

Sucesiones Figurativas De Segundo Orden, Una Secuencia Didáctica Utilizando Las Variables Como Números Generales

José Rolando Palomino Iraburo, Nancy Janeth Calvillo Guevara, Leticia Sosa Guerrero
palomino_rolando@outlook.com, nancycalvillo@gmail.com,
lsosa19@hotmail.com
Universidad Autónoma de Zacatecas, Unidad Académica de Matemáticas.

Resumen

En este escrito se presenta una problemática relacionada con el uso de sucesiones figurativas de segundo orden utilizando la variable como número general en secundaria (estudiantes que tienen entre 14 y 15 años), en particular, los jóvenes no pueden identificar patrones o comportamientos al hacer uso de sucesiones, tanto numéricas como figurativas, sobre todo cuando son del tipo cuadrático. Para enfrentar tal situación se propone diseñar y aplicar una secuencia didáctica. Se considera que la teoría de situaciones didácticas de Brousseau brindará elementos importantes para su diseño, empleando sucesiones figurativas. Como metodología se utilizará la ingeniería didáctica. Se espera que con la implementación de la secuencia los estudiantes logren el reconocimiento de patrones en sucesiones figurativas y por ende, su posible generalización.

Palabras clave: sucesiones figurativas, segundo orden, patrones, generalización, secundaria.

1. Planteamiento del problema

1.1 Motivación del estudio

El tema de sucesiones en los tres niveles de educación secundaria es un concepto que ayuda al desarrollo del pensamiento algebraico a través del uso de las variables como números generales, “hay quienes consideran que el álgebra tiene que ver esencialmente con los procesos de generalización, y ponen énfasis

en el uso de expresiones generales en las que los símbolos literales representan números generales” (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005, p. 21). En ese sentido, Ferrini, Lappan y Phillips (1997, p. 282) señalan que “el estudio de patrones es una forma productiva para desarrollar el pensamiento algebraico en grados elementales o básicos”.

El tema Patrones y Ecuaciones constituye ya una parte de la currícula o propuesta institucional de algunos sistemas educativos, como el que propone la Secretaría de Educación Pública (SEP) en México, mediante Los Programas de Estudio 2011 de educación secundaria en matemáticas, en donde uno de los propósitos del estudio de las matemáticas en la educación secundaria es que los estudiantes “Modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones” (Méjico, 2011, p.14)

Asimismo uno de los estándares curriculares de matemáticas, que comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos al terminar la educación secundaria es que “el alumno resuelve problemas que implican expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión” (Méjico, 2011, p.16), el cual se encuentra dentro del eje Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico.

En lo que se refiere a las competencias matemáticas una de ellas es:

Resolver problemas de manera autónoma. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones; se trata de que los alumnos puedan probar la eficacia de un procedimiento al cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema, para generalizar procedimientos de resolución. (Méjico, 2011, p. 23)

Como se mencionó anteriormente, las sucesiones aparecen en el estudio de la variable como número general, la cual se aborda desde primero hasta el tercer año de educación secundaria, es aquí donde los estudiantes comienzan a

trabajar con sucesiones numéricas y sucesiones figurativas*, presentándose en ese momento una serie de conflictos de aprendizaje, como son: el no comprender el uso de literales, el comportamiento de patrones, entre otras.

Como consecuencia, éstos podrían acarrear a los estudiantes obstáculos y errores durante su trayecto en la educación secundaria y por consiguiente en el nivel medio superior y superior. Al respecto, la principal conclusión del estudio realizado por Przenioslo (2005) con estudiantes de secundaria y de universidad, fue que muchas de las concepciones de los estudiantes universitarios que ya habían cursado análisis matemático, probablemente habían sido formadas desde que estudiaron en secundaria.

Por otro lado, analizado el libro de texto “Fractal 3” (García y Mendoza, 2008) aunque se abordan las sucesiones de segundo orden, consideramos que son pocos los ejercicios propuestos para encontrar la expresión algebraica, pues, cuando se trabaja con sucesiones figurativas, solamente cuatro son de segundo orden, mientras que son 13 del tipo lineal. Aunado a esto señalemos que el sentido de las sucesiones numéricas se ve limitado al tipo de situaciones en la que se pide "encontrar la regla definida por x sucesión"; es decir, la enseñanza de este tema deja de lado aquellas situaciones donde el estudiante habría de descubrir el por qué o para qué encontrar dicha regla.

Otro aspecto a señalar es que algunos profesores cuando abordan este tema solo plantean ejercicios con sucesiones numéricas. Esto se puede corroborar al revisar las notas de clase de una estudiante de tercer grado de la escuela secundaria “J. Jesús Larios Guzmán” ubicada en la cabecera municipal de Gral. Pánfilo Natera, Zacatecas, donde se observa que la profesora organizó el estudio de las sucesiones numéricas retomando del libro únicamente los ejemplos en los que la sucesión está dada de manera numérica, omitiendo así el uso de sucesiones figurativas.

Es por esto que consideramos importante que cuando el profesor aborde contenidos con sucesiones numéricas de segundo orden, ponga especial

atención sobre todo al uso de sucesiones figurativas en donde los estudiantes logren identificar y deducir las reglas que los rigen, ya que se considera que mediante la implementación de éstas podrían tener una mejor comprensión de la generalización, y por ende, de la variable. En ese sentido, Osorio (2012, p. 81) menciona que “los estudiantes identifican mejor el patrón cuando se trata con figuras, debido al tipo de arreglos, pues permite observar claramente las regularidades, porque se analizan todas sus partes, desde que se descompone, por así decirlo, a la figura”.

A continuación se analizarán algunas investigaciones que se han hecho respecto al tema de sucesiones, para después examinar el planteamiento del problema de investigación y por último una breve introducción al Fundamento Teórico.

1.2 Antecedentes

La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas y abstractas dentro de las matemáticas escolares (Pérez, Pérez y Hernández, 2013). Al respecto, la generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (Vergel, 2015), Polya (1945, citado en Osorio, 2012, p.76) afirma que este tipo de razonamiento da lugar al conocimiento científico porque permite descubrir leyes generales a partir de la observación de casos particulares.

Además, es considerada un medio que conlleva hacia la abstracción, por tanto el aprender un lenguaje algebraico, requiere de la comunicación y ésta, se presenta cuando el alumno identifica un patrón e intenta expresarlo a alguien (Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1985, en Osorio 2012). Al respecto, se detectó que a los alumnos se les facilita el tránsito entre lo aritmético a lo algebraico mediante la construcción de figuras geométricas y tablas con patrones numéricos (Pérez, Pérez y Hernández, 2013).

En este mismo sentido Osorio (2012) y Vergel (2015) concluyen que al tratar con sucesiones figurativas los estudiantes conjeturan y se inician en los principios del álgebra, debido a que hacen uso de expresiones verbales, palabras, dibujos y símbolos que les permiten acercarse a la simbolización.

Por otra parte es importante que los estudiantes desde una edad temprana se vayan relacionando con este tipo de situaciones, ya que según Vergel (2015) el hecho de contar con secuencias figurales propulsa una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual constituye un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico.

Si bien el uso de sucesiones figurativas o numéricas podría permitir a los estudiantes llegar a la generalización y analizar los diferentes comportamientos de patrones, éstos podrían tener ciertas dificultades para llegar a la misma, ya que según Osorio (2011) en una investigación que realizó con actividades que involucraron sucesiones figurativas, con estudiantes de secundaria (14 a 15 años), pudo observar que los alumnos usaron el ensayo y error para determinar valores faltantes en una sucesión, pero desafortunadamente no pudieron llegar a la generalización, cabe señalar que las sucesiones eran tres del tipo lineal y una de segundo orden.

Respecto a las sucesiones figurativas, cuyo patrón se comporta de forma lineal y cuadrático, Osorio (2012) realiza una investigación con estudiantes de tercero de secundaria en donde encontró que cuando se presentan actividades a los estudiantes con secuencias figurativas o numéricas tanto del tipo lineal como cuadráticas, solo algunos estudiantes perciben una regularidad y sí logran observar lo que va pasando de una figura o número a otro, pero identificaron mejor el patrón cuando se trataba con figuras. La mayor dificultad se presentó cuando se trataba de relacionar una figura o número cuyo patrón es de tipo cuadrático.

Ya hemos analizado algunas situaciones que enfrentan los estudiantes al realizar actividades con sucesiones, pero, ¿qué pasa con los profesores? Para

esto Juárez (2011) en su investigación da a conocer las dificultades que tienen 74 profesores de educación secundaria con los diferentes usos de la variable en el álgebra elemental, algunos resultados obtenidos cuando se hizo uso de la variable como número general fueron los siguientes: los profesores contestan correctamente actividades que implican la manipulación; logran desarrollar expresiones algebraicas simples, pero cuando la complejidad de la expresión aumenta los profesores presentan dificultades en la interpretación y la simbolización, muestra de ello fue que de los 74 profesores en la pregunta ¿escribe una fórmula que muestre cómo vas agregando puntos hasta llegar a la figura m -ésima? se obtuvo un 0% de aciertos.

Una vez que se analizaron los antecedentes se consigue apreciar que hay varias investigaciones relacionadas con sucesiones numéricas y figurativas sobre todo del tipo lineal (Osorio, 2011), pero son pocas las relacionadas con el tipo cuadrático. Además cuando se trata de relacionar una figura o número cuyo patrón es de tipo cuadrático, los estudiantes no se percatan de qué está sucediendo de un término a otro, no observan qué pasa de una figura a otra, no alcanzan a identificar el modelo que las rige, mucho menos llegan a simbolizar (generalizar) (Osorio, 2012). Asimismo, según Lozano (1998, citado en Juárez, 2011) encontró resultados poco alentadores sobre la comprensión de los distintos usos de la variable (incógnita específica, número general y en relación funcional) que tienen los alumnos de secundaria, bachillerato y universidad.

Asimismo, un punto importante a resaltar es que los estudiantes identifican mejor el patrón de una sucesión cuando ésta es del tipo figurativo (Osorio, 2012), llegando en algunos casos a la generalización, en donde utilizan expresiones orales, diseños y símbolos lo cual podría ayudarles al desarrollo del pensamiento algebraico.

1.3 Planteamiento del problema de investigación

1.3.1 Problemática

En los Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. En Tercer Grado en el Bloque IV, en el Eje de Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico, cuando se aborda el tema de Patrones y Ecuaciones el contenido es:

- La obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

Donde los aprendizajes esperados son que los estudiantes utilicen en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión. En ese sentido cuando se aborda el tema de sucesiones de segundo orden en tercer año de secundaria, algunas veces se recurre al uso de sucesiones numéricas y figurativas, es aquí cuando los estudiantes enfrentan una serie de problemas como son:

- Llegar a la generalización de una sucesión, ya que algunos utilizan el ensayo y error para determinar valores faltantes, lo cual no es suficiente para resolver la actividad planteada (Osorio, 2011).
- Las sucesiones figurativas o numéricas tanto del tipo lineal, pero sobre todo del tipo cuadrático, ya que varios alumnos no se percatan sobre qué está sucediendo de un número a otro, no observan qué pasa de una figura a otra, lo que les impide que lleguen a la generalización (Osorio, 2012).
- Si bien los estudiantes logran identificar el patrón de una secuencia esto no es suficientes para llegar a la expresión algebraica (Velasco y Acuña, 2010).

Hablar de una solución correcta en un ejercicio relacionado con sucesiones, pero cuando se les pide que lo expresen de forma escrita, no tienen elementos para hacerlo o lo hacen de una manera incorrecta (Londoño, Kakes y Álamo, 2014).

Así que se puede sospechar que las dificultades que enfrentan los estudiantes en los procesos de generalización y cuando hacen uso de sucesiones en los niveles de educación básica, media superior y superior mucho dependerán de la experiencia vivida con las mismas.

Por otra parte en secundaria se da cierta preferencia a los modelos lineales cuando se presentan sucesiones para generalizar y el número de actividades de secuencias figurativas de segundo orden o cuadráticas que se plantean son escasas, lo cual se antepone a los estándares curriculares donde al egresar de la educación secundaria el estudiante “Resuelve problemas que implican expresar y utilizarla regla general lineal o cuadrática de una sucesión” (Méjico, 2011, p.15).

1.3.2 Problema de investigación

Los estudiantes de tercer año de educación secundaria presentan dificultades al no poder identificar patrones o comportamientos al hacer uso de sucesiones, tanto numéricas como figurativas y en consecuencia no llegan a su generalización, sobre todo cuando las sucesiones son del tipo cuadrático.

Objetivo General

Diseñar e implementar una situación didáctica que ayude a los estudiantes a desarrollar e identificar el comportamiento de una sucesión figurativa de tipo cuadrático y su posible generalización.

Objetivos particulares

- Realizar un análisis preliminar que permita rescatar elementos para el diseño de una secuencia didáctica.

- Diseñar una secuencia didáctica relacionada con sucesiones figurativas del tipo cuadrático.
- Implementar la secuencia didáctica a estudiantes de tercer año de secundaria.
- Analizar los resultados obtenidos para mejorar el diseño.

Se espera que a través de la secuencia didáctica los estudiantes logren identificar el patrón en la sucesión y con esto consigan llegar a la generalización.

Hipótesis

“Se considera que con la implementación de la secuencia didáctica, los estudiantes lograrán el reconocimiento de patrones en sucesiones figurativas de tipo cuadrático y por ende podrían llegar a la generalización”.

Justificación

El tema de sucesiones numéricas se aborda en los planes y programas de estudio en diferentes niveles de educación en México como son preescolar, primaria, secundaria y medio superior (Torres, Borjón y Hernández, 2013), es decir, durante todo el proceso educativo básico los estudiantes deben de estar trabajando con actividades en donde se vea implícito el tema de sucesiones.

Además, cuando se abordan problemas relacionados con sucesiones de segundo grado en tercer año de secundaria se presentan pocas actividades con sucesiones figurativas, en algunos casos no se proponen actividades con dichas secuencias y en otros más ni siquiera se alcanza a desarrollar el tema. Es por eso que nosotros proponemos implementar una secuencia didáctica en la que se involucren secuencias figurativas de segundo orden o cuadráticas, en donde los estudiantes logren por sí solos visualizar el comportamiento o el patrón da la figura y con esto tengan mayores posibilidades de llegar a una deducción.

2. Fundamento Teórico y Metodológico

Para el diseño de una propuesta didáctica es importante saber qué actividades debemos plantear y de qué manera, para lograr el aprendizaje que pretendemos. Por esta razón es que nos basaremos en la Teoría de Situaciones Didácticas desarrollada por Brousseau (1986), pues ésta propone el estudio de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos, y menciona que los alumnos aprenden por adaptación al medio.

Así, dentro de esta teoría se propone un modelo que intenta explicar el comportamiento didáctico, para ello utiliza conceptos que describen el proceso enseñanza – aprendizaje, algunos de estos conceptos son la clasificación de los tipos de situaciones en las que se encuentra un alumno: acción, formulación, validación, institucionalización.

Además, es una teoría amplia que permite considerar que todos los fenómenos pertinentes puedan ser tomados en consideración, así podremos utilizar modelos adecuados para trabajar en la mayoría de los casos.

Por otro lado como metodología de la investigación se propone La Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), que comprende cuatro fases:

- Análisis preliminares. Donde realizaremos un estudio epistemológico para analizar la manera en que las sucesiones figurativas se constituyeron como tema de estudio en secundaria. Además se efectuará revisión acerca de la manera en que se trabajan las sucesiones figurativas en secundaria, y una inspección para analizar qué problemas en particular tienen los sujetos de nuestro estudio con respecto al tema.
- Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas. Con base en los resultados de los análisis preliminares se retomarán aquellos elementos que se consideren pertinentes para el aprendizaje de las sucesiones figurativas. Esto permitirá organizar una situación de aprendizaje en la que habremos de distinguir las variables didácticas.

También plantearemos dicha situación y realizaremos el análisis a priori respectivo, donde explicitaremos los supuestos, los probables y los seguros, de manera que nos permitan trazar la mayoría de las rutas que los alumnos pudieran tomar en la experimentación.

- Experimentación. Esta fase comprende la descripción de la manera en que se llevará a cabo la puesta en escena y la manera en que se hará la recopilación de evidencias.
- Los análisis a posteriori y validación. En esta fase se analizará lo que sucedió en la puesta en escena. Para la validación (interna) se realizará una confrontación entre los análisis a priori y a posteriori.

En general, se realizará un estudio del tipo cualitativo, donde se trabajará con estudiantes de educación secundaria, implementando una secuencia didáctica.

3. Conclusiones

Los estudiantes de secundaria presentan dificultades al no poder identificar patrones o comportamientos al hacer uso de sucesiones, tanto numéricas como figurativas y en consecuencia no llegan a su generalización, sobre todo cuando las sucesiones son del tipo cuadrático, por eso es necesario, que los profesores de matemáticas tengan herramientas que les permitan poner a los estudiantes en situaciones de aprendizaje donde estudien algunas sucesiones figurativas de segundo orden. Esperamos que esto les permita tener una mejor comprensión del uso de la variable como número general.

Es así que esperamos con esta propuesta poder brindar al profesor una herramienta didáctica que le ayude a desarrollar en sus estudiantes una mejor comprensión del uso de la variable como número general, y por consecuencia aportar para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Por otra parte, consideramos que la elección de la teoría de situaciones didácticas como marco teórico y de la ingeniería didáctica como metodología,

nos aportarán varios elementos teóricos que nos ayudarán a comprender el fenómeno de la enseñanza, por ende, nos facilitarán tanto la elaboración de la situación didáctica, como su validación.

Referencias

- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En: M. Artigue, *Ingeniería Didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Iberoamérica, pp. 33-59.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 7(2), 33-155. (versión castellana).
- Ferrini, J., Lappan G. & Phillips E. (1997). Experiencies with Patterning. *Teaching Children Mathematics*, 3 (6), 282-289.
- García, S. y Mendoza, T. (2008). *Fractal 3. Matemáticas. Secundaria. Tercer Grado*. México: SM.
- Juárez, J. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 76, 83-103. Recuperado 25 de Febrero de 2015, de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/76/Articulos_04.pdf.
- Londoño, N., Kakes, A. y Álamo, A. (2014). Del reconocimiento de patrones a la generalización. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 361-367. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf>

México. Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011, Guía para el maestro. Educación básica secundaria. Matemáticas*. D.F., México.

Osorio, J.C. (2012). Procesos de generalización que intervienen en el aprendizaje del alumno al hacer uso de sucesiones. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 25, 75-83. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme25.pdf>

Osorio, J. C. (2011). Dificultades para la construcción de un modelo algebraico de segundo orden a través de sucesiones, para definir el enésimo término. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 24, 13-22. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf>

Pérez, A. R., Pérez, A. D. y Hernández, H. (2013). Secuencia didáctica para facilitar la transición entre la aritmética y el álgebra. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 863-871. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme26v.2.pdf>

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Students in Mathematics*. 60: 71 – 93. Torres, M., Borjón, E. y Hernández, J. (2013). Una aproximación al concepto de sucesión con uso de tecnología por medio de representaciones semióticas en el nivel bachillerato. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 2011-2018. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme26.pdf>

Torres, M., Borjón, E. y Sosa, L. (2012). Representaciones semióticas del concepto de sucesión con uso de tecnología TI-INSPIRE. *VI Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática “Dr. Eugenio Filloy Yagüe”*. México.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y M. Trigueros (2005). *Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa*, México, Trillas.

Velasco, K. y Acuña, C. (2010). El uso de patrones geométricos para la construcción del lenguaje simbólico en estudiantes de nivel medio superior. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 23*, 805-811. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme23.pdf>

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9(3)*, 193-215.

* Conjunto de figuras con la propiedad de que hay un patrón de crecimiento que permite encontrar todas las figuras, empezando por la que ocupa el primer lugar de la sucesión; luego la que ocupa el segundo lugar; luego la que ocupa el tercer lugar y así sucesivamente (Araujo, García, García, y López, 2006, p. 40).