

La Heurística De Los Modelos Emergentes En Álgebra Lineal: Un Estudio Exploratorio Con Estudiantes De Primer Año De Ingeniería

A. Cárcamo, J. Gómez, J. M. Fortuny

Universidad Austral de Chile, Universidad Politécnica de Cataluña, Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

Este estudio exploratorio informa sobre un primer ciclo de experimentación que utiliza un diseño instruccional innovador basado en la heurística de los modelos emergentes. El objetivo de este estudio es determinar qué aporta este tipo de diseño a la construcción de conceptos de álgebra lineal, específicamente para conjunto generador y espacio generado. La metodología que se usa es la investigación de diseño y los participantes son estudiantes que cursan primer año de ingeniería. Los resultados sugieren que este tipo de diseño abre posibilidades a los estudiantes de construir los conceptos de conjunto generador y espacio generado, por lo tanto, podría ser adecuado para ser utilizado en el aprendizaje de otros conceptos claves de álgebra lineal.

Palabras clave: modelos emergentes, conjunto generador, espacio generado, álgebra lineal, investigación de diseño.

Planteamiento del problema

Álgebra lineal se encuentra entre las primeras asignaturas que tiene un estudiante vinculado al área de Matemática y es considerada fundamental porque cumple un rol esencial para el desarrollo posterior de otras asignaturas debido a su naturaleza unificadora y generalizadora (Dorier, 2002), pero además, porque es una herramienta poderosa para resolver problemas de distintas áreas (Carlson, Johnson, Lay y Porter, 1993). Sin embargo, a pesar de su relevancia, la enseñanza del Álgebra lineal a nivel universitario es casi universalmente considerada como una experiencia frustrante tanto para profesores como estudiantes (Hillel, 2000).

Con la finalidad de buscar alternativas para la enseñanza y el aprendizaje de álgebra lineal, se han diseñado y realizado experiencias en este curso realizando variaciones a las clases magistrales, ya sea: incorporando el uso de tecnología (Day y Kalman, 1999), la modelización matemática (Possani, Trigueros, Preciado y Lozano, 2010) o diseñando tareas basadas en la heurística de los modelos emergentes (Wawro, Rasmussen, Zandieh y Larson, 2013).

Por otra parte, Rasmussen et al. (2010) señalan que los estudios recientes sobre la enseñanza y el aprendizaje de álgebra lineal profundizan en las formas productivas y creativas que los estudiantes son capaces de desarrollar al interactuar con las ideas de álgebra lineal, caracterizando la progresión del estudiante desde sus actuales formas de razonamiento a maneras más formales. Estas investigaciones presentan como base teórica la heurística de los modelos emergentes de la educación matemática realista o complementan dos teorías (APOE y perspectiva de modelos y modelado) como se observa en el estudio de Possani et al. (2010).

A partir de lo expuesto, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué aporta un diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes a la construcción de conjunto generador y espacio generado? Para responder a esta pregunta se plantea como objetivo diseñar, implementar y evaluar un diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes para la construcción de conjunto generador y espacio generado.

Marco teórico

El marco teórico de este estudio se centra en la heurística de los modelos emergentes que sustenta el diseño instruccional utilizado en este experimento de enseñanza.

La heurística para el diseño instruccional de los modelos emergentes es una alternativa a los métodos de enseñanza que se centran en la enseñanza de las representaciones ya hechas y tiene como objetivo el diseño de actividades de

instrucción que apoyen a los estudiantes al desarrollo de herramientas matemáticas que pueden necesitar en algún momento (Gravemeijer, 2002).

Para el progreso desde la actividad matemática informal a un razonamiento matemático formal Gravemeijer (1999) establece cuatro niveles de actividad: situacional (el conocimiento del problema y las estrategias son utilizados en el contexto de la situación misma), referencial (implica modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que se refieren al problema de la actividad situacional), general (se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero con un foco matemático sobre las estrategias sin hacer referencia al problema) y formal (se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales). De acuerdo a Gravemeijer (2007) los estudiantes comienzan modelando su propia actividad matemática informal y en el transcurso, el carácter del modelo va cambiando gradualmente para el estudiante, convirtiéndose en un modelo más formal de su razonamiento matemático, pero enraizado en el conocimiento experiencial del estudiante.

El nivel de actividad situacional supone un contexto experiencialmente real para los estudiantes, aunque no necesariamente de la vida cotidiana (Gravemeijer, 1999). En este estudio se considera un contexto de la vida cotidiana y la modelización matemática como una herramienta de ayuda al estudio de las matemáticas porque es una metodología eficaz en álgebra lineal y una correa de transmisión que proporciona la adquisición de conocimientos a la vez que establece la hermandad entre matemática y realidad (Gómez y Fortuny, 2002).

Metodología

Diseño

Este estudio empírico tiene como objetivo diseñar, implementar y evaluar un diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes para la construcción de conjunto generador y espacio generado. Para ello, se efectuó una investigación de diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008). En la primera fase se elaboró

una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995) y un diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes de Gravemeijer (1999). En la Tabla 1 se presenta una síntesis de cómo se manifiestan estos en las tareas del diseño instruccional. Luego, se realizó un primer ciclo de experimentación en una universidad española con estudiantes que cursaban el primer año de ingeniería.

Experimento de enseñanza y recolección de datos

La experimentación se realizó con 30 estudiantes de primer año de ingeniería en el periodo 2013-2014. Esta primera ronda del experimento se desarrolló en 5 horas distribuidas en 3 sesiones de clases, en las que se trabajó en pequeños grupos (3 a 5 estudiantes).

Los datos que se recogieron en este experimento incluyeron: protocolos escritos de las actividades de aprendizaje desarrolladas por los estudiantes en grupo, vídeo y grabaciones en audio y entrevista individuales al finalizar la experimentación.

Análisis

El análisis de datos se inició con la organización, anotación y descripción de los datos. Inicialmente, las tareas desarrolladas por los estudiantes y las grabaciones fueron analizadas por el equipo de investigación desde la perspectiva de la pregunta de investigación. Posteriormente, los datos recopilados se analizaron identificando ejemplos en que se manifestaba algún cambio del razonamiento informal a uno más formal con respecto a los conceptos estudiados. A partir de este análisis, se creó una historia que reconstruye el proceso de aprendizaje que siguieron los estudiantes.

Tabla 1. Descripción de las tareas del diseño instruccional y su relación con los niveles de actividad de Gravemeijer

Descripción de tarea	Qué niveles de actividad se manifiestan en la tarea
<p><i>Tarea 1: Generando contraseñas con vectores.</i> Se les entrega información de la importancia de las contraseñas seguras, las características que deben tener y ejemplos de cómo crear contraseñas con Excel. A partir de esto, inventan un generador de contraseñas seguras utilizando vectores.</p>	<p>Nivel situacional. Los estudiantes utilizan sus estrategias en conjunto con sus conocimientos de matemática y de contraseñas para elaborar un generador de contraseñas seguras.</p>
<p><i>Tarea 2: Relacionando el generador de contraseñas con conjunto generador y espacio generado.</i> De acuerdo con la solución de su generador de contraseñas se les pide dos conjuntos: uno que posea todas las contraseñas numéricas de su generador de contraseñas y otro que tenga vectores numéricos que al hacer la combinación lineal de ellos se obtenga el vector genérico que genera sus contraseñas numéricas. Luego que el profesor introduce los conceptos, realizan una analogía entre estos y su generador de contraseñas.</p>	<p>Nivel referencial. Los estudiantes haciendo referencia a la solución propuesta de su generador de contraseñas presentan dos conjuntos con determinadas características y luego, que el profesor define formalmente los conceptos, enlazan esta nueva realidad matemática con el problema real, al hacer una analogía entre ellos.</p>
<p><i>Tarea 3: Aplicando lo aprendido.</i> Utilizan los conceptos de conjunto generador y espacio generado para explorar y profundizar en relación a ellos usando la notación convencional matemática.</p>	<p>Nivel general y formal. Los estudiantes utilizan lo trabajado en la tarea anterior para explorar sobre conjunto generador y espacio generado usando sus conocimientos y notaciones matemáticas.</p>

Resultados

Los resultados del estudio se presentan a través de la historia del proceso de aprendizaje que siguieron los estudiantes (*storyline of students' learning process* planteado por Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon y Reed, 2013) en relación al diseño instruccional.

Tarea 1: Generando contraseñas seguras

Esta tarea tuvo como objetivo que los estudiantes activaran sus concepciones previas de vectores. El contexto elegido para la tarea 1 fue la generación de

contraseñas. La información que se les entregó consistió en una noticia sobre redes sociales *hackeadas* y de cómo generar claves usando *Excel*. Con estos antecedentes, se les propuso crear un generador de contraseñas que utilizara vectores. Los grupos plantearon distintas soluciones, aunque similares a la que se ve en la Figura 1, ya que propusieron un modelo matemático de un vector genérico con un determinado número de componentes para generar contraseñas y para mostrar su efectividad, dieron un número específico a su(s) variable(s) e inmediatamente, aplicaron su proceso de codificación para interpretar lo realizado matemáticamente al contexto del problema, obteniendo una contraseña creada a partir de su generador de contraseñas.

Modelo matemático: $(x, 2x, x + 2x)$.
Utiliza código propio, cubra todos los números

Codificación propia para generar las contraseñas codificadas:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Q	W	E	R	T	Y	U	I	O	P
A	S	M	N	V	F	L	C	X	Z
C	V	B	H	G	K	J	D	N	M
3	P	6	0	8	1	0	2	0	3

Invertimos la contraseña y la codificamos. si algun no se repite, saltamos al siguiente simbolo.

Ejemplo:

x aleatoria = 011
 $2x = 022$
 $x+2x = 011+022 = 033$ \rightarrow 011022033

Invertimos el n° = 330220110 y lo invertimos
 @T(*_#) - %

Figura 1. Solución propuesta por un grupo al problema de crear un generador de contraseñas

Tarea 2: Relacionando el generador de contraseñas con conjunto generador y espacio generado

La tarea 2 incluyó dos apartados. En el primer apartado, los grupos de estudiantes anotaron dos conjuntos: uno G que contenía todas las contraseñas numéricas de su generador de contraseñas y otro A que tenía vectores numéricos que al hacer la combinación lineal de ellos se obtenía el vector genérico que creaba sus contraseñas numéricas. Luego de escribir los conjuntos A y G se les preguntó cuál

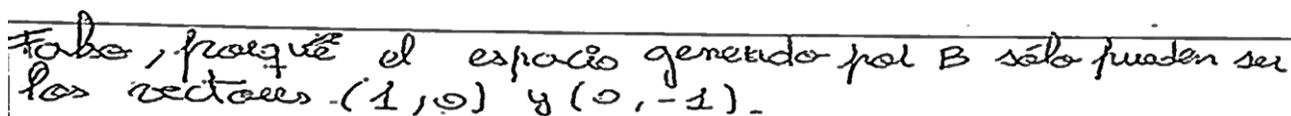
era la relación entre estos. La respuesta que predominó fue que “*A genera a través de la combinación lineal de sus vectores a los elementos de G* ”, es decir, los estudiantes lograron establecer una conexión entre los conjuntos, aunque algunos de ellos presentaron dificultades con la notación matemática.

Después de que el profesor definió formalmente conjunto generador y espacio generado, los grupos de estudiantes realizan el siguiente apartado que consistió en hacer una analogía entre estos conceptos y su generador de contraseñas. En general, hacen la analogía de acuerdo con su generador de contraseñas, sin embargo, se observa que algunos grupos le designan otro nombre al conjunto generador indicándolo como: vector(es) generador(es) o conjunto de vectores.

Tarea 3: Aplicando lo aprendido

En esta tarea utilizaron conjunto generador y espacio generado para explorar y profundizar acerca de ellos en problemas con notación convencional matemática. Las respuestas a esta tarea dio evidencias que gran parte de los grupos identificó como diferencia entre los conceptos que los vectores del conjunto generador crean al espacio generado y además, identificaron en notación matemática que uno de ellos tiene una cantidad finita de vectores mientras que el otro no. Además, lograron verificar si un vector pertenece a un cierto espacio generado haciendo combinación lineal de los vectores del conjunto generador de éste. Sin embargo, sólo algunos grupos lograron representar gráfica y analíticamente el espacio generado por un determinado conjunto generador.

Las dificultades que se observaron se relacionaron con: la falta de rigurosidad en el uso del lenguaje matemático, el uso de los términos en notación matemática de forma intercambiada y las diferentes formas de representar los conceptos en estudio. Un ejemplo de ésta última, se observa en la Figura 2 cuando se le pregunta si el vector $(2,-3)$ pertenece al espacio generado por $B=\{(1,0),(0,-1)\}$, pues para ellos pareciera que es equivalente a indicar “*conjunto $B=\{(1,0),(0,-1)\}$* ”.



Falso, porque el espacio generado por B sólo pueden ser los vectores $(1,0)$ y $(0,-1)$.

Figura 2. Ejemplo de respuesta para una pregunta de la tarea 3

Los resultados de la aplicación del diseño instruccional mostraron que los estudiantes resolvieron el problema de crear un generador de contraseñas (activando sus conocimientos previos de vectores) y a partir de éste, trabajaron en la siguiente tarea, describiendo conjuntos que contenían una cantidad finita e infinita de vectores relacionados con el contexto inicial, los cuales vincularon con conjunto generador y espacio generado. Esto último les permitió visualizar los conceptos tanto en un contexto real como matemático. Por consiguiente, identificaron algunas características de conjunto generador y espacio generado como la relación de inclusión entre ellos, a pesar de que algunos grupos evidenciaron dificultades con las diferentes formas de representarlos, especialmente geoméricamente.

Lo expuesto da indicios que la mayoría de los grupos de estudiantes realiza una transición del modelo de actividad situacional hacia el modelo para el razonamiento más formal de los conceptos de conjunto generador y espacio generado.

Conclusiones

El principal aporte de este estudio exploratorio es entregar una propuesta de innovación sobre el uso de la heurística de los modelos emergentes para la construcción de conjunto generador y espacio generado. La originalidad de este diseño está dado por las escasas investigaciones en la literatura actual en relación a estos conceptos de álgebra lineal.

A partir del análisis de datos, se dio respuesta a la pregunta de este estudio, pues se observó que las siguientes características del diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes aportaron a la comprensión de los conceptos de conjunto generador y espacio generado:

- Los estudiantes a través de la creación de un generador de contraseñas activaron sus concepciones previas de vectores lo que les ayudó a conectar éstas con la siguiente tarea que procuraba una primera aproximación de conjunto generador y espacio generado.
- La tabla de analogía entre el contexto de generar contraseñas numéricas y los conceptos en estudio ayudó a los estudiantes a visualizar estos tanto en un contexto real como matemático, al mismo tiempo que les ofreció la posibilidad de diferenciarlos al utilizarlos en una situación real.
- La tarea 3 fortaleció las nociones de ambos conceptos al tener que profundizar sobre ellos en problemas de contexto matemático, evidenciándose en los resultados que gran parte, logra identificar la relación de inclusión que existe entre estos y también que reconocen las condiciones que debe cumplir un vector para pertenecer a un espacio generado.

Los resultados de este estudio dan indicios que este tipo de diseño instruccional basado en la heurística de los modelos emergentes favorece la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado, lo que se evidencia en que los estudiantes lograron progresar desde la tarea del *nivel situacional* que solo demandaba utilizar sus concepciones previas hacia una tarea del *nivel formal* que exigía aplicaciones de los conceptos matemáticos involucrados.

Para el siguiente ciclo de aplicación de este diseño instruccional se sugieren las siguientes modificaciones: incorporar evaluación formativa en el desarrollo del diseño instruccional con el propósito de ayudar a los estudiantes en las dificultades que puedan surgirles y replantear la tarea 3 con la finalidad de que existan preguntas tanto de propiedades como de aplicaciones de conjunto generador y espacio generado.

Referencias

Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., y Porter, A. D. (1993). The linear algebra curriculum Study group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, 24(1), 41-46.

Cobb, P., y Gravemeijer, K. P. E. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En Anthony E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). New York, NY: Routledge.

Day, J. y Kalman, D. (1999). Teaching Linear Algebra: What are the Questions? *Department of Mathematics at American University in Washington D.C.*, 1-16.

Dorier, J-L. (2002). Teaching Linear Algebra at University. En Li Tatsien (ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematician* (pp. 875-884). Beijing: Higher Education Press.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., y Reed, H. (2013). Design research in mathematics education: The case of an ict-rich learning arrangement for the concept of function. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research – Part B: Illustrative cases* (pp. 425-446). Enschede, the Netherlands: SLO.

Gómez i Urgellés, J. V. y Fortuny, J. M. (2002). Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (31), 7-23.

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics, *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155-177. doi: 10.1207/s15327833mtl0102_4

Gravemeijer, K. (2002). Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the 6th International Congress on Teaching Statistics*. Voorburg, The Netherlands:

International Statistical Institute. Recuperado de http://iase-web.org/documents/papers/icots6/2d5_grav.pdf

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 137–144). New York: Springer.

Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. En J.-L. Dorier (Ed.). *On the teaching of linear algebra* (191–208). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J.G., & Lozano, M.D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2125-2140.

Rasmussen, C., Trigueros, M., Zandieh, M., Possani Espinosa, E., Wawro, M, and Sweeney, G. (2010). Building on students' current ways of reasoning to develop more formal or conventional ways of reasoning: The case of linear algebra. En Brosnan, P., Erchick, D. B., and Flevaris, L. (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1577- 1587). Columbus, OH: The Ohio State University.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 114–145.

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., y Larson, C. (2013). Design research within undergraduate mathematics education: An example from introductory linear algebra. *Educational design research—Part B: Illustrative cases*, 905-925.