introducción

El presente trabajo de investigación se basa en trabajos realizados desde hace 10 años sobre la problemática que acontece en nuestro sistema escolar en la concepción y representación de conocimiento de la función trigonométrica.

Unas de las dificultades en la enseñanza de la matemática en nivel medio superior es que el docente presenta los contenidos aislados de su desarrollo histórico y social, es decir descontextualizados de la realidad y no se utilizan recursos que permitan un acercamiento a los conceptos mediante la interacción de los diferentes procesos que desarrollan la competencia matemática en los estudiantes.

El conocimiento matemático juega, indiscutiblemente, un papel primordial en la alfabetización de la ciencia, particularmente en la resolución de problemas de aplicación en contextos reales. En este caso la Matemática Educativa, como disciplina que se encarga de los fenómenos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en las distintas escuelas de pensamiento se han desarrollado investigaciones en varias direcciones: como se aprenden, como se enseñan, cómo se convirtieron los saberes teóricos en saberes escolares, cuáles son las restricciones institucionales y escolares para la actividad didáctica, etc.

Partimos de investigaciones realizadas sobre la Función Trigonométrica, que nacen en el seno de una aproximación teórica: la Socioepistemología. La cual distingue los elementos de construcción social: las actividades, las prácticas de referencia y las prácticas sociales ligadas a la constitución de la función trigonométrica. Detalla los momentos históricos de la función trigonométrica desde su origen, en las razones, hasta su constitución en series trigonométricas (Montiel, 2005).

La práctica social afecta dicha interacción entre la componente epistemológica, cognitiva y didáctica, y genera una explicación al fenómeno didáctico en términos del desarrollo del pensamiento matemático a través de las nociones de actividad, interacción, uso del conocimiento, explicación, debate, argumentación, consensos, instrumentación, validación, construcción y modificación de herramientas, todo ello en el planteamiento y resolución de situaciones problemáticas. En consecuencia, toda propuesta didáctica basada en esta aproximación supone un cambio significativo del discurso matemático escolar (DME): es decir, busca el desarrollo del pensamiento matemático y la construcción de conocimiento de parte de los estudiantes con base en prácticas sociales y no sólo, como hasta ahora, con base en el estudio de conceptos (Montiel, 2005).

Las ondas nos son familiares por el océano, por el estudio del sonido, por los terremotos y por otros fenómenos naturales. Sin embargo, como diría cualquier surfista, las ondas oceánicas, como todas las ondas, vienen en tamaños muy diferentes. Para entender del todo a las ondas, necesitamos entender las medidas asociadas a ellas, por ejemplo, cada cuánto se repiten (su frecuencia), cuán largas son (su longitud de onda), y su tamaño vertical (amplitud).

Si bien estas medidas coadyuvan a describir las ondas, no nos ayudan a predecir el comportamiento de las mismas. Para lograrlo, necesitamos ver las ondas de manera más abstracta, lo que podemos hacer usando una fórmula matemática. Sí, es posible ver las ondas matemáticamente, ya que la forma de una onda se repite a intervalos constantes a lo largo del tiempo y la distancia. Este comportamiento refleja la repetición del círculo.

Imagine que dibuja un círculo en un papel. Ahora, haga de cuenta que dibuja la misma forma mientras que, despacio, su amiga retira el papel de debajo del lápiz. La línea que hubiera dibujado toma la forma de una onda. Para poder apreciar mejor esta idea, vaya a la hoja y a su derecha comience a dibujar la mitad del circulo superior, posteriormente continué dibujando la onda, con la otra mitad del circulo inferior. Una rotación alrededor del círculo, completa un ciclo de subida y bajada de la onda, tal como se ve en el dibujo de abajo.

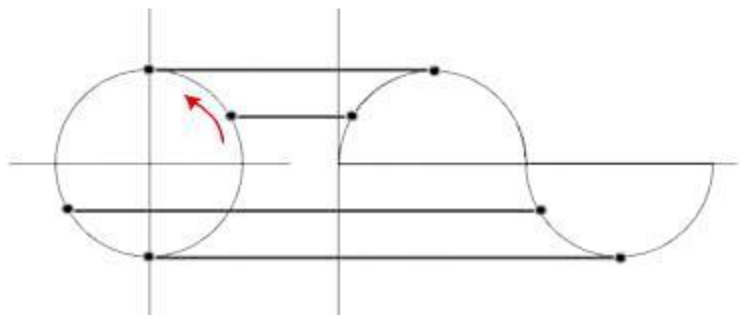


Figura 1: Círculo sobre plano cartesiano

Los matemáticos usan la función seno (Sin) para expresar la forma de una onda. La ecuación matemática que representa la onda más simple es la siguiente:

$$y = Seno\ x$$

Esta ecuación describe cómo una onda podría ser trazada en un gráfico, en el que "y" (el valor de la coordenada vertical en el gráfico) es una función del seno del número "x" (la coordenada horizontal).

Fundamentos para las Actividades

La función Seno es una de las proporciones trigonométricas calculadas, en un principio, por el astrónomo Hipparchus de Nicea, en el siglo dos A.C., cuando trataba de entender el movimiento de las estrellas y de la luna en el cielo nocturno. Hace más de 2000 años, cuando Hipparchus empezó a estudiar astronomía, el movimiento de los objetos en el cielo era un misterio. Hipparchus sabía que las estrellas y la luna tendían a atravesar el cielo nocturno de una manera semi-circular. Por consiguiente, pensaba que entender la forma de un círculo era importante para entender la astronomía. Hipparchus empezó a observar que había una relación entre el radio de un círculo, el ángulo central de un triángulo de ese círculo y la longitud del arco de ese triángulo. Si se sabían dos de cualquiera de estos valores, se podía calcular el tercer valor. Con el tiempo, se supo que esta relación también era aplicable a los triángulos rectangulares. Conociendo la medida de un ángulo de un triángulo rectangular, se puede calcular la proporción de los lados del triángulo. El tamaño exacto del triángulo varía, pero la proporción de la longitud de los lados está definida por el tamaño de los ángulos. La relación específica entre la medida del ángulo y los lados del triángulo son lo que se denominan las funciones. Las tres funciones principales son:

$$Seno\ A = \frac{opuesto}{hipotenusa}$$

$$Coseno\ A = \frac{adyacente}{hipotenusa}$$

$$Tangente\ A = \frac{Opuesto}{Adyacente}$$

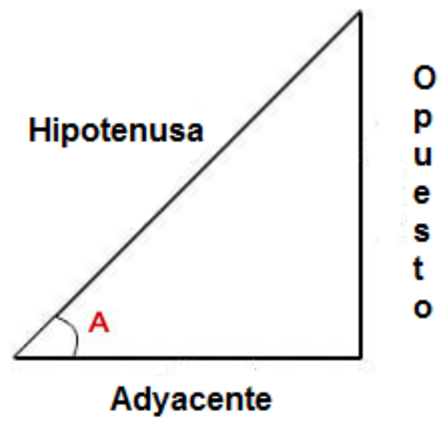


Figura 2: Triángulo rectángulo

La palabra trigonometría significa "medida de triángulos". El seno, el coseno y la tangente son las proporciones trigonométricas, que tienen su origen en el antiguo estudio de los triángulos.

Las proporciones trigonométricas se convierten en funciones de ondas

¿Cómo están relacionados los triángulos a las ondas? Al principio del siglo XVII, dos franceses, René Descartes y Pierre Fermat desarrollaron lo que se conocería como el plano coordenado cartesiano, comúnmente conocido como el plano gráfico (x, y). Este invento fue un avance extraordinario en la historia de las matemáticas ya que se vio, por primera vez, la integración de dos ramas importantes, pero distintas, de las matemáticas: la geometría, como la ciencia del espacio y de la forma y el álgebra, como la ciencia de los números. En poco tiempo, con el invento del sistema coordenado cartesiano se pudo graficar muchas de las relaciones matemáticas, incluidas las proporciones seno y coseno.

Como se sabe, las funciones trigonométricas también pueden ser definidas en relación con el "círculo unidad", o sea, un círculo con radio igual a 1. Se puede ver cómo funciona esta premisa, cuando se coloca el círculo “unidad” en el plano cartesiano y se dibuja un triángulo dentro del círculo, como se puede ver en el diagrama que se observa a continuación. De acuerdo a nuestra discusión previa, el seno del ángulo A en el diagrama equivale a la proporción del lado opuesto sobre la hipotenusa. Sin embargo, recuerde que estamos trabajando con un círculo unidad y que la longitud de la hipotenusa es igual al radio del círculo.

Por consiguiente, $Seno\ A = \frac{opuesto}{1} = opuesto$. De esta manera, el Seno de A da la longitud del lado opuesto del triángulo, es decir, la coordenada $-y$ de nuestro plano cartesiano. De igual manera, el coseno del ángulo A equivale al radio de los lados adyacentes sobre la hipotenusa. Puesto que la longitud de la hipotenusa equivale a 1, el coseno de A da la longitud del lado adyacente, es decir, la coordenada $-x$ del plano cartesiano.

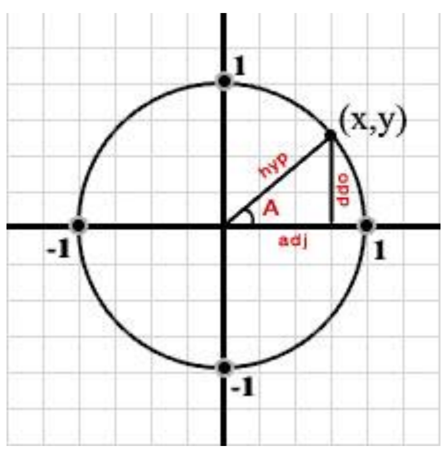


Figura 3: En este dibujo se muestra el círculo unidad en el plano cartesiano con un triángulo al interior. El punto en círculo en contacto con el radio tiene las coordenadas (x, y).

Si dibujamos este triángulo a medida que nos movemos, en dirección contraria al reloj, en el círculo, empezamos a ver que las funciones trigonométricas, en este caso seno y coseno, tienen una cualidad periódica. Esto quiere decir que seno, por ejemplo, aumenta al máximo en la parte superior del círculo, disminuye a cero cuando se va a la izquierda y adquiere valores negativos cuando se continúa alrededor del círculo. En la parte inferior del círculo la función seno alcanza un valor mínimo y el proceso empieza de nuevo cuando llegamos a la derecha del círculo. Para apreciar mejor esta idea, revise la animación en este enlace Seno, coseno, y el círculo unidad.

Seno, Coseno, y la Unidad Círculo. Esta animación ilustra cómo los valores seno y coseno cambian a medida que recorremos la unidad círculo.

Como se pudo observar en la animación anterior, a medida que el ángulo A aumenta, los valores de las funciones trigonométricas de A experimentan un ciclo periódico de 0, a un máximo de 1, a un mínimo de -1, y de nuevo a 0. Hay varias maneras de expresar la medida del ángulo A. Una manera es en grados, donde 360 grados definen un círculo completo. Otra manera de medir ángulos es con la unidad llamada radián, en la que 2π radianes definen un círculo completo. Los ángulos más pequeños que 360 grados pueden ser definidos como fracciones de esta unidad, por ejemplo: 90° pueden ser escritos como $\frac{\pi}{2}$, o 1.57 radianes, en tanto que 180° equivale a π, o 3.14 radianes.

Si trazamos el seno del ángulo medido en radianes en el sistema de coordenadas cartesiano, de nuevo obtenemos la característica subida y bajada. Sin embargo, ya que la medida del ángulo está trazada a lo largo del eje x (en vez del coseno del ángulo), la gráfica que se obtiene es una curva continua en el plano coordenado que se parece a una onda física, tal como se puede apreciar en la gráfica inferior.

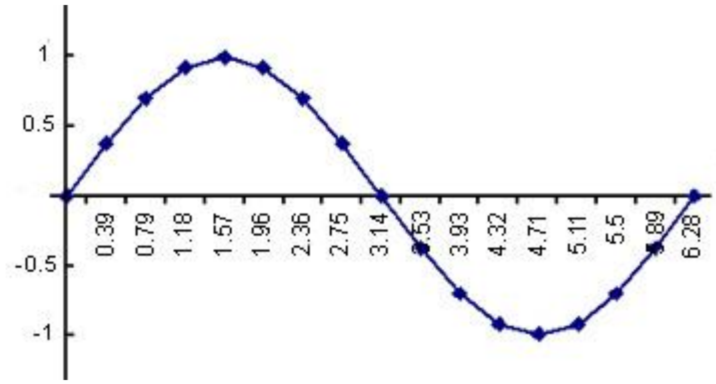


Figura 4: Gráfico Seno.

Si mira detenidamente a este gráfico, verá que la onda cruza el eje x en los múltiplos 3.1416… - el valor de pi. Una onda entera está completa en el valor 6.2832…, o 2π, exactamente la circunferencia del círculo unidad.

Al entender el origen de la función seno, se hace más fácil entender cómo opera en relación a las ondas. Como vimos con anterioridad, la fórmula básica que representa la función seno es:

$$y = Seno\, x$$

En esta fórmula, y es el valor en el eje, que se obtiene cuando se realiza la función $Seno\, x$ en los puntos del eje x. Esto produce el gráfico de la onda básica seno. ¿Pero, cómo podemos representar otras formas de ondas, especialmente aquellas que son más largas o más grandes? Para poder trazar ondas de diferentes tamaños, necesitamos añadir otros términos a nuestra fórmula. Lo primero que veremos es la amplitud.

$$y = A\, Seno\, (x)$$

En esta modificación de la fórmula, “A” nos da el valor de la amplitud de la onda - la distancia que mueve arriba o debajo del eje x, o la altura de la onda. Esencialmente, lo que realiza el modificador “A”, es un aumento (o amplificación) del resultado de la función $Seno\, x$, lo que produce valores y mayores.

Para modificar la “longitud de onda” de una onda, o la distancia de un punto de una onda a un punto igual en la siguiente onda, se usa el modificador “k”, como se puede ver en la fórmula siguiente.

$$y = A\ Seno\ (k\ .x)$$

El multiplicador “k” extiende la longitud de la onda. Recuerde nuestra discusión anterior que la longitud de onda, de la onda más simple es 2π, por consiguiente la longitud de onda en la fórmula final está determinada simplemente dividiendo 2π por el multiplicador “k”, por lo que la longitud de onda $(\lambda)\ =\ \frac{2\pi}{k}$.

Puesto que las ondas siempre están en movimiento, otro término importante para describir una onda es el tiempo que se necesita para que una “longitud de onda” pase un punto específico en el espacio. Este término, referido como el periodo, T, es equivalente a la longitud de onda, $T\ =\ Periodo\ =\ \frac{2\pi}{k}$. Sin embargo, está dado en unidades de tiempo (sec) en vez que de distancia. Entender las matemáticas de las funciones de las ondas, nos permite entender mejor el mundo natural que nos rodea. Por ejemplo, las diferencias entre los colores que usted ve en esta página, tienen que ver con las diferentes longitudes de ondas percibidas por nuestros ojos. De igual manera, la diferencia entre el trinar de un pájaro y el estruendo de una locomotora se debe al tamaño de las ondas de sonido que se emiten. Las ondas, y por consiguiente las ondas matemáticas, nos rodean constantemente.

Los principales elementos que integran la noción de función en general son, la variación, la dependencia, la correspondencia, el dominio, la imagen, la existencia, la unicidad, la simbolización y expresión de la dependencia y las distintas formas de representación (descripción verbal, diagramas de flechas, tablas, gráficas, dibujos, fórmulas). Cada representación hace su aporte a la construcción del significado de la función. Por este motivo es necesario trabajar todas las representaciones y el pasaje de una representación a la otra.

Si nos centramos en el "**estudio de las funciones trigonométricas"** el tratamiento no cambia, sin embargo interpretar el comportamiento trigonométrico no encierra el mismo grado de dificultad que interpretar un comportamiento lineal.

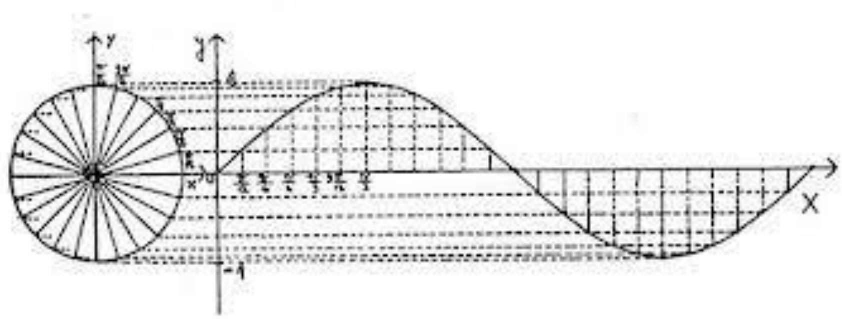


Fig. 5 Comportamiento de la función Seno.

Ahora bien, de las representaciones mencionadas, las más abstractas son, indudablemente, gráficas y expresiones algebraicas. Entonces, ¿es recomendable empezar el tratamiento de las funciones trigonométricas a partir de actividades de construcción?

Si pensamos en dos tipos de actividades:

- De interpretación
- De construcción

Las primeras involucran interpretación de descripciones verbales, de diagramas de flechas, de tablas, de gráficas, de dibujos y de fórmulas y las segundas, involucran realización de descripciones verbales, realización de diagramas de flechas, de tablas, etc.

Las actividades de interpretación no siempre implican construcción pero, las actividades de construcción exigen interpretación porque construir implica elegir el sistema de coordenadas y la escala, identificar la unidad y ubicar los puntos.

Si analizamos la actividad es una buena propuesta para introducirnos en el estudio del círculo trigonométrico y de la función Seno. Si bien se trabaja con alturas y tiempos es un buen contexto inicial para luego pasar a la circunferencia de radio "uno" y a las funciones Seno y Coseno.

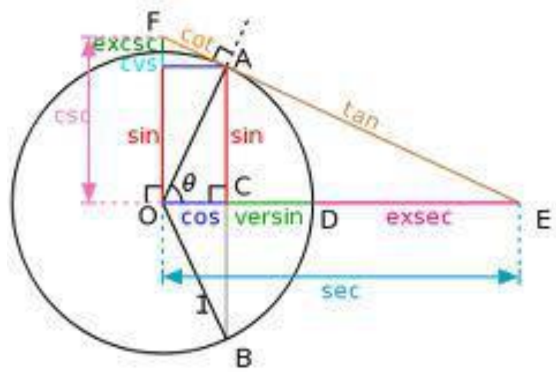


Fig. 6 Círculo unitario con funciones directas e inversas

¿Cómo podemos trabajar actividades de interpretación de objetos tan abstractos como las funciones trigonométricas en los ejes cartesianos y en el círculo de radio 1, llamado círculo unitario?

Propuesta Didáctica

Sin tener una noción de lo que es una función Seno, como concepto matemático el alumno podrá llegar a la construcción de la gráfica y las características relevantes de la misma. Se dará a conocer a la actividad como un juego en donde ellos deberán llevar a la canastilla de la rueda de la fortuna de color distinto hasta girar una o varias veces.

ACTIVIDAD

En una hoja tamaño carta imprimir la siguiente (figura 7),

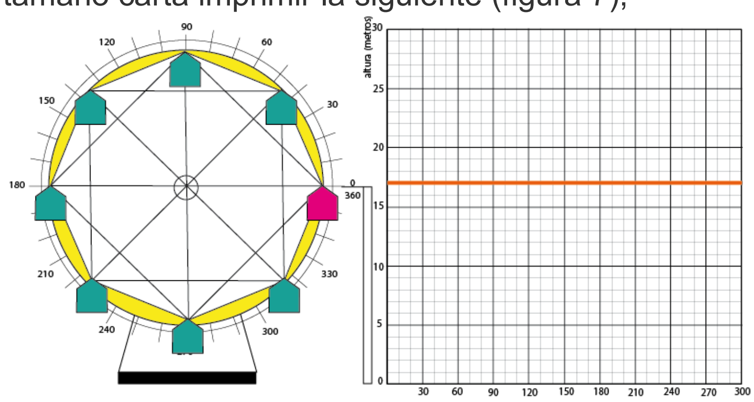


Figura 7.

Coloca encima de la impresión sobre la rueda de la fortuna dibujada otra rueda movible, puedes colocarla sujetándola con una chincheta, para que pueda girar. La tabla del lado derecho está dada en relación a la altura y al tiempo. El tiempo lo consideremos en segundos.

Instrucciones del juego

1.- Empecemos a girar la manecilla haciendo paradas en cada 10°

2. - Trazamos una línea horizontal desde la punta de la manecilla hasta la primera línea de tiempo que aparece (10 segundos) y colocamos un punto. (Figura 8)

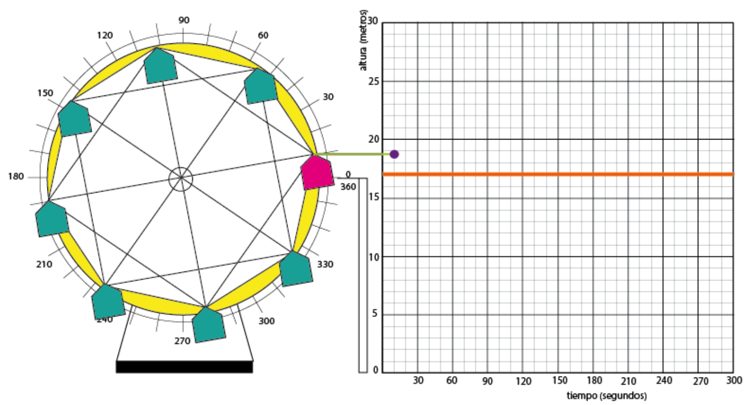
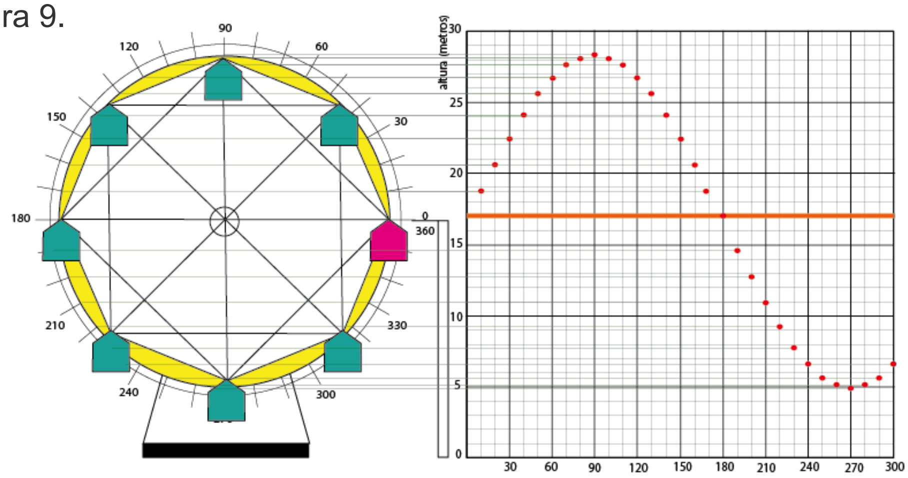


Figura 8

3.– Seguimos avanzando con la manecilla de 10° en 10° trazando cada una de las líneas horizontales que deberán llegar hasta las líneas verticales de tiempo seguidas; colocando sus respectivos puntos.

4. – Al término de la primera vuelta ellos deberán unir los puntos con un lápiz de color distinto al de las líneas horizontales hechas para dar un realce a la gráfica Figura 9.



Al término de la actividad obtendrán una gráfica la cual pertenece a la gráfica de la función Seno, sin necesidad de hacer una tabulación de $f(x) = Sen(x)$, sin saber que es una función trigonométrica, sin tener noción llegan a construir la gráfica.

La actividad anterior está basada en la descripción geométrica de la función Seno.

Descripción Geométrica de la Función seno en la Didáctica

Del círculo en donde el valor del radio es 1, $Seno\ \theta = a$, Figura10, por lo tanto, cuando la rueda gira lo que vamos dibujando son las distintas alturas que puede tener la canastilla a lo largo del recorrido.

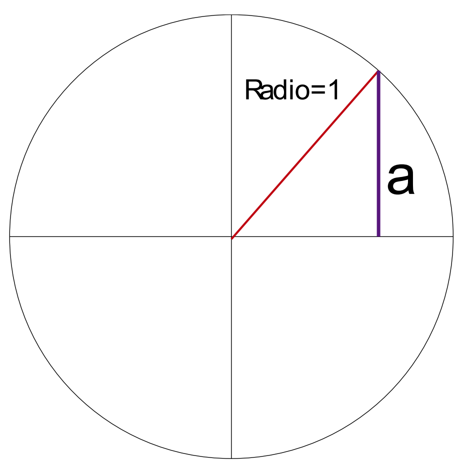


Figura 10

Análisis de Resultados

El proceso de estructuración de la propuesta didáctica para la enseñanza de la función Seno, favoreció la comprensión de este tema a través de la visualización, construcción, explicación y formalización de los aspectos gráfico y analítico de dicha función (Seno).

La revisión de los aspectos históricos que contribuyeron a la conceptualización que hoy se conoce como función Seno, permite observar la riqueza de los procesos de construcción de este conocimiento matemático que surge en el intento de dar solución a problemas irresolubles como movimiento de estrellas y luna (astronomía).

Mediante el uso del proceso de modelación o matematización se da la reinvención guiada del conocimiento matemático, lo que permite que el estudiante cambie la visión de una matemática prefabricada por otra donde es posible “hacerla”, por tanto puede constituirse en una herramienta motivadora en el aula de clase, al igual que potencia el desarrollo de las competencias en los estudiantes promoviendo un cambio de actitud hacia el aprendizaje de la matemática.

Llevar al aula situaciones problema tomadas de la realidad, implica a los docentes explorar ideas, la utilización de recursos, búsqueda de soluciones para integrar lo práctico y lo formal y sobre todo tener la disposición y actitud necesarias para querer hacerlo, sentirse bien haciéndolo y determinar lo pertinente para hacerlo, de tal manera que transforme la situación real en una situación de aprendizaje colaborativo, a medida que se apropia de recursos teóricos y prácticos.

Generar una actividad didáctica no es un proceso mecánico que se requiere de un conocimiento adecuado tanto en conocimiento situado, lo pedagógico y disciplinar.

Referencias

Buendia, G. (2011). *Reflexión e Investigación en Matemática Educativa*. México: Lectorum.

Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México : Trillas.

Leo, G. (2006). Las Matemáticas en el Movimiento de las Ondas: Funciones Trigonométricas. *Visionlearning*, 17-26.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función*. Mexico, D.F.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de las Función Trigonométrica*. México, D.F.

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del Pensamiento Trigonométrico*. México: SEP.

Patricio, H. (2005). Las Prácticas de Hacer Semenjanzas en los Triángulos y la Emergencia de las Razones Trigonométricas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 18, 619-624.