# Justificación En La Solución De Ecuaciones Lineales En Alumnos De Primero De Secundaria

Horacio Sostenes, Apolo Castañeda
Escuela Secundaria Técnica 209 "IGNACIO ALLENDE", CICATA-Legaria
Huehuetoca, México

**Resumen**

Se presenta avance de una investigación que se realizó con alumnos de primer grado de secundaria, en el que se analizan las justificaciones que ofrecen los estudiantes cuando resuelven ecuaciones de la forma $ax = b$. Se pone especial atención en caracterizar el tránsito entre las ecuaciones de la forma $x + a = b$ a las de la forma $ax = b$, a las estrategias que construyen los estudiantes y a los procedimientos que siguen.

**Palabras clave:** Pensamiento algebraico, Error, Algebra, Ecuación, Modelo

El pensamiento de los estudiantes en la introducción al lenguaje algebraico aún representa un camino bastante ambiguo. Hay actividades que guían el aprendizaje, y que cada docente ajusta a las necesidades tanto de él mismo como de los alumnos. En éste sentido, pocas veces se observa y analiza de forma aislada la propia naturaleza del pensamiento que el alumno va desarrollando al enfrentarse a problemas matemáticos.

Es de interés poder analizar la manera en que los alumnos estructuran su saber y lo llevan más allá, en este caso el tránsito de la solución de ecuaciones de la forma $x + a = b$ a las de la forma $ax = b$. En éste pasaje, los alumnos inician con un acercamiento al lenguaje algebraico, que más que ser enseñado, va desarrollándose paulatinamente por ellos mismos. Ellos mismos validan sus ideas probando la utilidad o inutilidad de los procesos empleados, logrando iniciar el desarrollo de las habilidades propias del álgebra.

### Propósito de la investigación

A través de las entrevistas y recopilación de la información con alumnos de primer año de secundaria, se analiza su proceso cognitivo en la solución de ecuaciones de primer grado. De forma específica el tránsito que se va generando en la solución de ecuaciones de la forma $x + a = b$ (1) a las ecuaciones $ax = b$ (2), donde en ésta última es sujeto de análisis la manera y momento en que es hallado el valor de la incógnita y, la interpretación que los estudiantes dan a la solución encontrada.

Para ello se han estructurado tres momentos de análisis: El primero, donde los alumnos presentan un acercamiento a la solución de ecuaciones de la forma **uno**. Aquí se pretende que los alumnos formulen un proceso operatorio para determinar el valor desconocido, experimenten y puedan relacionar el número encontrado con el valor de la incógnita. Se espera que los alumnos puedan solucionar la ecuación operando con un proceso similar a $x = b - a$.

El segundo momento, sirviendo como re-afirmamiento de que el proceso que utilizaron sirve para solucionar ecuaciones de la forma **uno**, permitiendo llegar a una generalización temprana.

El tercer momento, donde los alumnos enfrentan la inutilidad de su proceso anteriormente implementado, teniendo que buscar una nueva estrategia operatoria para poder determinar el valor de la incógnita, es analizado. Si anteriormente el proceso involucraba una sustracción, ahora requerirá la comprensión de que $ax$ es un producto, por lo tanto, para determinar el valor de la incógnita $x$ se requiere recurrir a un cociente de $b$ por $a$. De ésta manera, el sentido de producción que los alumnos generan para poder justificar la igualdad, implementando un cociente y la forma en que lo hacen, es el propósito del análisis de éste momento.

## Análisis teórico

El estudio del pensamiento algebraico está teniendo constantes investigaciones y propuestas de implementación en la educación básica. El reto de la investigación en pensamiento algebraico es aún “diseñar estudios que incrementen nuestro conocimiento de cómo pueden los estudiantes llegar a comprender la estructura del álgebra elemental y los métodos algebraicos” (Socas, 1999).

Es así que ésta investigación parte de los propósitos antes planteados, rescatando además un breve análisis de los errores que presentaron los alumnos en la secuencia. Para ello, cualificando que aprender álgebra en palabras de Radford (2000, citado en Rojano, Filloy y Puig, 2014) es la apropiación de una nueva y matemática específica, forma de actuar y de pensar que es dialécticamente entrelazada con un nuevo uso y producción de signos cuyos significados son adquiridos por los estudiantes como resultado de su inmersión social en actividades matemáticas.

Álgebra no se puede considerar únicamente como una simple generalización de la Aritmética; aprender Álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en Aritmética; el Álgebra supone un cambio en el pensamiento del estudiante y la dificultad para muchos principiantes de la transición desde lo que puede considerarse modo informal de representación y resolución de problemas, al modo formal. (Socas, 2011)

Éste pensamiento hace que disminuya la dependencia aritmética según aumenta el nivel académico. Aproximadamente desde los 11 o 12 años el niño es capaz de realizar razonamientos abstractos y sistemáticos y aritméticamente ha alcanzado cierto nivel de reversibilidad operatoria. Es el momento de las formalizaciones y, como consecuencia de ello, del aprendizaje del álgebra. “La formación algebraica consiste en la adquisición: del sentido de la reversibilidad de operaciones; del dinamismo operatorio que resulta de las equivalencias y de las combinaciones cíclicas que se pueden obtener añadiendo un nuevo par de operaciones inversas en un ciclo dado; y del interés por la determinación a priori de las propiedades que puede tener un conjunto de operaciones" (Gattegno, 1968, citado en Esquinas, 2009).

El pensamiento algebraico hace que paulatinamente se empiece a realizar una notación en lenguaje algebraico, ésta presenta ventajas como la posibilidad de expresar generalizaciones de situaciones, lo que permite hacer inferencias y transferencias de las mismas situaciones a otras formas más complejas del conocimiento. Al observar una regularidad o un patrón de comportamiento, aparece la necesidad de expresarlo, de comunicarlo y es el lenguaje algebraico, por ser más sucinto, el indicado (Torres, Valoyes y Malagón, 2002).

**Antecedentes de la investigación**

Previo a la selección para el análisis de los casos relatados a continuación, se hicieron pruebas de recopilación de información con varios estudiantes de la misma comunidad estudiantil.

El primer acercamiento constó en definir la actividad de indagación de contenidos algebraicos a realizarse con alumnos de segundo grado, ésta fue el análisis de las soluciones de las ecuaciones del tipo $a + x = b$, $ax = c$ y $ax + b = c$, poniendo énfasis en el análisis de la solución del segundo y tercer caso. Las respuestas fueron grabadas en audio, teniendo además prueba escrita de los ejercicios que los alumnos realizaron.

Al analizar se detectó que los alumnos hicieron una reconstrucción del conocimiento al ya haberlo visto antes, con lo cual fue necesario redirigir el trabajo a alumnos de primer grado, quienes por el momento de la investigación aún no habían analizado los procesos algebraicos.

Como segundo acercamiento se realizaron las entrevistas a los alumnos de primer grado, a quienes se les pidió resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita de la forma antes mencionada. Durante las entrevistas, se presentó la situación de que al dictar la ecuación a los alumnos, al no tener práctica en la utilización del lenguaje algebraico, presentaron confusiones en la escritura. Ejemplo: al dictar “dos equis igual a diez”, escribían en su lenguaje “$xx=$10”, ocasionando que el trabajo se desviara de sus fines. En palabras de Rodríguez (2012) “la mayoría de los errores identificados al traducir de la expresión verbal a la simbólica son derivados de las características propias del lenguaje algebraico. Además éstas habilidades no están disponibles en todos los sujetos, dependen de un trabajo didáctico adecuado y del nivel de escolarización alcanzado (Elichiribehety y Otero, 2004).

Se concluyó que el objetivo de análisis no es si los alumnos saben escribir algebraicamente, más bien, el tránsito y momento al resolver ecuaciones de la forma $x+b=c$ y de la forma $ax=b$ analizando detalladamente el proceso y pensamiento al resolver ésta última.

Como tercer acercamiento, se repitió el diálogo con alumnos distintos a aquellos con quien ya se había rescatado información anteriormente. El análisis constó de doce casos de los cuales por la claridad en las respuestas fueron elegidos cuatro para ser analizados mas a fondo. De cada diálogo se rescató la transcripción del audio grabado y la hoja donde los estudiantes realizaban sus procesos operatorios.

**Análisis de las entrevistas y argumentos de los alumnos al resolver las ecuaciones**

Como punto de partida se tienen los diálogos con alumnos de primer grado, quienes en el momento no presentaban conocimientos sobre la solución de ecuaciones de primer grado, entendiendo éstas como una igualdad entre dos expresiones, que contienen una o más variables con exponente uno.

Los alumnos inician la noción de que las letras representan un valor desconocido, que es el que deben determinar. En éste sentido las letras aparecen, en general, ligadas con expresiones sintácticas que adquieren sentido en estructuras definidas a partir de relaciones como *"igual que", "menor que",* y de acuerdo con las interpretaciones que los estudiantes tengan tanto de estas relaciones, como de los símbolos que las representan. Por ejemplo, para las interpretaciones de las letras, y en general de las *expresiones algebraicas*, el estudiante trae como sistema de referencia el aritmético, así que, desde éste, la mayor posibilidad de contextualizar conceptualmente el uso de la letra, es verla como una generalización de número (Pretexto, 1997, citado en Rojas, 2010).

Esquinas (2009) expresa que una letra puede funcionar como parámetro (como representación de un valor constante en general que, a veces, puede ser fijado aleatoriamente y otras vendrá determinado por ciertas condiciones según el caso concreto); como variable (en el cuál lo que nos interesa no es tanto el conjunto de valores que representa, sino la relación de dependencia que experimenta con otras variables de la misma expresión); o como incógnitas (representando uno o varios valores desconocidos que vienen determinados por la imposición de ciertas condiciones). En éste estudio el enfoque de las letras es el de incógnita.

El análisis que enseguida será presentado rescata fragmentos de dos diálogos realizados. Cada entrevista será diferenciada por las anotaciones **J**, correspondiente a la plática con Jennifer, **C** para la plática con Cesar. La parte correspondiente a los diálogos del entrevistador será distinguida de ahora en adelante con la letra **E**.

Diálogo con J:

*E: Para empezar ¿Sabe qué es una ecuación?*

*J: No*

*E: No. Entonces: Ésta es una ecuación x+9=12. Usted tiene que encontrar el valor de la incógnita equis que representa un valor. ¿Cómo puede encontrar ese valor?*

*J: Restando doce menos nueve.*

*E: Haber colóquelo.*

*J: Escribe: 12-9. Ya. Cuatro.*

*E: ¿Cuatro es el valor de qué?*

*J: De equis.*

J tuvo rápidamente la idea de encontrar el valor de la incógnita realizando una diferencia, pero pudimos darnos cuenta que aunque su proceso no demoró, su resultado presentó un error, y al no cuestionar sobre si las operaciones así como su resultado fueron realizados adecuadamente, ella supuso que el número era correcto. Como señala Matz (1980, citado en Ruano, Socas y Palarea, 2008) los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación.

Para resolver la segunda ecuación su proceso nuevamente fue de forma inmediata. Al hacer sus operaciones de forma rápida presentó un resultado erróneo, que al ser detectado inmediatamente por ella misma, fue corregido.

Ahora en el tercer momento, es donde ella tiene que analizar si el proceso que ha usado al resolver la ecuación uno y dos, le servirá para resolver la ecuación tres (*2x=10*), o deberá buscar una nueva estrategia. Tal como señala Mason (1999, citado en Torres, Valoyes y Malagón, 2002) dentro del proceso de desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, es fundamental presentarles situaciones donde se requiera establecer relaciones, identificar características comunes a los casos específicos y llegar a una lectura y escritura de lo general.

También debe darse cuenta que la estructura que tiene la ecuación tres es diferente, por lo tanto supone un cambio sustancial que hará la diferencia al momento de resolverla.

El proceso cognitivo que realizó J fue muy rápido, y puede apreciarse que inmediatamente sin necesidad de hacer tantas preguntas se percata que $2x$ es un producto y no una suma como en los casos de la ecuación uno y la dos. Al determinar el valor de la incógnita no recurrió a un cociente, más bien lo hizo con una prueba, lo cual le sirvió en el caso sencillo. En este sentido, cabe destacar el argumento de J que justifica el valor de la incógnita “Es cinco, porque dos por cinco da diez”.

Al colocar una ecuación más (*4x=15*), donde ahora su proceso requiere más precisión, éste no le sirvió pero nos deja ver claramente sus ideas. Consistieron en buscar los múltiplos del coeficiente para determinar el resultado, y la segunda idea fue buscar los divisores del resultado, para determinar dos números que por producto den el resultado. El proceso del aprendizaje y desarrollo del pensamiento algebraico no solo involucra memorizar algoritmos, reproducir lo hecho, o hacer ejercicios. Tal como lo señala Montoro, Ferrero y Ferraris (2003), se deben buscar soluciones, explorar modelos y formular conjeturas.

El argumento de J, y en los casos posteriores nos comparte sus ideas matemáticas, que parten de la interpretación que dan a la ecuación presentada. Esto permite determinar varias interpretaciones que la ecuación puede tener para ellos en sus ideas matemáticas.

- El doble de un número es igual a diez
- Diez es igual a dos por un número
- Dos veces un número es diez
- Dos equis equivale a diez

De estas interpretaciones que son conceptualmente distintas, con la que mayormente se identifica J corresponde a la segunda. Percibe de manera inmediata que dos debe multiplicarse por un número de manera que lleguemos a obtener diez, con lo cual no se llega a analizar que diez puede dividirse por dos para obtener el valor desconocido, mas bien se hacen pruebas. En su idea presenta una justificación válida

Diálogo con C:

Durante el momento uno, C no logra llegar a lo esperado para éste momento, lo que hace es de forma inmediata percatarse del valor faltante para llegar a diez, y lo expresa sin necesidad de requerir más operaciones debido a que su valor determinado satisface lo preguntado.

En el momento dos (resolviendo la ecuación $x+9=13$) su proceso no se centra en utilizar lo que ya le sirvió en el caso anterior, sino que busca un nuevo proceso que permite encontrar el valor requerido. Su proceso satisface lo que se esperaba para el momento uno, además es capaz de justificar de tres maneras distintas el resultado 4, que fue el valor obtenido ("Es la cifra del nueve hacia el trece, lo que es para sumar trece, nueve más cuatro son trece"), dejando claramente evidenciado que ha comprendido el sentido de cuál era el valor que hacía falta en la ecuación (Flores, 2005).

Para el momento tres (resolviendo la ecuación $2x=10$), C en sus ideas matemáticas pregunta de forma inmediata "¿Se puede multiplicar también?", con lo cual nos permite apreciar que su concepción de la ecuación representa un producto, y se confirma cuando argumenta "dos por cinco es igual a diez, porque en las multiplicaciones el dos por cinco da diez, y es el resultado de la tercera ecuación, diez". Al resolver la ecuación es capaz de expresar de forma instantánea la solución de la ecuación, pero al profundizar más, el mismo es quien analiza que también puede determinar el valor con un cociente.

En éste caso, profundizando un poco mas para lograr un reafirmamiento de su proceso utilizado, se optó por pedir que resolviera una ecuación donde ahora el valor no es exacto sino fraccionario o decimal. Al C intentar resolver la ecuación y determinar el valor de la incógnita, nos percatamos que aunque se da cuenta que las ecuaciones son parecidas, no es capaz de utilizar el mismo proceso que ya le fue de utilidad en el caso inmediato anterior, sino que intenta justificar su resultado con una suma, regresando al momento uno. Esto indica que su algoritmo le resulta útil, justifica su resultado aunque no es correcto. Tal vez esto comprueba la idea de Socas (2011) quien opina que en el aprendizaje de los alumnos encontramos ciertas incapacidades para operar espontáneamente con variables al igual que las encontramos en la evolución histórica del Álgebra.

## Discusión final

El análisis de las respuestas que ofrecen los estudiantes, nos permite caracterizar sus procedimientos y estrategias que construyen para resolver la ecuación planteada. Al identificar las rutas de solución se logra describir el pensamiento matemático del estudiante, y esto le permite al profesor anticipar problemáticas y dificultades, pero también es útil para diseñar actividades y guiarlos en la formalización de procedimientos que ellos mismo construyen y validan. En nuestro caso, observamos que los estudiantes formular procedimientos de solución que están definidos por reglas aritméticas y probados a través de ensayo y error.

La actividad que realizan los estudiantes para resolver ecuaciones del tipo $ax = b$ se fundamenta en procedimiento intuitivos, al considerar que $ax$ representa un producto de dos números donde $a$ es un número conocido, lo que restaría por determinar es el otro factor. Al profundizar en la justificación de este procedimiento se identificó que algunos estudiantes pueden obtener el otro factor recurriendo a un cociente, como pudo apreciarse en el caso de I y C.

A partir de los casos descritos en este artículo, concluimos que algunos estudiantes recurren procedimientos de prueba y error cuando se enfrentan a planteamientos desconocidos, aunque resulta muy evidente que no rompen las reglas aritméticas pues más bien, se enfocan en determinar un procedimiento exitoso para resolver el problema, incorporando un dominio sobre el lenguaje simbólico del álgebra (Torres, Valoyes y Malagón, 2002).

**Referencias**

Elichiribehety, I. y Otero, M. (2004) La relación entre los marcos de resolución y los modelos mentales en la enseñanza del álgebra. *Educación Matemática*, 16 (1), 29-58.

Esquinas, A. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: Aplicación a la práctica docente.* Tesis doctoral no publicada. Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

Flores R. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Educación Matemática*, 17 (2), 7-34.

Montoro, V., Ferrero, M. y Ferraris C. (2003). Rol que le asignan los docentes a los ejercicios y problemas en las clases de aritmética. Un trabajo Exploratorio. *Educación Matemática*, 15 (3), 109-117.

Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M., Molina, M. y Castro, E. (2012). *Errores en la traducción de enunciados algebraicos en la construcción de un dominó algebraico. En Educación Matemática.* Simposio de Educación Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Argentina.

Rojas, P. (2010, octubre). *Iniciación al álgebra escolar: Elementos para el trabajo en el aula. En Matemática Educativa.* Curso dictado en 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa, Bogotá, Colombia.

Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA 2*(2), 61-74.

Socas, M. (1999). *Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico. En Educación Matemática.* Actas del III SEIEM (pp. 261-282), Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Valladolid, España.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*. 77, 5–34.

Socas, M., Camacho M., y Hernández J. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 32, 73-86.

Torres, L., Valoyes, E. y Malagón R. (2002). Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar. *Revista EMA*, 7 (2), 227-246.