

Obstáculos Cognitivos Asociados Con La Variación Y El Cambio

Miryán Trujillo Cedeño
Universidad de La Salle de Bogotá, Colombia.

Resumen

Este escrito presenta la relación entre gráficas cartesianas y obstáculos cognitivos asociados con la variación y el cambio. Con la intención de presentar de mostrar la evidencia de esta relación, se hace una presentación desde los siguientes tópicos: manifestación del obstáculo, origen, ejemplos del mismo y superación. Esta relación fue un supuesto inicial que se confirmó desde la revisión del estado del arte de un proyecto iniciado en el programa de matemática educativa del CICATA. El estudio pretende mostrar cómo se argumenta con las gráficas, cuando se busca superar cognitivos referidos a la variación y al cambio en un ambiente de trabajo tecnológico. El estudio de los obstáculos se abordará desde la concepción de obstáculo de Brousseau y el papel de las gráficas desde el planteamiento de Roth. La metodología prevista para el diseño didáctico es la ingeniería didáctica que incluye cuatro fases: análisis preliminares, concepción y análisis *a priori*, experimentación y análisis *a posteriori*.

Palabras Clave: Obstáculos cognitivos, gráficas, variación y cambio.

1. Introducción

En el documento se presenta un avance de un proyecto de investigación, que muestra, desde la revisión del estado del arte, la relación entre las gráficas cartesianas y los obstáculos cognitivos la cual permite reafirmar la problemática de estudio.

Dado que la revisión ha permitido complementar la problemática de estudio, se ha considerado pertinente presentar el escrito en dos partes: En la primera se presenta una descripción del proyecto de investigación, haciendo alusión a lo siguiente: antecedentes y problemática, la investigación en sí y aspectos teóricos–metodológicos. La segunda, partiendo de la necesidad de afinar un supuesto

fundamental inmerso dentro de la problemática -que es la relación entre las gráficas cartesianas y los obstáculos cognitivos- muestra al binomio: gráficas cartesianas-obstáculos cognitivos, dejándose entrever dos roles de dichas gráficas en esta relación: como activadoras de obstáculos y como mediadoras en la superación de los mismos.

Parte I

2. Antecedentes y problemática

El problema de investigación se plantea en torno a que en la comprensión de los conceptos del cálculo, considerado como la matemática de la variación y el cambio, los estudiantes enfrentan obstáculos; algunos son repetición de los observados en la historia y desafortunadamente nosotros, los responsables de orientar su aprendizaje, olvidamos las condiciones históricas en que se ha gestado el cambio conceptual, proceso que en muchos casos ha tomado largo tiempo. A la luz de investigaciones epistemológicas, –sobre los conceptos de función (Sierpinska, 1992; Álvarez y Delgado 2002), continuidad y límite (Cornu, 1981; Sierpinska, 1985; Delgado y Azcárate 1996; Delgado, 1998)– se revela que ciertos conocimientos de los alumnos obstaculizan la comprensión y enfatizan sobre la necesidad de tomarlos en consideración en el momento de planear y realizar la intervención didáctica. Esto es así, porque la comprensión se considera, “un acto implicado en un proceso de interpretación, siendo esta un desarrollo dialéctico entre conjeturas más y más elaboradas y validaciones de esas conjeturas.”(Sierpinska, 1990, p. 26). Estas investigaciones muestran que es inútil dejar de lado dichos obstáculos, por el contrario se deben identificar y preparar situaciones para que ellos se manifiesten y se superen.

3. La investigación

Se pretende hacer un estudio para identificar de qué manera la actividad que se puede generar con la ayuda de las gráficas, permite, posiblemente, crear condiciones que ayuden a superar algunos obstáculos cognitivos referidos a la

variación y al cambio. Es decir, se procura estudiar cómo se argumenta con las gráficas, de tal manera que se explore la naturaleza del conocimiento matemático referido al pensamiento matemático y lenguaje variacional, cuando se busca superar obstáculos cognitivos referidos a la variación. Esta indagación, se pretende hacer a través del diseño de un ambiente tecnológico en donde, según Roth (2003) al tratar con las gráficas las tareas estarán encaminadas a lograr una adecuada lectura o interpretación de estas.

En este sentido el estudio a realizar estaría orientado a dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo las gráficas pueden mediar en la superación de obstáculos cognitivos referidos a la variación y el cambio, en un ambiente de trabajo tecnológico?

4. Aspectos teórico- metodológicos

El tratamiento de los obstáculos epistemológicos referidos a la variación y al cambio, desde su concepción hasta la superación, estará soportado en Bachelard (1938) quien introdujo el término "*obstáculo epistemológico*":

Es en términos de obstáculos que se debe plantear el problema del conocimiento científico. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, que aparecen, por una clase de necesidad funcional, son lentos y son problema. Es aquí que se encuentran las causas del estancamiento y aún de la regresión, es aquí que hay que encontrar las causas de la inercia que es eso que llamamos obstáculo". (p. 15).

No obstante, éste término fue introducido por Brousseau (1983) en el campo de la didáctica, como –conocimiento intrínseco a la naturaleza del saber matemático que funciona en ciertos dominios pero que en otros resulta ineficaz y es fuente de errores, no es idiosincrásico, es resistente y difícil de modificar–. Siguiendo la idea de Delgado (1998), los obstáculos epistemológicos constituyen una subcategoría

de una clase más amplia de obstáculos llamados *cognitivos* para indicar que se incluyen obstáculos de *origen ontogenético*—causados por ciertos funcionamientos automáticos del sistema cognitivo y no sólo por factores de maduración, que son compartidos por todo sujeto— y los de *origen didáctico* —resultado de transposiciones didácticas. El *obstáculo cognitivo* es un conocimiento que tiene dos aspectos, el primero, negativo ya que impide acceder al conocimiento nuevo y, el segundo, positivo porque la readaptación del conocimiento obstáculo a ciertas situaciones produce el conocimiento nuevo.

Para la inclusión del ambiente de trabajo tecnológico se están analizando los marcos de la Génesis Instrumental (Artigue, 2007) y la teoría sociocultural de la acción mediada de Werstch (1991) con el fin de decidir la integración de los dos o la exclusión de alguno dependiendo de la intencionalidad de las actividades que se planeen en el ambiente de trabajo. En la Génesis Instrumental se reflexiona sobre el uso de lo tecnológico y la dialéctica entre el trabajo conceptual y el trabajo técnico en la enseñanza de la matemática. En esta aproximación, la palabra instrumento tiene un sentido especial; surge de la construcción por parte del sujeto; es decir, ocurre una integración de la tecnología al sujeto. Para que esta construcción del artefacto al instrumento suceda, la génesis instrumental se debe apropiarse de una dualidad producto del artefacto: la primera se dirige del sujeto hacia el artefacto cargándolo progresivamente de potencialidades; a este proceso se le llama la instrumentalización. La segunda dirección es del artefacto hacia el sujeto, lo que lleva al desarrollo y apropiación de esquemas de acción instrumentada que le permiten entender las potencialidades y restricciones (o limitaciones) del artefacto el cual constituyen progresivamente en técnicas, habilidades que admiten una respuesta efectiva a actividades matemáticas.

Por otro lado, la teoría sociocultural de la acción mediada indica que la acción típicamente humana emplea «instrumentos mediadores», tales como las herramientas o el lenguaje. Estos instrumentos mediadores dan forma a la acción de manera esencial y los actores buscan alcanzar la comprensión de la situación de acción y de sus planes de acción, con el objeto de coordinar sus acciones por

medio del acuerdo. En este sentido Joyles (2005), realizó un estudio en donde analiza la forma como los estudiantes usan las herramientas computacionales para resolver problemas y cómo durante este proceso las ideas matemáticas involucradas son interiorizadas.

La metodología que abordará el problema a investigar y su solución, está basada en la denominada “*ingeniería didáctica*” (Artigue 1988), que incluye cuatro fases: Análisis preliminares, concepción y análisis *a priori*, experimentación y por último análisis *a posteriori*. Esta metodología es relevante en la investigación por cuanto se pretende hacer un diseño didáctico en donde los obstáculos se manifiesten desde el estudio de las gráficas en función de las tareas encaminadas a lograr una adecuada lectura o interpretación de las mismas.

Parte II

5. Relación entre gráficas cartesianas y obstáculos cognitivos

Con el fin de mostrar evidencias entre la relación, gráficas cartesianas y obstáculos cognitivos, se ha realizado una revisión bibliográfica que da cuenta de dicha relación. Se ha partido de la búsqueda de gráficas cartesianas que muestren sus roles de activadoras de obstáculos epistemológicos y de mediadoras en la superación. De igual forma desde la revisión se ha fijado la mirada en obstáculos epistemológicos que guarden relación con las gráficas cartesianas, haciendo una presentación en este escrito alrededor de los siguientes tópicos: manifestación del obstáculo, origen, ejemplos del mismo y superación.

El obstáculo relacionado a continuación se ha elegido de una lista en la que Sierpinska (1992) trata el concepto de función, refiriéndose a su comprensión, desde el análisis de algunos aspectos epistemológicos y pedagógicos. Parte de la importancia de identificar los obstáculos epistemológicos asociados a dicho concepto desde sus orígenes. En aras de que se superen relaciona cuatro categorías de comprensión de un concepto matemático. En cuanto a los orígenes, distingue tres niveles: el de las actitudes creencias y convicciones, el de los

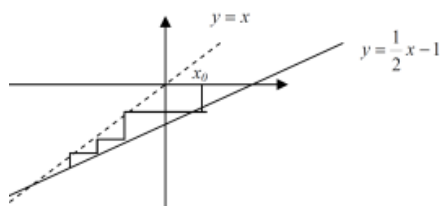
esquemas de pensamiento -formas de aproximar problemas, interpretación de situaciones, cosas que son aprendidas por práctica e imitación en el curso de nuestra socialización y educación- y el último tiene que ver con el conocimiento técnico, entendido como aquel conocimiento explícito que reclama justificaciones racionales. Con relación a los actos de comprensión, se especifican cuatro categorías: **la identificación** de un objeto respecto a otros, **la discriminación**, **la generalización**, y por último **la síntesis**. En el intento de definir condiciones para la comprensión del concepto de función, Sierpiska relaciona obstáculos epistemológicos (OE) asociados con dicho concepto, entre los cuales el explicitado como sigue, muestra una relación con las gráficas cartesianas:

Manifestación del obstáculo: Observar los cambios como un fenómeno, tomando el foco de atención en cómo las cosas cambian ignorando qué cambia.

Origen: Está referido al nivel de los esquemas de pensamiento y parece haber sido común en la descripción de cambios y relaciones en el tiempo de Aristóteles, dado que en algunos de sus trabajos su atención parece centrarse en cómo las cosas pasan de un estado a otro pero sin estar interesado en las variables mismas. Algunos de los ejemplos de movimiento de cambio son: incremento y decrecimiento, rotación, maduración y vejez. Estos nombres describen la naturaleza del cambio como una variable que pasa de un posible valor a otro.

A continuación se presentan dos ejemplos del obstáculo en mención manifestado a través de las gráficas cartesianas:

Ejemplo de Sierpiska: En un experimento, en donde se pretende que los estudiantes identifiquen el proceso de iteración de una función en su representación gráfica y dinámica, (ver gráfica 1), se analiza que:

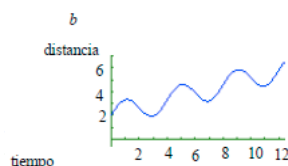


Gráfica 1. (Tomada de Sierpiska, 1992)

Cuando se observa el desplazamiento del punto $(x, f(x))$ a lo largo de la gráfica, los estudiantes concentran su atención en el desplazamiento mismo, sobre el cambio, despreocupándose de lo que está siendo desplazado o padeciendo el cambio. Ellos se interesaron en la forma de la trayectoria del desplazamiento (espiral o en escalera), sólo muy tarde en el experimento algunos estudiantes identificaron los términos de una sucesión como los objetos que son tomados bajo escrutinio. (Sierpinska, 1992, p. 33).

En la situación anterior, se observa que la atención, de los estudiantes, está centrada, en cómo las cosas cambian, ignorando qué cambia. En este caso, la gráfica está tomando el rol de activadora del obstáculo.

Ejemplo de Buendía y Ordoñez: En una experiencia relacionada en Buendía (2006), se le preguntaba a profesores y estudiantes, refiriéndose a la gráfica 2:



Gráfica 2. (Tomada de Buendía, 2006)

¿Es la gráfica de una función periódica?

Respuesta del profesor: ...es periódica porque es senoidal y porque va subiendo de dos en dos.

Esto muestra que lo periódico está asociado con ver el cambio en una gráfica, el profesor pone la atención en cómo cambia la gráfica (se repite), pero no en qué cambia, dado que lo que está indicando como periódico no es la gráfica en sí o el movimiento en sí sino su variación: esto se sustenta porque la derivada de esta gráfica o bien la velocidad de ese movimiento, es periódica según lo reportan Buendía y Ordoñez (2009), al hacer un análisis de una función y sus derivadas para funciones periódicas. En esta gráfica, los alumnos (y profesores), sí ven el cambio pero el cambio que sea; es decir con que algo sea repetitivo, ya la gráfica

es periódica. Entonces, ven el cambio pero no ven qué cambia. Aquí se puede ver a la gráfica, igual que en el ejemplo anterior, activando el obstáculo.

Por otro lado, en esta gráfica el comportamiento de la variable x (o tiempo) efectivamente es periódico, y el de la y (distancia) no lo es, en ecuaciones diferenciales eso lo llaman cuasi-periódico y el darse cuenta de este doble comportamiento y al mismo tiempo poderlos unir, resulta esencial para distinguir una función periódica de otra que no lo es. Desde el análisis de lo periódico se afirma que, cuando se proponen intencionalmente prácticas de predicción sobre estas gráficas, queda favorecido ese análisis dual, lo cual permite hacer una distinción significativa entre el qué se repite y el cómo se repite. (Buendía y Ordoñez, 2009, p.12).

Esta afirmación de la Socioepistemología –teoría que parte considerando el carácter social de la matemática– está en relación con una de las categorías de los actos de comprensión descritos por Sierpiska (1992) al referirse a la superación de obstáculos epistemológicos, a través del favorecimiento dichos actos de comprensión: **la identificación** de un objeto respecto a otros.

Se puede concluir entonces que además de que las gráficas cartesianas activan obstáculos epistemológicos, lo cual se evidencia en los ejemplos anteriores, también las gráficas pueden mediar en la superación de los mismos dado que al proponerse prácticas de predicción sobre las gráficas como la de la figura 2, con el fin de distinguir entre el qué se repite y cómo se repite.

Superación del obstáculo: Sierpiska (1992), propone tener en cuenta dentro de la superación de este obstáculo, el favorecimiento del siguiente acto de comprensión C:

C: Identificación de los sujetos del cambio en el estudio de los cambios

Desde la Socioepistemología de lo periódico, la predicción hace que sí se considere no sólo que algo se está repitiendo sino cómo y qué se está repitiendo. Lo que indica que por lo menos desde las prácticas de predicción sobre ciertas

gráficas cartesianas, se pueden ver a las mismas como mediadoras en la superación del obstáculo (OE): Observar los cambios como un fenómeno, tomando el foco de atención en cómo las cosas cambian ignorando qué cambia. En conclusión la superación del obstáculo en mención, se puede abordar por medio de la práctica de predicción ya que se pone atención en las componentes de la gráfica cartesiana (eje x, eje y) por separado y en conjunto.

Referencias

- Álvarez, J., Delgado, C. (2002). The Tall-Vinner Problem. An Operative Reformulation. *Proceedings of 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.1,261-269.
- Artigue, M (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(3): 281-308. Traducción al castellano de César Delgado G. Documento interno. Univalle, Cali, Colombia.
- Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. En Mancera E. y Pérez C. (Eds.) *Memorias de la XII Interamericana de Educación Matemática*. 12, 9-21.
- Bachelard, G. (1938). La formation de l'esprit scientifique. Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective. Paris: PUF. Traducción al castellano: La formación del Espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo. Siglo XXI. Buenos Aires. Argentina. 1990.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques* 4(2):165-198. Traducción al castellano de César Delgado G. documento interno, Univalle. Cali. Colombia.

- Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9 (2): 227-252
- Buendía, G y Ordoñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivada: significados a partir de la variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(1): 7-28.
- Cornu, B. (1981). Apprentissage de la Notion de Limite: Modèles Spontanés et Modèles Propres'. En: Comiti, C. & Vergnaud, G. (Eds), *Proceedings of the Fifth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*: 322-329.
- Delgado, C. Azcárate, C. (1996). Study on the evolution of graduate students concept images while learning the notions of limit and continuity. *Proceedings of 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2*: 289-296.
- Delgado, C. (1998). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso*. (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona. España.
- Hoyles, C. (2005). Making and sharing mathematics. Two paths to co-constructing meaning. *Meaning in Mathematics Education*. Springer. Estados unidos: 129-139.
- Roth, W.M. (2003). *Toward Anthropology of Graphing. Semiotic and Activity-Theoretic Perspectives*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacles Épistémologiques Relatifs à la Notion de Limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1): 5-67. Traducción al castellano de César Delgado G. Documento interno, Univalle. Cali. Colombia.

- Sierpinska, A (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of mathematics*, 10(3): 24-36. Traducción al Castellano César Delgado G. Documento interno, Univalle. Cali. Colombia : 25-37.
- Sierpinska, A (1992). Sobre la noción de la comprensión de función. En Dubinsky, E. & Harel, G. (eds.), *The concept of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25: 25-58. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1992. Traducción al castellano de César Delgado G. Documento interno, Univalle. Cali. Colombia.
- Werstch, J (1991). *Voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada.*