ANALIZANDO EL TEOREMA DE ROLLE CON GEOGEBRA

Mariana Torres, Cristina Varas
marianagalois@yahoo.com.ar, critinavaras@hotmail.com.ar
Unidad Académica Caleta Olivia, Universidad Nacional de la Patagonia Austral
Argentina

Resumen

La introducción de la tecnología en el campo educativo ha dado lugar a nuevos escenarios basados en el uso de las Tics (Tecnologías de la Información y la Comunicación), que configuran diferentes escenarios de aprendizaje para cada individuo. La presente investigación se enmarca dentro del Proyecto de Investigación 29/B177, Aprender y enseñar con las tecnologías de la información y la comunicación como instrumentos mediadores en los procesos de construcción de conocimiento del Instituto de Educación y Ciudadanía (IEC) de la Universidad de la Patagonia Austral (UNPA) donde se trabaja una línea de investigación relacionada a propuestas desde las perspectivas de las Tics como herramientas cognitivas y es la continuación de un trabajo sostenido que se viene realizando hace un tiempo en la institución.

Palabras clave: Innovación pedagógica, TIC, herramientas cognitivas, GeoGebra, Optimización.

Innovación en procesos de enseñanza y aprendizaje mediante la incorporación de GeoGebra

Las instituciones de educación superior han experimentado un cambio de cierta importancia en el conjunto del sistema educativo de la sociedad actual tales como desplazamiento de los procesos de formación desde los entornos convencionales hasta otros ámbitos, demanda generalizada para que los estudiantes adquieran las competencias necesarias para el aprendizaje continuo. La definición de la estrategia institucional es clave en cualquier proceso de introducción de una innovación (Salinas, 1999).

Planteamiento del Problema de investigación

Plantear la distinción entre las Tics para aprender y las Tics para enseñar y aprender es relevante también para explicar cómo y por qué la implicación de los profesores como agentes educativos en los contextos en los que se incorporan las Tics parten de un supuesto centrado casi totalmente en el aprendizaje y poco sensible al papel fundamental de la enseñanza. En el contexto de la sociedad de información los profesores deben aprender a dominar la nueva forma de pensar y conocer lo que las Tics posibilitan (Cabero, 2007)

Existe mucha literatura de investigación en prácticas de enseñanza y aprendizaje de la matemática con GeoGebra. Los integrantes del equipo de investigación hemos incursionado el área de análisis matemático, en particular con problemas de optimización. (Torres, Varas, 2015).

Las preguntas que intentamos respondernos en este trabajo son ¿Cómo incide el uso de GeoGebra en el hallazgo de la solución a un problema de optimización? ¿Hay diferencia en el planteamiento de la resolución con lápiz y papel y el planteamiento mediante el uso del software?

Objetivo general

Analizaremos dos diferentes resoluciones del problema de optimización planteada. El primero lo llamaremos enfoque analítico que es el que se desarrolla en un curso de análisis matemático de primer año de carreras de grado de ingenierías**.** El segundo enfoque, lo llamamos enfoque dinámico y es el que se analiza al aplicar el GeoGebra en la resolución del problema.

Objetivos específicos

Identificamos, y observamos cómo se articulan los métodos algebraicos, gráficos en el proceso de resolución de problemas, en lápiz y papel con GeoGebra.
Analizamos las ventajas y desventajas de la aplicación de uno de los enfoques planteados y como se podrían integrar y articular al proceso de enseñanza y aprendizaje de problemas de optimización del análisis matemático, en particular.
Identificar como ésta herramienta tecnológica favorece el trabajo colaborativo de los alumnos, como un ambiente más que favorable en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

¿Qué es GeoGebra?

GeoGebra es un software libre que se utiliza para educación en todos sus niveles disponible en múltiples plataformas. Reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas.

Mediante el uso de GeoGebra, los estudiantes logran comprender conceptos abstractos de símbolos, facilitando las visualizaciones matemáticas desde diferentes perspectivas.

Este programa contiene una página principal, la cual está compuesta por:

- ✓ Zona Gráfica.
- ✓ Barra de Herramientas.
- ✓ Campo de Entrada.
- ✓ Ventana de Álgebra.

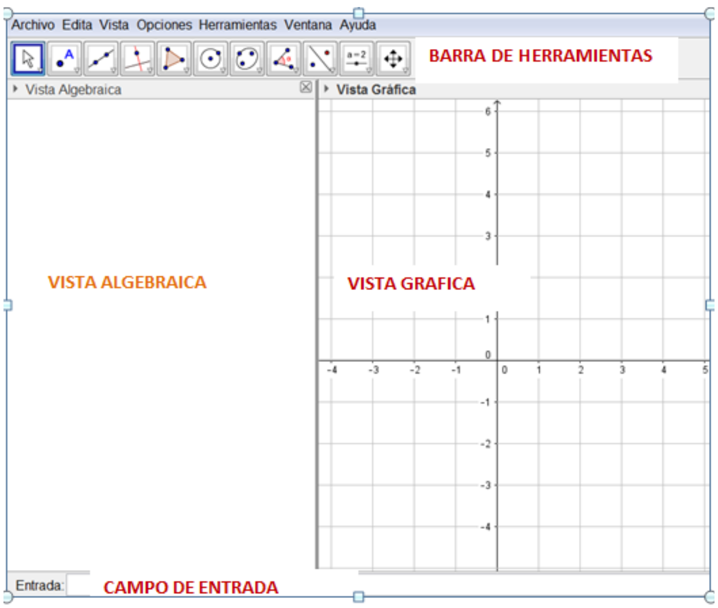

Figura 1

En las últimas versiones con **GeoGebra 5** podemos trabajar en ·3D; es así que podemos graficar con rectas y planos en el espacio, como así también con cualquier tipo de superficies.

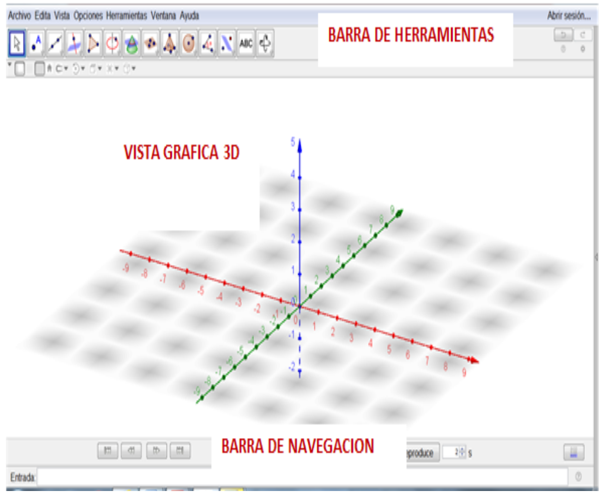

Figura 2

Así, GeoGebra tiene la potencia de manejarse con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función, como raíces o extremo.

Estas dos perspectivas caracterizan a *GeoGebra*: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa.

Representación gráfica de funciones con GeoGebra

Para representar una función con GeoGebra vamos a introducir su ecuación en el Campo de Entrada.

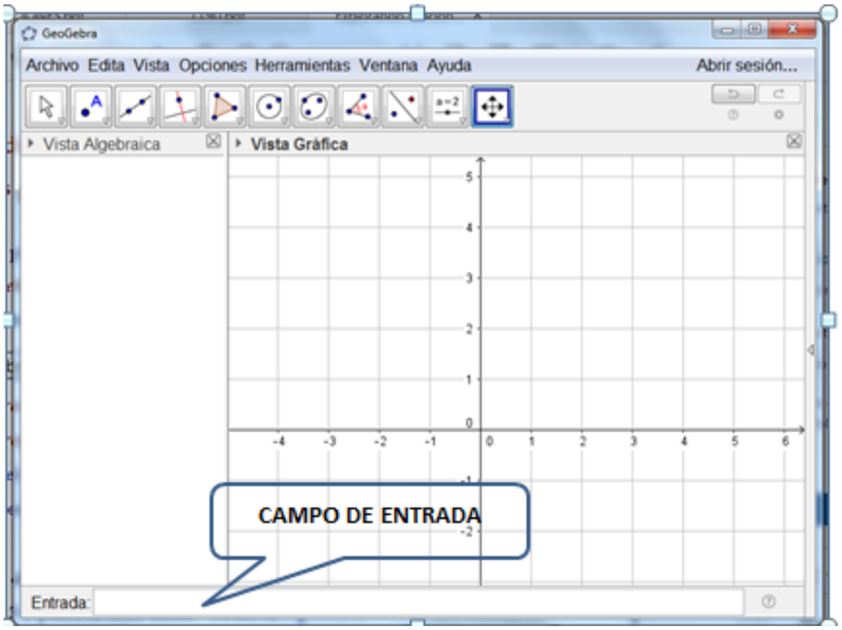

Figura 3

Las funciones pueden escribirse de distintas maneras, a saber:

- y=expresión en "x"

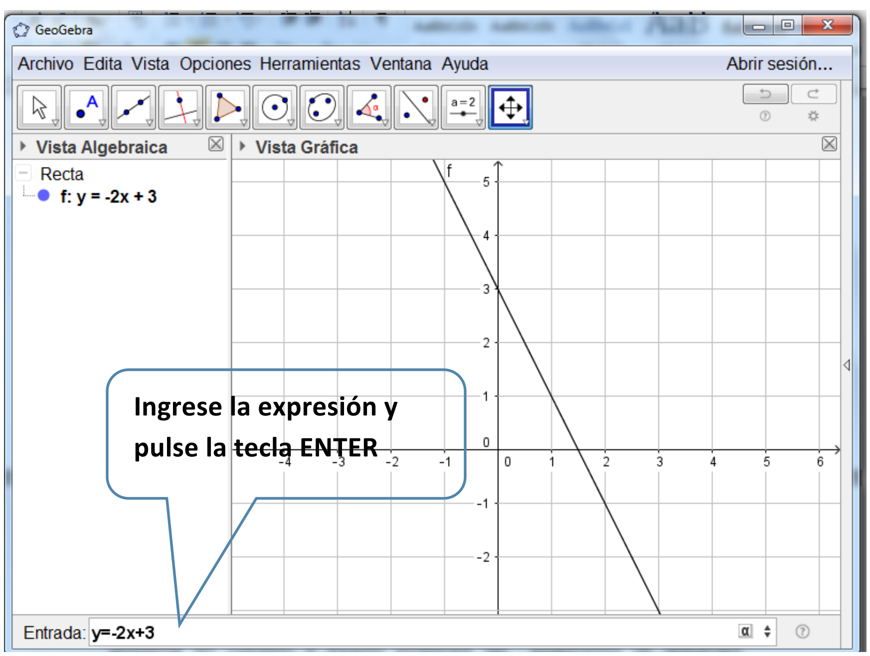

Figura 4

- f(x)= expresión en "x"

Figura 5

- f(x,y)=0 (Forma Implícita)

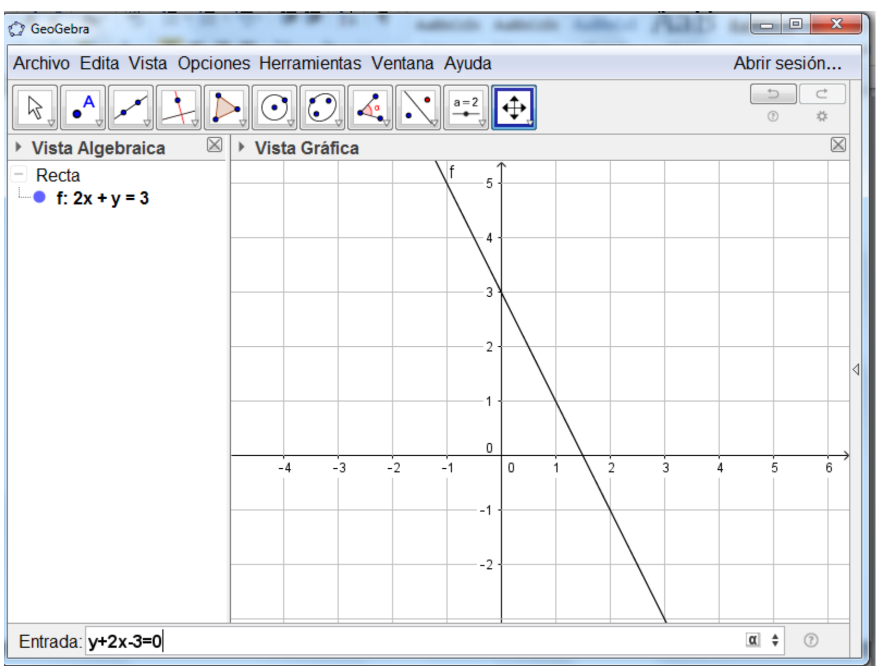

Figura 6

No todas las funciones son sencillas de escribir; como por ejemplo las polinómicas o trigonométricas, ellas tienen un formato particular en su expresión. Para este tipo de funciones nos ayudamos de los símbolos y comandos.

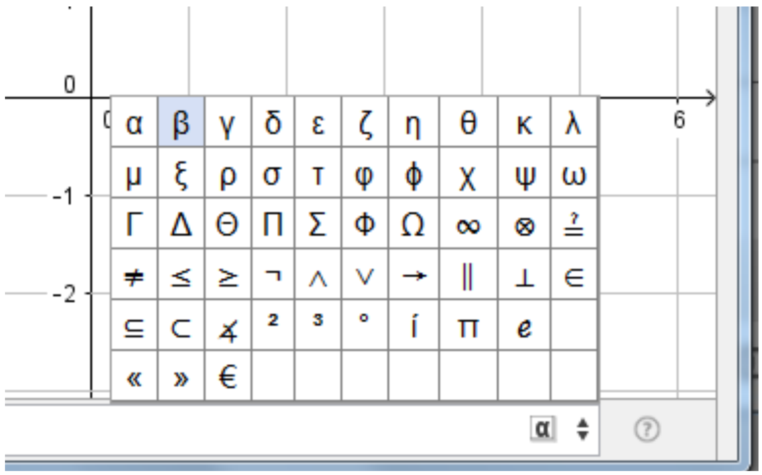

Figura 7

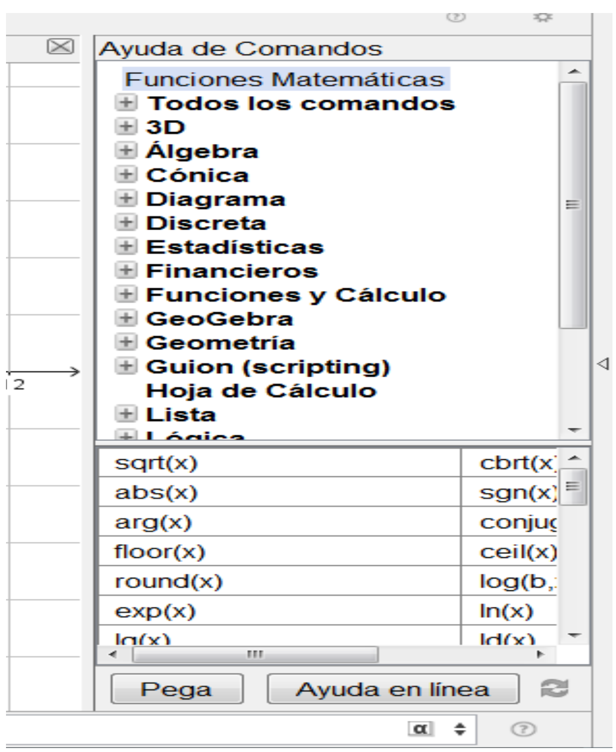

Figura 8

Representación gráfica de la derivada de una función

Para representar la función derivada de una función f(x) utilizamos el comando Derivada[f]

Figura 9

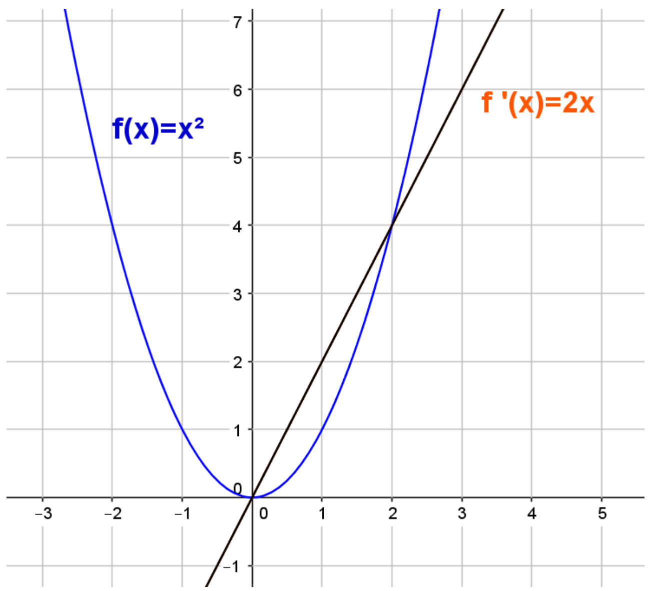

Figura 10

GeoGebra en el Análisis Matemático. Aplicaciones de derivadas

En primer lugar queremos comentar ciertas características generales antes del análisis de las resoluciones que proponemos. Esto lo haremos para anticipar ciertos elementos potentes del mismo. Nos permitirá ver los límites de las técnicas utilizadas, generaremos nuevos interrogantes sobre los datos del problema en cuestión e incluso podremos ser poseedores de diferentes significados a la hora de resolver este tipo de problemas de optimización.

Dentro de las aplicaciones de las derivadas, se encuentra el teorema de Rolle.

Las TICs en la enseñanza de la matemática

No debemos olvidar que la mayoría de los docentes fuimos formados en una época cuando la tecnología estaba prácticamente ausente. Se trata de un conocimiento profesional que se adquiere probando, llevando al aula distinta situaciones, analizando qué sucedió, ajustando y volviendo a probar. Cruz et al (2015). No requiere saberlo todo con anterioridad, sino que se aprende al mismo tiempo que se enseña. Coll et al (2007). Como profesores, conocemos el “vértigo” que esto produce, pero también sabemos que es el único modo en que se construyen los conocimientos docentes. Se trata, entonces, de tomar toda la potencialidad que ofrece GeoGebra, para mejorar las condiciones de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática.

Enfoque didáctico

La enseñanza de la Matemática se ha configurado esencialmente desde un enfoque basado en la mecanización y repetición, que supone la transmisión directa del saber: el profesor enseña y los alumnos, supuestamente, aprenden, como una consecuencia directa. Desde esa perspectiva, resultan en general alumnos que son capaces de reproducir estrategias señaladas por el profesor, pero que encuentran grandes dificultades a la hora de decidir cómo resolver situaciones nuevas para ellos. El aprendizaje de una práctica que permita resolver verdaderos problemas queda en manos de los alumnos, y no todos lo hacen con éxito. Desde la perspectiva que adoptamos, entendemos que el objetivo es que los alumnos aprendan a hacer Matemática.

Desarrollo de la experiencia y análisis de los resultados

Para trabajar sobre el Teorema de Rolle, primero veamos cuáles son sus hipótesis, tal como dice Larson et al (2010) y en Marsden et al (2004).

Sea *f* una función que satisface las tres hipótesis:

1) *f* es continua en el intervalo cerrado [a, b]

2) *f* es diferenciable en el intervalo abierto (a, b),

3) *f (a) = f (b)* ,

Entonces hay un punto c del intervalo (a, b) tal que *f ’(c)=0*.

Como interpretación geométrica podemos decir que existe un punto, al menos, de ese intervalo, en el que la recta tangente a dicha curva es horizontal. En ese punto c (puede será en alguno de ellos si es que hay varios) se da el máximo o el mínimo de la función f(x) en ese intervalo.

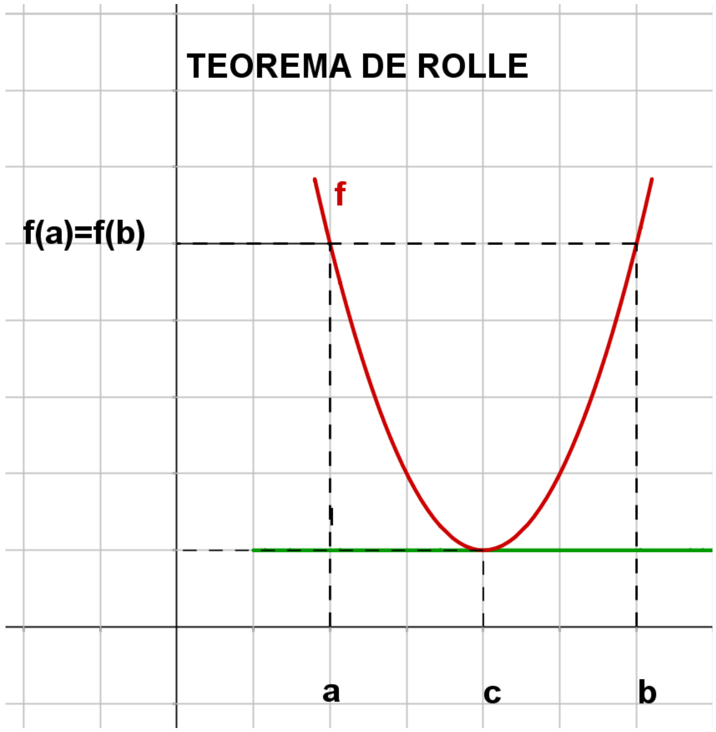

Figura 11

Ejemplo 1: Vamos a ver el teorema con GeoGebra, tomamos como ejemplo la función $f(x)=x^2(x^2-4)$ en el intervalo [-3,3]. Su gráfica realizada con GeoGebra es la siguiente.

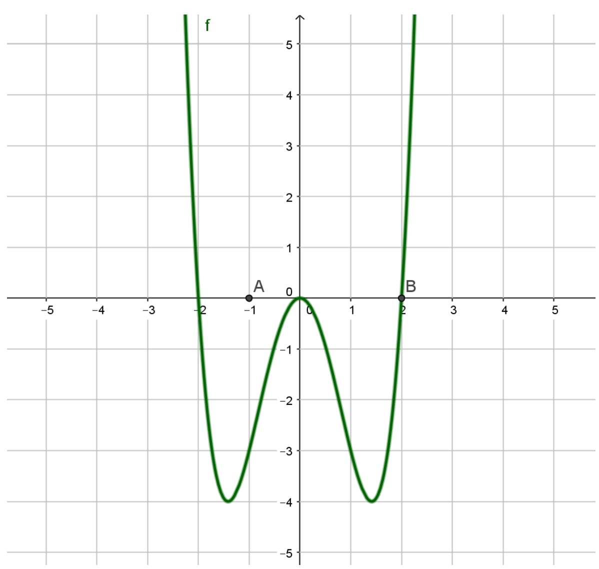

Figura 12

Verificamos las hipótesis del teorema:

- ✓ Por ser un polinomio, la función es continua en [-3,3]
- ✓ f es derivable en (-3,3)
- ✓ f(-3)=f(3)=45

Entonces podemos afirmar que existe al menos un punto "c" ∈ (-3,3) tal que f'(c)=0.

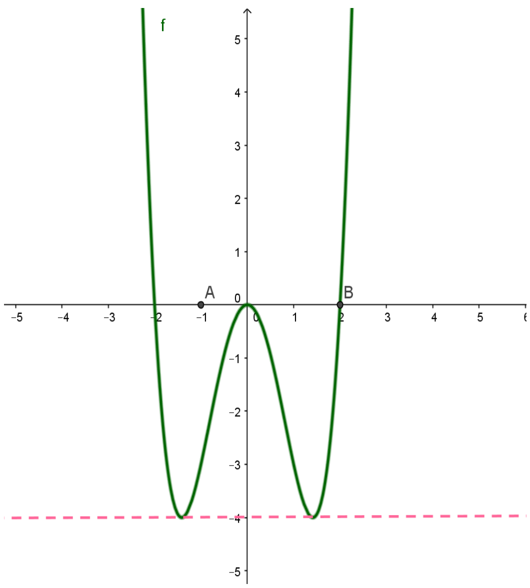

Figura 13

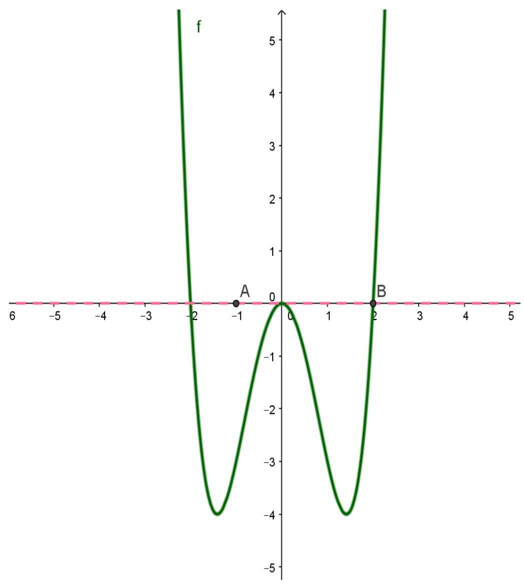

Figura 14

Se puede ver (Fig. 13 y Fig. 14) que tanto en c_1=-1.41, c_2=0 y c_3=1.41 las rectas tangentes en estos puntos es horizontal, es decir que su pendiente es nula; y que estos son los ceros o raíces de la función derivada. Si realizamos ambas gráficas, podemos corroborar que el teorema de Rolle se verifica.

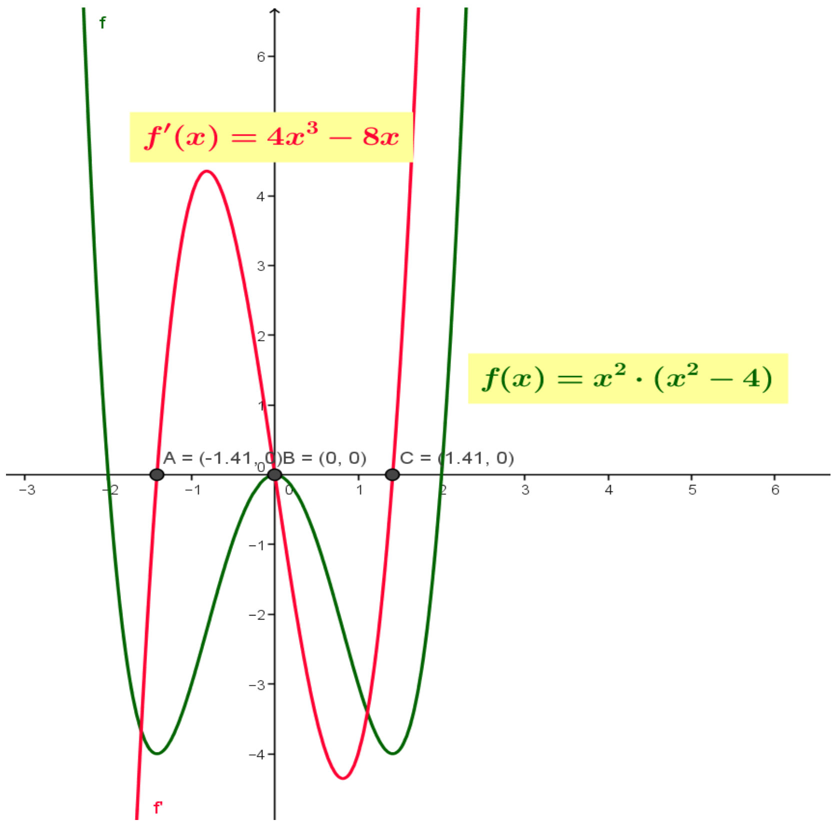

Figura 15

Ejemplo 2:

Sea $f(x) = \begin{cases} -x+1 & si\ 0 \leq x < 1 \\ x-1 & si\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ definida en el intervalo [0,2]. Veamos si se verifica el Teorema de Rolle.

Para ello lo primero que vamos a verificar es si dicha función satisface las hipótesis del Teorema, es decir, si es continua y derivable.

Continuidad en x=1.

- f(1)=0

$\lim_{x\to 1^-} -x+1 = 0.$

$\lim_{x\to 1^+} x-1 = 0.$

Por lo que es una función continua en dicho intervalo.

Para dicha función no se puede aplicar el Teorema de Rolle ya que la función NO es derivable en x=1.

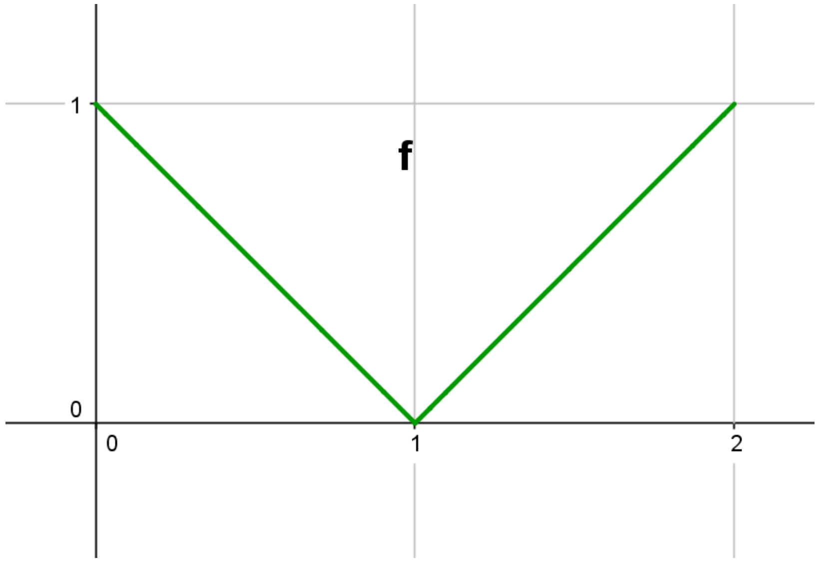

Figura 16

Ejemplo 3:

Sea $f(x) = 1 - x$. Es posible aplicar el Teorema de Rolle a f(x)?

Dicha función no satisface las condiciones del Teorema en [-1,1], a pesar de ser continua en [-1,1] y derivable en (-1,1) por ser una función polinómica pero $f(-1) \neq f(1)$.

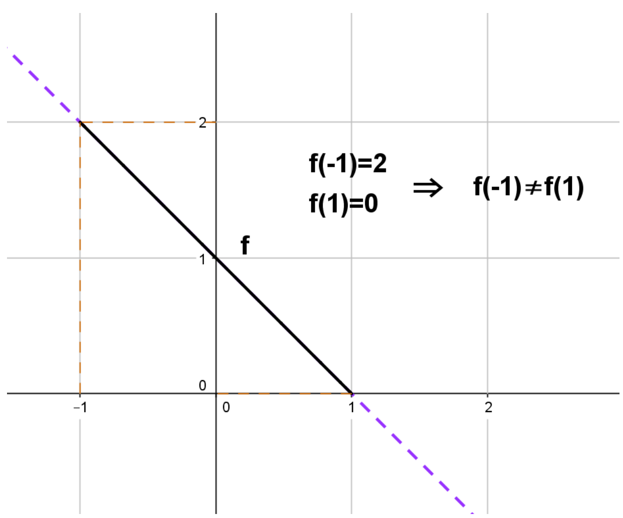

Figura 17

Ejemplo 4:

Veamos el ejemplo de una función donde no se verifica el Teorema de Rolle.

Sea $f(x) = x^7 + 3x + 3$, dicha función es una función continua y derivable en R.

$f(-1) = -1$

$f(0) = 3$

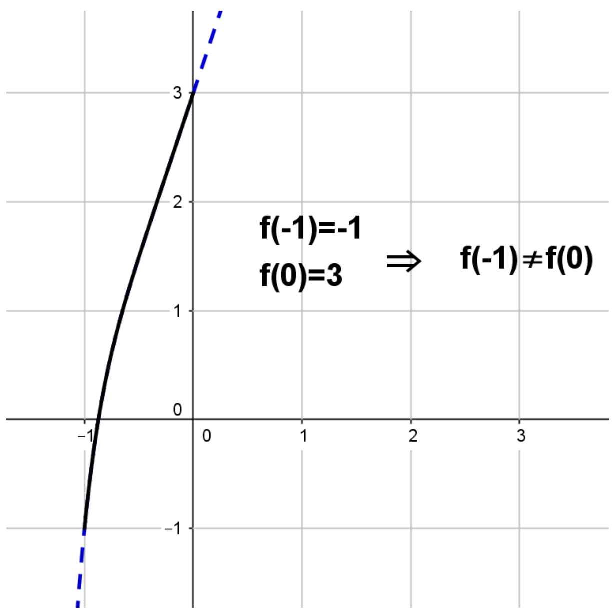

Figura 18

Por lo que podemos decir que la ecuación tiene al menos una solución en el intervalo real (-1, 0). (Teorema de Bolzano).

Si aplicamos el Teorema de Rolle, la derivada de f es,

$f'(x) = 7x^6 + 3$.

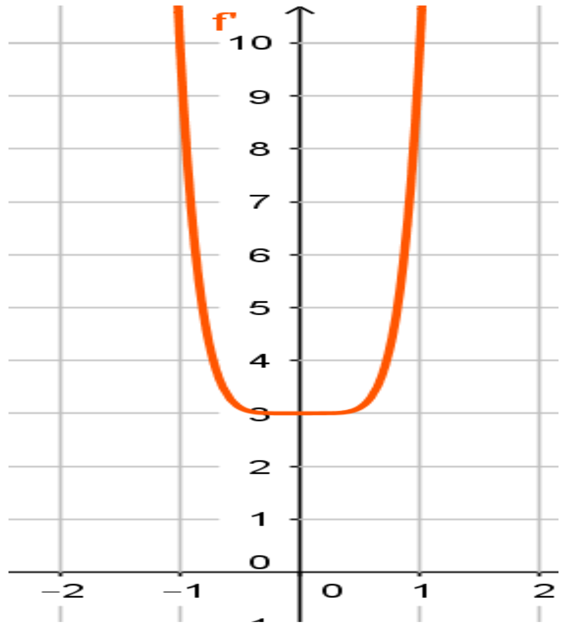

Figura 19

Claramente la derivada de f no se anula en ningún valor real y esto es una contradicción con el Teorema de Rolle, por lo tanto podemos decir que solo tiene una raíz real.

Comentarios Finales

Plantear la distinción entre las Tics para aprender y las Tics para enseñar y aprender es relevante para explicar cómo y por qué la implicación de los profesores como agentes educativos en los contextos en los que se incorporan las Tics parte de un supuesto centrado en el aprendizaje. En el contexto de la sociedad de información los profesores deben aprender a dominar la nueva forma de pensar y conocer que las Tics posibilitan. Las herramientas como GeoGebra son recursos útiles en el aula de clases de Matemáticas, ya que permiten que los estudiantes muestren a través de la puesta en práctica de aquellos conocimientos previos lo que han logrado interiorizar hasta el momento.

El trabajo muestra que se puede trabajar en el aula de análisis matemático el Teorema de Rolle utilizando el software GeoGebra, en el cual se puede observar por qué las hipótesis del teorema y sus conclusiones. El trabajo con GeoGebra permite analizar desde lo dinámico el teorema, en contraposición con el trabajo con lapiz y papel que se hace en el aula. Analizar el teorema de Rolle con GeoGebra permitirá al alumno salir de lo algebraico; es decir reducir al mismo en una mera ecuación, para así analizarlo desde lo dinámico a través del análisis de la función derivada y poder encontrar los extremos de una función.

La aplicación de las TIC a acciones de formación bajo la concepción de enseñanza flexible, abren diversos frentes de cambio y renovación a considerar, cambios en las concepciones (cómo funciona en aula, definición de los procesos didácticos, identidad del docente), cambios en los recursos básicos tales como contenidos materiales, infraestructuras (acceso a redes), uso abierto de estos recursos (accesibles al profesor, alumno) y cambios en las prácticas de los profesores y de los alumnos. Las Tics no suponen, por sí mismas, una garantía de cambio positivo en la Universidad, y a ello se le suman nuevos retos como la modificación de los programas de las asignaturas, buenas prácticas docentes en el uso de las mismas, el control de calidad de los materiales, es así que como docentes universitarios interesados en dar respuestas a grupos de alumnos cada vez más heterogéneos y diversos debemos redefinir nuestro rol y asumir las funciones que implica.

Referencias bibliográficas

Cabero, J., (2007). *Tecnología Educativa*. Madrid, España: Ed. Mac Graw Hill.

Coll, C., Onrubia, J., & Mauri, T. (2007). Tecnología y prácticas pedagógicas: Las Tics como instrumentos de mediación de la actividad conjunta de profesores y estudiantes. *Anuario de Psicología*, *38*(3), 377- 400.

Cruz, D., Rivadeneira, S., Vilanova, G., Torres, M., & Varas, C. (2015, abril). *Tecnología Educativa como herramienta para la innovación en la práctica docente*. Trabajo presentado en el XVII Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación. Salta, Argentina.

Larson, R., & Edwards, B. (2010). *Cálculo 1.* México: Editorial Mc Graw Hill.

Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2004). *Calculo Vectorial* (5ta. ed.). Madrid, España: Pearson Educación.

Salinas, J. (1999, julio). *El rol del profesorado universitario ante los cambios de la era digital. Perfeccionamiento Integral del Profesor Universitario*. Trabajo presentado en el 1er. Encuentro Iberoamericano de perfeccionamiento integral del profesor universitario. Caracas, Venezuela.

Salomón, G. (1993). No hay distribución sin la cognición de los individuos, un enfoque interactivo dinámico. En G. Salomón (comp). *Cogniciones distribuidas. Consideraciones psicológicas y educativas*. Buenos Aires, Argentina: Amorrortu Editores.

Stewart., J. (2001). *Calculo de una variable: Trascendentes tempranas*. Madrid, España: Ediciones Paraninfo.