

## Espacio Vectorial: Un Análisis Socioepistemológico

Sergio Raymundo Betanzos Sarmiento  
Facultad de Ingeniería

### **Resumen**

El presente trabajo es un avance en la investigación titulada “Análisis Socioepistemológico del Espacio Vectorial” en la cual se detalla la manera en que pretendemos abordarla. Estamos interesados en este concepto ya que sabemos que presenta dificultades en el aprendizaje en alumnos universitarios, cuyas licenciaturas están cargadas fuertemente de contenido matemático, debido a factores como lo abstracto del mismo y su naturaleza generalizadora y unificadora. Nos interesa pues conocer la génesis del Espacio Vectorial y profundizar en cómo éste fue construido.

Para lograr esto hacemos una revisión de los principales trabajos que aportan información para el desarrollo de nuestra investigación de manera significativa, buscaremos en dichos trabajos los personajes, conceptos, trabajos, matemáticos clave y las prácticas sociales que dieron forma a esta estructura Matemática.

Nos apoyaremos de la Socioepistemología para poder entender cómo fue construido en sociedad este concepto, las actividades matemáticas que hicieron posible dicha estructura, para entonces poder explicar la transposición del saber, ya que consideramos que con estos elementos nuestra investigación nos dará herramientas que facilitarán la construcción del concepto en los alumnos. Haremos uso del esquema metodológico de Montiel y Buendía (2012).

**Palabras clave:** Socioepistemología, Espacio Vectorial, Práctica social

### **Antecedentes**

Uno de los antecedentes para esta investigación lo encontramos en Parraguez (2009), una tesis doctoral de interés para nosotros porque recoge en los primeros capítulos información importante relativa al nacimiento del concepto Espacio Vectorial (EV), esta investigación se centra en una descomposición genética del concepto EV a través del ciclo de investigación planteada por la teoría APOE

compuesta por tres componentes: Análisis teórico, Diseño y Aplicación de instrumentos y, Análisis y verificación de datos.

Con base en dicho análisis teórico diseñamos dos instrumentos: un cuestionario diagnóstico y una entrevista buscando detectar las construcciones que habíamos considerado en la descomposición genética preliminar, eligiendo las preguntas de tal manera que permitirían obtener información profunda respecto a la manera de pensar de los estudiantes. Estos instrumentos fueron aplicados a los estudiantes matriculados en el programa de Licenciatura en Matemáticas en el Instituto de Matemáticas (IMA) de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV-Chile). El análisis de los resultados obtenidos con estos datos empíricos nos permitieron refinar nuestro análisis teórico y presentar una descomposición genética mejorada. Este análisis teórico además de ser un modelo de aprendizaje representa una herramienta didáctica que señala estrategias de enseñanza del concepto espacio vectorial (Parraguez, 2009, pp. 9-10).

Esta investigación además de la descomposición genética que aporta, sugiere estrategias en las conclusiones que dan alternativas para construir este concepto matemático tal como se menciona en la cita anterior. La investigación nos advierte de lo complejo de la construcción de tal concepto en el devenir del tiempo.

Hoy en día, es la culminación de un largo y accidentado proceso de evolución histórica, durante el cual este concepto y otros conectados con él (independencia y dependencia lineal, base, dimensión, transformación lineal, etc...) se encontraban implícitos en diferentes contextos de la matemática o la física. (Parraguez, 2009, p. 13)

Es importante señalar que prácticamente es nula la información existente acerca de los orígenes del espacio vectorial hasta Gray (1980) (Parraguez, 2009) y sin embargo contrastarlo con el hecho de cómo el concepto es introducido en la escuela a través de textos universitarios.

Un ejemplo de ello, es un primer curso de álgebra lineal para Licenciatura en Matemática, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile (PUCV), donde el concepto de espacio vectorial suele introducirse mediante explicaciones relacionadas con la definición de espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo  $K$ . Dicho

procedimiento de explicación consiste en aclarar qué significa que  $(V,+)$  tenga estructura de grupo. (Parraguez, 2009, p. 13)

Coincidimos con la autora cuando afirma que la opinión de los profesores este acercamiento al concepto que es abstracto hace de su aprendizaje un proceso lento y en muchos casos el estudiante no tiene claro en su mente la serie de requisitos que debe tener  $V$  para ser un espacio vectorial sobre  $K$ . Esto plantea dificultades en el estudiante al momento de enfrentarse con el concepto al respecto los autores comentan:

Se sabe que las dificultades que muestran los estudiantes para alcanzar una adecuada comprensión de los conceptos del álgebra lineal, en particular el de espacio vectorial tienen orígenes diversos; uno de ellos es el epistemológico: el concepto de espacio vectorial no fue creado para resolver problemas, sino para unificar y generalizar métodos y conceptos ya existentes (Dorier 1990, 1995a, 1995b)... Una primera tentativa en revelar las fuentes de las dificultades de los estudiantes en álgebra lineal, a través de un análisis histórico y epistemológico se puede encontrar en Robinet (1986). El trabajo en esta dirección fue seguido por Dorier (1995a; 1996; 1997 y 2000). Estas investigaciones no solamente sirvieron como referencia para una mejoría de los errores y las dificultades de los estudiantes, sino también se han utilizado como inspiración para diseñar actividades para los estudiantes. Particularmente un resultado de estas investigaciones es el referido con la fase pasada de la génesis de la teoría de espacios vectoriales. Las raíces de este paso final se pueden encontrar a fines del siglo diecinueve, pero realmente comenzó solamente después de 1930. (Parraguez, 2009, p. 15-16)

Resaltamos de los párrafos anteriores lo que para nosotros es un supuesto de investigación al considerar que el concepto fue creado de una necesidad para unificar y generalizar métodos y conceptos ya existentes. Atendiendo a estas dificultades el trabajo de Parraguez propone:

En nuestra opinión, para el entendimiento de espacio vectorial, se requiere además del dominio de las definiciones y de ciertas técnicas específicas, de la comprensión de las propiedades y teoremas que hacen evolucionar la teoría

matemática del álgebra lineal, así como de un manejo equilibrado entre el desarrollo conceptual con el tratamiento algorítmico. (Parraguez, 2009, p. 15)

Tal manejo equilibrado en nuestra opinión no existe en el discurso actual como por ejemplo en las carreras de Ingeniería en donde el tratamiento algorítmico se ve privilegiado o en las carreras de Matemáticas o Física en la que se recae el mayor peso en la teoría Matemática.

Investigaciones han reportado que el discurso matemático escolar del álgebra lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en deterioro de la comprensión de nociones básicas (Dorier y Sierpinska, 2001; Sierpinska et al., 2002). (Parraguez, 2009, p. 16)

Otro antecedente en particular de suma importancia la hemos identificado en Dorier (1995) que es uno de los referentes en la génesis del concepto de espacio vectorial, en esta investigación se habla de la génesis del EV a través de una revisión histórica en donde resaltan personajes como Gabriel Cramer que sienta las bases de la teoría de los determinantes, Euler que aborda las curvas algebraicas desde la paradoja de Cramer, Frobenius con quien el concepto de rango alcanzó su madurez entre otros.

En el capítulo de “Estudios Relacionados con el Concepto de Espacio Vectorial Parraguez (2009) argumenta respecto de Dorier:

Un análisis epistemológico cuidadoso lleva a Dorier (1990, 1995a y 1995b) a la conclusión de que el concepto de espacio vectorial pertenece a una clase de conceptos que él llama “unificador y generalizador” porque no fueron creados para resolver problemas, sino para unificar y generalizar métodos y conceptos ya existentes. Basado en este análisis propone un ambiente para que los estudiantes lleguen a establecer por sí mismos los axiomas que definen un espacio vectorial. (Parraguez, 2009, p. 22)

Nos interesa abordar el análisis de este y trabajos de Dorier de carácter epistemológico desde nuestro marco teórico para poder dar nuestra propia interpretación de los hechos y poder entender la transposición de estos saberes.

### **Problema de investigación**

Es un hecho para nosotros que el concepto de Espacio Vectorial es un concepto complejo en su construcción como en la teoría Matemática que la acompaña, sabemos que los alumnos Universitarios que ven por primera vez este concepto presentan dificultades en el aprendizaje del mismo, que tampoco ven un gran campo de utilidad en su uso y que la manera en cómo está presente en el discurso escolar colabora en que esto suceda.

En relación a estas dificultades en Parraguez (2009) hace mención de los resultados de investigadores franceses entre ellos (Dorier, 1998) en donde afirma: Estos autores concluyen que “para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal es sólo un catálogo de nociones muy abstractas que ellos no manejan”. Por otro lado, ellos nos advierten de la dificultad para encontrar las situaciones al nivel de los estudiantes donde los conceptos del álgebra lineal jugarían el papel de herramienta para resolver problemas. Este hecho está unido con la naturaleza generalizadora y unificadora del Álgebra Lineal. (Parraguez, 2009, pp. 16-17)

Por ello la presente investigación pretende analizar el concepto de Espacio Vectorial desde su génesis para conocer su proceso de construcción hasta la estructura que tiene actualmente, si bien es conocido que la preocupación por dicha génesis es reciente creemos que esta investigación puede aportar de sugerencias didácticas que ayuden a la construcción del concepto de Espacio Vectorial en los alumnos al abordarlo desde una aproximación Socioepistemológica.

Es por tal preocupación que nuestra investigación ha sido motivada por los siguientes supuestos:

- Existe dificultad en los alumnos universitarios en el aprendizaje del espacio vectorial.
- El concepto de espacio vectorial nace de la necesidad de unificar métodos y teorías.

Así mismo las correspondientes preguntas de investigación:

- ¿Cuál es la génesis epistemológica del concepto espacio vectorial?

- ¿Cuáles son las prácticas sociales que dieron origen al concepto de espacio vectorial?

Para poder responder estas preguntas nos centraremos únicamente en el concepto “Espacio vectorial” que será nuestro objeto de estudio.

#### OBJETIVOS:

Objetivo general:

Se buscará en el proceso de construcción del E.V. las prácticas sociales subyacentes al concepto mediante un análisis Socioepistemológico.

Objetivos particulares:

Análisis histórico de la génesis del concepto

Identificación de las categorías de análisis para la elaboración del análisis Socioepistemológico.

#### **Marco Teórico**

La Socioepistemología como aproximación teórica

Retomamos esta teoría en la investigación debido a que recientemente ha tenido mucho peso en la comunidad científica específicamente en la de Matemática educativa en México el conocer cómo se construye socialmente el conocimiento matemático. Esta teoría surge en el cruce de caminos entre Matemáticas, Ciencias Sociales y Humanidades en un intento para explicar las relaciones entre mente, saber y cultura en el campo de las Matemáticas apoyándose de la noción de práctica social (Cantoral, 2013).

Al respecto Cantoral sostiene que las prácticas sociales son el producto de un análisis, no de una observación que se debe hacer un estudio sistémico del saber que ponga a las cuatro dimensiones (epistemológica, cognitiva, didáctica y social) de la teoría de forma articulada, en las investigaciones que su grupo de colaboradores han hecho rescatamos lo siguiente afirmación:

se encontró que en curso del tiempo la predicción fue una actividad práctica utilizada para un sinnúmero de actividades, tanto para la anticipación de cometas, como

el establecimiento de ciclos de quema, barbecha, siembra y cosecha en la producción de maíz, trigo y caña, hasta la predicción del cazador sobre los movimientos de su presa o en el establecimiento analítico de leyes naturales en física clásica (Cantoral, 2013, p. 157).

Es decir al no poder manipular el tiempo a voluntad en este caso adelantarlo para saber qué ocurrirá una estrategia funcional sería la de predecir, aquí la práctica social de predicción adquiere un carácter de normativa para las actividades señaladas es entonces que entra en juego la norma que en palabras de Cantoral debemos entenderla como un emergente social que regula al desarrollo del sistema.

Un modelo de práctica social de interés en nuestra investigación la encontramos en (Montiel, 2005) en la manera que aborda la construcción social de la función trigonométrica en base a tres entidades la práctica social, la práctica de referencia y la actividad, Montiel afirma que la práctica de referencia consiste de un conjunto de actividades reguladas por la práctica social.

Figura 1. Modelo de práctica social (Fuente: Montiel, 2005, p. 101)

En el trabajo de Montiel se identifican tres prácticas de referencia: la matematización de la astronomía, la matematización de la física y la matematización de la transferencia de calor que tienen sus respectivas prácticas sociales que las regulan: Anticipación, predicción y formalización como podemos ver en la siguiente figura.

Figura 2. Modelos de prácticas sociales en la función trigonométrica (Fuente: Montiel, 2005)

En estos modelos elaborados en la investigación de Montiel podemos decir que sus prácticas de referencia corresponden a momentos o episodios en el devenir de la construcción de la función trigonométrica. En contraste con nuestra investigación hemos encontrado en (Dorier y Sierpinska, 2001) que podemos distinguir dos fases en la construcción del concepto EV: unificación (poner juntos varios saberes para crear un todo) y generalización por lo cual consideramos

pertinente el modelo anterior ya que consideramos poder encontrar en estas dos fases las actividades matemáticas involucradas y la práctica social que las norma.

## **Metodología**

Para la realización de nuestra investigación proponemos la siguiente metodología

- Hacer un análisis documental
- Ubicar periodos de tiempo en donde se revisará el concepto
- Identificación de las prácticas sociales en dichos periodos.
- Elaborar el esquema para presentar el análisis Socioepistemológico.

Se requiere hacer un análisis, histórico, epistemológico profundo del concepto EV para identificar los elementos clave que permitieron la construcción de esta estructura, por lo que seguiremos los principales trabajos en relación a ello, Dorier, Robinet, Sierpinski etc, además de analizar los principales trabajos matemáticos en ese sentido de los principales personajes que construyeron los conceptos clave como Cramer, Euler entre otros, con ello pretendemos encontrar actividades matemáticas que nos permitan dividir en periodos la evolución del EV y encontrar las prácticas sociales que norman dichos periodos.

Para apoyarnos en este análisis Socioepistemológico haremos uso del esquema metodológico planteado por (Montiel y Buendía, 2012) ya que se reportan como exitosas las investigaciones hechas a la luz de este enfoque.

Figura 3. Esquema metodológico (Fuente: Buendía, Montiel, 2012)

El Esquema Metodológico ... pretende concordar con un conjunto de supuestos iniciales propios de la investigación socioepistemológica ... La Socioepistemología se ha propuesto como tarea fundamental estudiar la construcción de conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y a los escenarios socioculturales particulares, caracterizándolo como el fruto de las interacciones entre epistemología y factores sociales ... Nos interesa, entonces, identificar aquello que norma la actividad humana de la que emerge conocimiento matemático, a lo que en el enfoque se ha denominado como práctica social, y se caracteriza como aquello que nos hace hacer lo que hacemos (Covián, 2005). La consideración de



una epistemología de orden social da al enfoque su nombre: Socioepistemología (Cantoral & López-Flores, 2010). La Socioepistemología se ha constituido como un enfoque teórico para entender y comprender, al seno de la Matemática Educativa, fenómenos específicos relacionados con la construcción y transmisión de conocimiento matemático (Buendía y Montiel, 2011, pp. 62-63).

En las investigaciones de corte Socioepistemológico se han encontrado que el saber matemático ha sido problematizado en al menos tres dimensiones o bien principios metodológicos: su naturaleza epistemológica, su resignificación y sus procesos de transmisión.

... Estos estudios han propuesto unidades de análisis centradas en la actividad humana y en las circunstancias que le rodean. Ello les ha permitido formular que el ejercicio de prácticas antecede a la producción de conceptos y en consecuencia, la unidad de análisis propuesta permite identificar dichas prácticas. Esto es, lo que se estudia es al ser humano usando y haciendo matemáticas, y no sólo su producción matemática, para proponer epistemologías de prácticas que fundamenten el desarrollo del pensamiento matemático. (Buendía y Montiel, 2011, p. 64).

Entendemos entonces que la unidad de análisis es particular a cómo se problematizó el saber matemático es decir su dimensión y en el caso de nuestra investigación nos interesa caracterizarla ya que como se menciona en la cita anterior esta unidad permite identificar a las practicas.

Las autoras plantean que debido la diversidad de escenarios posibles y acorde a las dimensiones desde donde se hacen los estudios, se puede inferir una unidad de análisis con la intención analizar la interacción entre la actividad observable de los individuos, la intencionalidad explícita de transmitir un cierto conocimiento y el conocimiento matemático en juego relativo al escenario.

Figura 4. Una unidad de análisis (Fuente: Buendía, Montiel, 2012)

En relación con la unidad de análisis las autoras mencionan que si el estudio Socioepistemológico está situado en el aula la unidad de análisis sería la

interacción del sistema didáctico es decir el uso que hace el alumno del saber en interacción con el profesor y su papel en la transmisión del saber.

Hemos dicho que nos apoyaremos del esquema metodológico planteado por Buendía y Montiel (ver fig. 3) aunque pretendemos dado a la naturaleza de nuestra investigación trabajar en el momento que las autoras han denominado epistemología de prácticas.

Figura 5. Epistemología de prácticas (Fuente: Buendía, Montiel, 2012)

Como las autoras mencionan al describir el esquema y decir que los nodos son momentos o fases de un proceso de la investigación global que incluye un conjunto de tareas propias y las flechas representan acciones que relacionan a los diferentes momentos, y nos señalan que una tesis o proyecto de investigación pudiera estar compuesto por un nodo y/o la combinación de algunos nodos de momentos y acciones relacionantes del esquema tal como ocurre en la figura 5, en el que tomamos la parte que se ha nombrado como el momento de Epistemología de prácticas las autoras comentan al respecto de este momento:

Como resultado de un análisis Socioepistemológico, algunas investigaciones concluyen proponiendo una epistemología de prácticas para formular una explicación acerca de la Problemática educativa en cuestión o para dar una visión alternativa con relación al fenómeno didáctico que se estudia; pero además, se conforma como una primera base para la intervención didáctica. Por ejemplo, en las investigaciones de Montiel (2005, 2011) se propuso una primera epistemología de prácticas que distingue escenarios y circunstancias para la construcción de las herramientas trigonométricas. (Buendía y Montiel, 2012, p. 72)

El análisis Socioepistemológico o revisión Socioepistemológica también es caracterizada por las autoras con el siguiente diagrama:

Figura 6. Análisis Socioepistemológico (Fuente: Buendía, Montiel, 2012)

En nuestra investigación el análisis Socioepistemológico debido al tipo de investigación consideramos que recae en la dimensión de Naturaleza epistemológica del saber pues esta clase de investigaciones tienen un corte más

histórico-epistemológico que en palabras de las autoras no quiere decir la solo relatoría de hechos históricos sino la búsqueda de las circunstancias socioculturales que rodean la generación de conocimiento matemático.

## **Conclusiones**

En la investigación aunque no se ha encontrado la o las prácticas sociales de manera evidente por lo cual no se han etiquetado aún, se están trabajando en caracterizar las diversas actividades matemáticas para encontrar aquellas que tácitamente envuelvan al proceso de construcción del E.V.

Trabajaremos en primera instancia en dos momentos de la construcción del E.V. que antes se han mencionado como Unificación y Generalización dichos periodos a priori pudieran ser la base de las prácticas sociales para ello falta más análisis, principalmente diremos que estamos buscando normar en los conceptos de combinación lineal, dependencia-independencia, rango-dimensión, transformación lineal así como en el proceso de axiomatización y teorización.

## **Bibliografía**

- Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento, 1ª Edición. Barcelona: Gedisa.
- Dorier, J. L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, 22(3), 227-261
- Dorier, J. L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear Algebra and its Applications* (275), 1 (4), 141-160
- Montiel, G. (2005). Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada «CINVESTAV». México, D.F.
- Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum.

Parraguez , M. (2009) Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada «CINVESTAV». México, D.F.