

## Una Aproximación Socioepistemológica Para Las Sucesiones Numéricas En El Periodo Antiguo

Nancy Janeth Calvillo Guevara, Cecilia Rita Crespo Crespo  
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada – IPN,  
Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”

### **Resumen**

En este escrito se presenta el análisis del primer momento de uso de las sucesiones numéricas, esto es, durante el periodo antiguo (prehistoria, babilonios, egipcios y griegos). Como sustento teórico se retoma el enfoque socioepistemológico, pues debido a su naturaleza sistémica, permitirá caracterizar una construcción social de la convergencia de sucesiones numéricas. Para el desarrollo de la investigación se utiliza el esquema metodológico presentado por Buendía y Montiel (2011). Hasta el momento se ha encontrado que algunas de las principales actividades en las que se usó lo sucesivo o lo convergente son: medir el tiempo, repartir alimentos, aproximar el valor de números irracionales (raíces,  $\pi$ ), elaborar sistemas de numeración y “calcular la suma de series” con la particularidad de que éstas eran finitas o incluían procesos finitos.

**Palabras clave:** Convergencia de sucesiones numéricas, socioepistemología.

### **Introducción**

Este proyecto de investigación nace a partir de haber experimentado una enseñanza tradicional como estudiante de la Licenciatura en Matemáticas. Puede decirse que el esquema de enseñanza seguía un patrón lineal en el que se pedía a los alumnos que aprendieran la teoría sin que anteriormente se realizara un tratamiento intuitivo que permitiera dar sentido a las definiciones, teoremas y demostraciones rigurosas. Este tipo de enseñanza privilegió la construcción lógico – deductiva de los conceptos involucrados, pero dejó de lado la construcción social que tuvieron las entidades matemáticas.

En el área del análisis matemático, en el discurso matemático escolar actual destaca el límite como una de las ideas fundamentales no sólo para comprender el cálculo sino también para desarrollar pensamiento al perseguir el rigor matemático (Roh, 2008).

Más precisamente se ha identificado que la convergencia de sucesiones numéricas, la cual involucra en su definición la noción de límite, es un tema enseñado en escuelas de nivel básico, medio superior y superior con un énfasis en el aspecto formal; por lo cual se considera que puede ser objeto de investigación, para analizar los aspectos que permitan en efecto lograr el aprendizaje en el cálculo e incluso principios del análisis matemático.

Por lo que en lo que sigue se hará una breve presentación de los principales problemas relacionados con la convergencia de sucesiones numéricas.

En cuanto a los problemas relacionados con la enseñanza – aprendizaje de la convergencia de sucesiones numéricas se ha reportado de manera principal dos dificultades asociadas con la comprensión de la convergencia de sucesiones numéricas: la noción de infinito que tiene involucrada y los aspectos metacognitivos de la definición.

Por ejemplo, en el estudio de Sierpinska (1987) se reporta que cuatro nociones parecen ser la principal fuente de obstáculos epistemológicos relacionados con límites: conocimiento científico, infinito, función y número real. En esta misma dirección, concerniente a los problemas asociados al aprendizaje de la convergencia de sucesiones numéricas, Przenioslo (2005) presenta un conjunto de ideas erróneas acerca del límite de una sucesión que a través de la investigación han sido determinadas:

- Los términos de una sucesión convergente se aproximan al límite, algunas veces lo alcanzan.
- Los términos se aproximan al límite, pero no deben alcanzarlo.

- Los términos deben ya sea crecer o decrecer.
- Es suficiente que infinitamente muchos términos se aproximen al límite.
- Una frontera de la sucesión es su límite.
- El límite de una sucesión es su último término.
- Una sucesión convergente debe seguir algún modelo.
- Las confusiones entre lo infinitamente inalcanzable del número de términos y la posibilidad alcanzable del valor finito del límite.

Como podemos notar, la mayoría de los puntos identificados en el trabajo de Przenioslo (2005) están relacionados con el infinito, por ejemplo en el segundo de ellos un estudiante podría tener una concepción de infinito potencial, en la cual la sucesión que sí tenga límite estará siempre moviéndose hacia al límite, pero nunca lo alcanzará.

Por otro lado, en el trabajo de (Mamona-Downs y Downs, 2000) se añaden otro tipo de problemas con los que se encuentran los estudiantes al momento de estudiar los límites:

- El estilo minimalista de la expresión, que ofrece amplitud cognitiva, pero al mismo tiempo, requiere una reflexión madura sobre la estructura.
- El contenido de la definición, que en su diseño tiene aspectos metacognitivos (énfasis en lo lógico, brevedad, facilidad de aplicación, etc.) así como cognitivos.

Lo anterior muestra que además de las dificultades asociadas al infinito manifestadas por algunos estudiantes al momento de trabajar con la convergencia de sucesiones numéricas, también podrían aparecer aquellas dificultades

asociadas a la noción de límite; por ejemplo, el significado coloquial asociado a la palabra límite, que dista en buena medida de la noción matemática del concepto, ya que este último sufrió transposiciones que lo llevaron a tener una definición precisa, que permitiera una mejor comunicación, sobre todo en las instituciones donde se usó dicha noción, por ejemplo, la de los matemáticos.

Entonces, además de los aspectos relacionados con el infinito, se requiere una comprensión fuerte que permita asociar la economía (brevedad) de la definición con su aspecto lógico y sus formas de aplicación. Este hecho fue identificado por Przenioslo (2005) al investigar con estudiantes de secundaria y universidad las *imágenes del concepto*<sup>1</sup> de límite de una función (incluyendo a las sucesiones como un tipo de funciones), al especificar que existen problemas con la definición del concepto de convergencia de sucesiones numéricas, puesto que para la mayoría de los participantes en su estudio, la definición del concepto no fue el elemento más significativo de la imagen, ya que no se consideró útil al resolver problemas.

Aunado a lo anterior, los estudiantes tienen que lidiar con la notación que se usa en su definición. Es así que el problema que nos atañe; el del aprendizaje de la convergencia de sucesiones numéricas, se ve agravado cuando se presenta la definición rigurosa de convergencia de una sucesión, llamada la definición  $\varepsilon - N$  (Roh, 2008):

*Una sucesión  $\{a_n\}$  es convergente a un número real  $A$  si para algún número positivo  $\varepsilon$ , existe un número natural  $N$  tal que  $|a_n - A| < \varepsilon$  para todo  $n \geq N$ .*

(Apostol, 1974, p. 70)

Entonces, notamos que en los trabajos de investigación (Robert, 1982; Calvillo, 2007) la sugerencia es abordar la convergencia a través de ejemplos bien elegidos; es decir, aquellos que promoverán la reflexión acerca de la convergencia  $\left(\frac{1}{n}, (-1)^n, \left(\frac{-1}{n}\right)^n, \text{entre otros}\right)$ , y un entorno de aprendizaje que promueva su

apropiación. Sin embargo, en Alcock y Simpson (2005) se observó un rango de éxito y falla entre estudiantes que visualizan y aquellos que no visualizan, de ahí que sugieren que desde un punto de vista pedagógico no hay “presentación perfecta” que sea accesible a todos los estudiantes y a cada uno lo lleve al éxito.

Entonces, es importante detectar otros elementos que pudieran ayudar en este sentido, pues como se afirma en (Camacho, 2006) es necesaria la búsqueda en la historia de las prácticas sociales, a fin de reconocer en ellas bases de significados, cuya estructura lleve a establecer la "construcción de conocimiento matemático", con lo cual nos será posible construir diseños instruccionales. De esta manera es que a continuación se presenta el planteamiento del problema.

### **Problema de investigación:**

La convergencia de sucesiones numéricas es un tema enseñado en escuelas de nivel básico, medio superior y superior, en este último, con énfasis en el aspecto formal, en el que se han dejado de lado aquellos aspectos que ayudarían a dar sentido al estudio de este tema. Así, existe la necesidad de identificar elementos que puedan ayudar para reconocer bases de significados cuya estructura lleve a establecer la construcción social de la convergencia de sucesiones numéricas.

A partir de lo anterior se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál podría ser una epistemología de prácticas inmersa en la construcción de la convergencia de sucesiones numéricas?

### **Objetivo general:**

Caracterizar la construcción social de la convergencia de sucesiones numéricas.

### **Objetivos específicos:**

- Identificar los escenarios en los que se puede encontrar evidencias de la construcción social de la convergencia de sucesiones numéricas.

- Describir las actividades en las que se usó la convergencia de sucesiones numéricas (lo sucesivo, lo convergente).
- Describir las prácticas de referencia que producían el uso y el estudio de la convergencia de sucesiones numéricas (lo sucesivo, lo convergente).

Cabe señalar que en este escrito nos enfocaremos en el primer objetivo específico.

### **Marco teórico**

La revisión de literatura muestra que los resultados de las investigaciones relativas a la convergencia de sucesiones numéricas están centradas en explicar cómo aprenden los estudiantes, pero no toman en cuenta otros aspectos, como los efectos de una enseñanza tradicional o la naturaleza epistémica de la convergencia. De esta manera notamos la importancia de incluir para nuestro trabajo un marco teórico de naturaleza sistémica como lo es la Socioepistemología.

Algunas investigaciones en Matemática Educativa reconocen problemáticas asociadas con la enseñanza aprendizaje de la matemática, en las cuales el estudio del conocimiento está basado solamente en conceptos, propios del sistema escolar, pero olvidan la construcción que se lleva a cabo en estos conceptos, solamente proporcionando un contexto adecuado y atractivo para su aprendizaje. Al respecto, la socioepistemología plantea una visión alternativa, “ya que permite replantear la epistemología de la construcción del conocimiento, para permitir explicar la construcción social del conocimiento matemático a la luz de las prácticas sociales y las fuentes de institucionalización vía su enseñanza” (Cantoral y Farfán, 2004, p. 139).

El enfoque socioepistemológico (SE) permite analizar un fenómeno educativo desde una perspectiva sistémica, que incorpora cuatro componentes

fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza, con el fin de encontrar las prácticas inmersas en la construcción de la teoría, en nuestro caso, la convergencia de sucesiones numéricas. Esto es posible ya que esta aproximación se plantea como tarea fundamental el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares, caracterizando al conocimiento como el fruto entre epistemología y factores sociales (Cantoral, 2002).

Así el estudio de la evolución de la convergencia de sucesiones numéricas, nos permitirá encontrar algunas circunstancias, algunos escenarios, ciertos medios, que posibilitaron la emergencia de este concepto y con base en ello plantearemos su construcción social (Montiel, 2005).

En la socioepistemología, el análisis del conocimiento es de corte epistemológico, por lo que, en algunos estudios se realiza una búsqueda en la historia de las prácticas sociales, a fin de reconocer en ellas bases de significados o resignificaciones cuya estructura lleve a establecer "construcción de conocimiento matemático". Lo anterior nos da la pauta para plantear la idea central de este proyecto: identificar alguna de las epistemologías de prácticas que propiciaron "su producción" y "su uso" y que permitieron "su formalización" así como la "didactificación y la enseñanza" de la convergencia de sucesiones numéricas.

Puesto que el objetivo que se ha planteado la socioepistemología es: "estudiar la construcción de conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y a los escenarios socioculturales particulares, caracterizándolo como el fruto de las interacciones entre epistemología y factores sociales" (Cantoral, 2002), considerando la diversidad de escenarios posibles y acorde a las dimensiones desde donde se hacen los estudios, Buendía y Montiel (2011) proponen una unidad de análisis que plantea analizar la interacción entre la actividad observable de los individuos (el *uso* que se le da al saber), la intencionalidad explícita de transmitir un cierto conocimiento y el conocimiento matemático en juego relativo al escenario.

En la unidad de análisis que proponemos para nuestro trabajo el conocimiento matemático puede referirse a la convergencia de sucesiones numéricas, a lo sucesivo o a lo convergente, y nuestra tarea consistirá en identificar el uso<sup>2</sup> que se le daba a la convergencia de sucesiones numéricas, a lo sucesivo o a lo convergente en algunos escenarios socioculturales.

Posterior a la delimitación de ciertos escenarios socioculturales en los que se analizará en qué actividades y cómo se usaba la convergencia de sucesiones numéricas, se requerirá organizar la información encontrada orientada por dos preguntas: ¿en qué actividades se usó dicho conocimiento? y ¿cómo se dio la transmisión de ese saber? Para ello, Montiel (2005) propone un modelo basado en actividades, prácticas de referencia y prácticas sociales, puesto que abordar cierto concepto matemático implica tratar algo más amplio que solamente la definición, se trata de una problemática contextualizada.

Para Montiel (2005): Las actividades se refieren a aquellas observables tanto en los individuos como en los grupos humanos. Las prácticas de referencia son caracterizadas como un conjunto articulado de actividades, también como aquellas que permiten la articulación de la actividad con la práctica social. La práctica social es aquella que regula (norma) las prácticas de referencia y sus actividades relacionadas.

Por lo tanto, el estudio socioepistemológico que se realice llevará a plantear la construcción social que tuvo la convergencia de sucesiones numéricas, en particular en dicha construcción se pretenden identificar algunas prácticas sociales asociadas con el trabajo de lo sucesivo, de lo convergente, de la convergencia de sucesiones numéricas, las posibles prácticas de referencia que le dieron uso y sentido en su escenario sociocultural y aquellas actividades en las que se pueda identificar el uso que en cada escenario se le dio a la convergencia.

### **Elementos metodológicos**



Para el desarrollo de nuestra investigación optamos por seguir el esquema metodológico para la investigación socioepistemológica que es presentado en Buendía y Montiel (2011) y que a continuación detallamos.

En el esquema presentado en la Figura 1 se parte de la identificación de “una problemática de estudio o un fenómeno didáctico particular donde se reconoce la necesidad por explicar un hecho escolar desde una perspectiva científica” (Montiel, 2005). Así, en un primer momento hemos reconocido la problemática alrededor del estudio de la convergencia de sucesiones numéricas, tema que se enseña en las licenciaturas en matemáticas. Enseguida planteamos la pregunta de investigación como *una* forma de acercarnos a la problemática, con el propósito de conocer, comprender y explicar procesos de construcción y transmisión de conocimientos matemáticos.

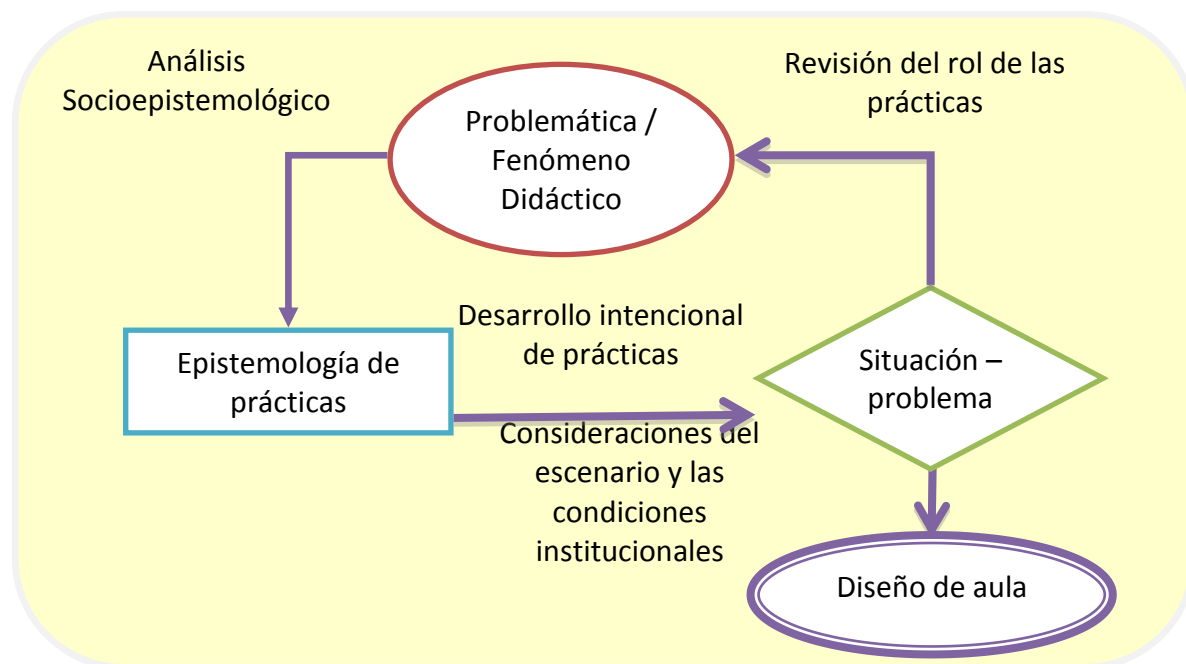


Figura 1. Esquema metodológico para la investigación socioepistemológica

Después de haber identificado cierta problemática, procederemos a realizar un estudio socioepistemológico. Con base en el trabajo de Rosas (2007) se han definido algunos de los escenarios socioculturales en los que hemos de distinguir

los momentos de uso de lo convergente, de lo sucesivo y de la convergencia de sucesiones numéricas:

El de sus inicios prácticos (Periodo antiguo): La prehistoria, las culturas babilónicas, egipcias y griegos. Y el de sus fundamentos teóricos: nacimiento del cálculo, desarrollo, de la sistematización y de la fundamentación.

Además, nuestra intención es explicar esta relación entre el hombre haciendo matemáticas y el saber construido a través del modelo de prácticas propuesto por Montiel (2005): *Práctica Social – Práctica de Referencia – Actividad*, pues hacer la investigación desde este acercamiento permitirá comprender a la convergencia de sucesiones numéricas como una construcción sociocultural: reconociendo la naturaleza y construcción social de la convergencia de sucesiones numéricas se estará priorizando la actividad humana.

### **Resultados. Primeros usos de la convergencia de sucesiones numéricas**

Los inicios de la convergencia de sucesiones numéricas pueden encontrarse en actividades desarrolladas en diferentes culturas y que podrían no ser consideradas como matemáticas, en el sentido estricto de la palabra.

#### **La prehistoria**

Las actividades que dan inicio a los estudios de la convergencia son aquellas relacionadas en esencia con la resolución de las necesidades de la vida social y económica. En particular, encontramos que en la prehistoria el uso de “**lo sucesivo**” nace en la actividad de “contar”. Otra de las actividades que marcó el uso de “las sucesiones” fue “el agrupamiento de signos” (rayas verticales, guijarros, dedos de la mano, etc.), pues al no haber un sistema numérico, el hombre creó sus maneras de contar, así como signos que representaran los números. Además, la actividad de “medir el tiempo” se constituye una actividad donde se comenzó a identificar “lo sucesivo”, sobre todo al realizar actividades agrícolas, pues debían llevar la cuenta de los días y de las noches, así como de las estaciones del año.

## **Civilización Babilonia**

Las actividades en las que usaron “las sucesiones” los babilonios estuvieron relacionadas con:

- “calcular la suma de series” con la particularidad de que éstas eran finitas y con
- “aproximar el valor de números irracionales”, de raíces, a través de aproximaciones sucesivas y “aproximar el valor de  $\pi$ ”.

## **Civilización Egipcia**

Con los egipcios el uso de lo sucesivo parece estar restringido solamente a la resolución de problemas aritméticos, ligados estrechamente con la actividad cotidiana de *repartir* alimentos. Además, el trabajo realizado por esta cultura nos permite identificar que las actividades en las que se usó “lo sucesivo” están relacionadas con

- Contar, agrupar y destinar símbolos específicos, dependiendo del sistema de numeración elegido (de base 10, no posicional)
- Aproximar el valor de  $\pi$ , a partir de la comparación con el área de un cuadrado

## **Los griegos**

En esta civilización se construyeron varias sucesiones muy particulares, algunas finitas y otras infinitas para tratar de aproximar el valor de un número, y aunque en estos ejemplos el objetivo era descubrir a qué se aproximaba, la convergencia aún no era el centro de estudio. Así, las actividades en las que se usó lo sucesivo fueron:

- Al encontrar la suma de ciertas sucesiones (números figurados), pensando siempre en procesos finitos.

- Aproximación del valor de  $\pi$  a través del método exhaustivo.
- Creación de paradojas que incluían procesos infinitos.
- Cálculo de límites con relación a una progresión geométrica (en problemas como la "la cuadratura de la parábola" de Arquímedes y "Cálculo del área de una espiral").

## **Conclusiones**

En este escrito se ha presentado un avance acerca de las actividades en las que se dieron los primeros usos de lo sucesivo y de lo convergente en el periodo antiguo, éstas están relacionadas de manera principal con medir el tiempo y repartir alimentos, pero además de eso, el hombre comenzó a hacer matemáticas desligándolas de actividades relacionadas con el quehacer cotidiano del hombre: al buscar la suma de ciertas sucesiones o al aproximar el valor de ciertos números irracionales, pero con la particularidad de que el tratamiento es con procesos finitos.

Sin embargo, se ha de reconocer que aún quedan aspectos por definir, por ejemplo, la organización de las actividades en prácticas de referencia y las prácticas sociales que norman las prácticas de referencia y sus actividades relacionadas.

## **Referencias**

Alcock, L. y Simpson, A. (2005). Convergence of sequences and series 2: interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*. 58, 77-100.

Apóstol, T. (1974). *Calculus segunda edición. Vol 1*. USA: John Wiley & Sons.

Buendía, G. y Montiel, G. (2011). Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica. En Sosa, L., Rodríguez, R. y Aparicio E. (Ed),

- Memorias de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 443 – 454). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.
- Cabañas, G. (2011). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.
- Calvillo, N. (2007). *Convergencia de sucesiones numéricas: una visión alternativa*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.
- Camacho, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. *Educación Matemática*. 18 (1), 133 – 160. (Visitada el día 24 de noviembre de 2011 en: <http://redalyc.uaem.mx/pdf/405/40518106.pdf>).
- Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 15 (1), 35-42. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. y Farfán, R.M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24 (2.3), 137-168.
- Downs, M. & Mamona-Downs, J. (2000). On graphic representation of differentiation of real functions, *THEMES in Education* 1(2), 173-198.
- Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.
- Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 3 (3), 305 – 341.

Roh, K.H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*. 69, 217 – 233.

Rosas, A.M. (2007). *Transposición didáctica de las series numéricas infinitas. Una caracterización del discurso escolar actual en el nivel superior*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*. 18, 371 – 397.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics*. 60, 71 – 93.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*. 55, 103 – 132.

<sup>1</sup>Siguiendo a Tall y Vinner, Przenioslo (2004, p. 104) entiende el concepto de “‘imagen del concepto’ como la estructura cognitiva que contiene todo tipo de asociaciones y conceptos relacionados con el concepto (también relacionado con sus propiedades y teoremas), incluyendo las intuiciones, los elementos de entendimiento formal, los patrones establecidos, los procedimientos aplicados en diferentes situaciones y estrategias operativas”

<sup>2</sup>Según Cabañas (2011) los usos son las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico