

ESTUDIO DE UN FENÓMENO DIDÁCTICO ASOCIADO A LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN PROBABILIDAD

Valeria Bizet Leyton¹; Jocelyn Diaz Pallauta²; Daniela Araya Tapia³
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
valeb0@hotmail.com¹; jocelyndiazpallauta16@gmail.com²;
danielanataliaaraya@gmail.com³

Resumen

La presente investigación tiene por objetivo, indagar si el hecho didáctico que el docente no logra diferenciar entre la representación gráfico estadístico y gráfico cartesiano de la función probabilidad, es un buen candidato a fenómeno didáctico desde la perspectiva de docentes de matemática de enseñanza secundaria de Chile.

Bajo el paradigma cualitativo, se lleva a cabo un estudio exploratorio. Por otra parte, para la recolección de datos se diseña un cuestionario basado en un ejercicio, extraído del texto de matemática del estudiante (16 y 17 años), distribuido por el Ministerio de Educación de Chile.

Para el análisis de datos, se consideró categorías a priori emergentes de elementos teóricos. Los resultados evidencian, la necesidad de reforzar la representación y diferenciación entre gráfico estadístico y cartesiano de la función probabilidad en los docentes de matemática.

Palabras Clave: Función Probabilidad, Gráfico Estadístico, Gráfico Cartesiano, Fenómeno Didáctico.

Introducción y Problemática

El programa de estudio de matemática de Chile, en los últimos años, ha sido modificado, donde el eje Datos y Azar ha tomado un rol preponderante, tanto en la educación primaria como secundario

(MINEDUC, 2005; MINEDUC; 2009; MINEDUC, 2015). La estadística está presente en forma generalizada en los diferentes niveles educativos debido a su carácter instrumental (Batanero, 2002). Pero los docentes no desarrollan todos los conceptos estadísticos o lo hacen en forma superficial, producto del desconocimiento de estrategias metodológicas, bajo nivel de conocimiento de los temas y por ser la última unidad del programa (León, 1998).

La investigación, tiene por objetivo indagar si el hecho didáctico que el docente no logra diferenciar la representación gráfico estadístico y gráfico cartesiano de la función probabilidad, es un buen candidato a fenómeno didáctico.

Algunas investigaciones que tratan estas temáticas, han evidenciado que futuros docentes presentan dificultad en la construcción, lectura e interpretación de gráficos estadísticos elementales, asociando a ésta la falta de comprensión de objetos estadísticos y sus relaciones que subyacen en el gráfico (Arteaga, 2011). En este contexto, Arteaga, Batanero y Cardeñoso (2011) concluyen que la preparación de los docentes para enseñar gráficos estadísticos, es un tema fundamental que ha sido olvidado desde la investigación y en la formación de maestros.

García (2005) manifiesta que titulados de carreras afines a las ciencias, presentan dificultad en la comprensión de gráficos cartesianos de un nivel elemental, no logrando una manipulación e interpretación elaborada de ellos.

Por otra parte, Friel, Curcio y Bright (2001) proponen que la comprensión gráfica está influenciada por cuatro factores: fines para los que se utilizan

los gráficos, características de la tarea, disciplina y las características del lector.

Marco Conceptual

El sustento teórico de nuestro estudio lo constituye la noción de hecho y fenómeno didáctico, la representación gráfica (estadística y cartesiana) de la función probabilidad y el constructo comprensión gráfica. A continuación, se detalla cada uno de estos tópicos.

Un hecho didáctico, es un suceso que ocurre durante el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, cuando este acontecimiento es interpretado o estudiado con un sustento teórico se puede convertir en fenómeno didáctico (Wilhelmi, Font y Godino, 2005). Además un fenómeno didáctico trasciende del contexto y tiempo.

Para analizar la manera en que los docentes comprenden el objeto matemático función probabilidad, y su representación gráfico estadístico y gráfico cartesiano funcional, se consideró elementos teóricos, como la definición de función y gráfico de una relación (Mena, 2011), las cuales permitieron establecer que el gráfico cartesiano funcional es $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \in A \times B: x \in \text{Dom}(f)\}$, donde $\text{Dom}(f) = A$ y $\text{Rec}(f) = B$, es decir, es el conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ de la función, donde existe una correspondencia entre los elementos del dominio y recorrido de ésta.

Además, se incorpora el concepto de gráfico estadístico propuesto por Arteaga (2011), quien bajo la noción de función semiótica, define a este como:

Una función semiótica, donde el antecedente es el propio gráfico y lo representado es la distribución estadística de los datos, siendo la correspondencia el conjunto de convenios establecidos en estadística para el gráfico particular, que permite a la persona que lee el gráfico interpretarlo o bien a la persona que tiene los datos construirlo. (p. 54)

Así también, se incluye el concepto de comprensión gráfica (Friel, Curcio y Bright, 2001), la definición de función probabilidad (Suárez, 2002) y sus distintos registros de representaciones, estos últimos elementos mencionados, se han organizado en un esquema expuesto en la imagen 1.

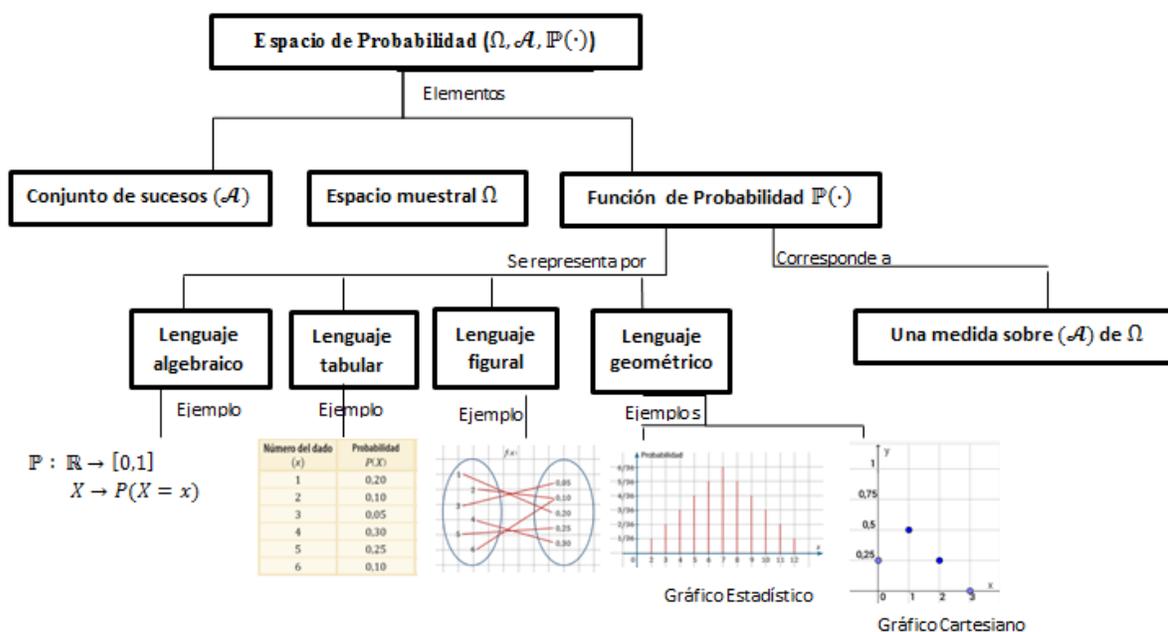


Imagen 1. Estructura conceptual de la función probabilidad.

Concepto Probabilístico Función de Probabilidad

Una aproximación al tema en estudio lo proporcionan los libros de estadística clásica, para ello se indaga en la definición de función de probabilidad y conceptos asociados como variable aleatoria.

“Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, una función tal que:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \rightarrow X(\omega) = k$$

Para todo subconjunto de los reales \mathcal{B} , $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$, $\{X \in \mathcal{B}\} = \{\omega / X(\omega) \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{A}$, la función de valores reales X recibe el nombre de variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ” (Suárez, 2002, p.45).

Cabe destacar la importancia de este concepto en probabilidad, pues es el nexo entre el ámbito experimental y el ámbito matemático, y es un caso particular de función, en el sentido que posee como dominio el espacio muestral de un experimento, donde la variable aleatoria toma cada conjunto que compone dicho espacio y le asocia un número real.

Ahora es posible definir la función de probabilidad,

“sea X una variable aleatoria discreta. Se puede definir la función de probabilidad como:

$$f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$K \rightarrow f_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$$

Donde la función de probabilidad cumple las propiedades de la medida de probabilidad.

i) $f_X(k) \geq 0$

ii) $\sum_{\forall k \in \mathcal{B}} f_X(k) = 1$

iii) $\mathbb{P}(X \in \mathcal{B}) = \mathbb{P}(\cup_{k \in \mathcal{B}} X(\omega) \in \mathcal{B}) = \sum_{k \in \mathcal{B}} f_X(k)$ ” (Suárez, 2002, p.46).

Es importante notar que la función de probabilidad, asocia a cada suceso generado a partir del espacio muestral su posibilidad de ocurrencia.

Metodología

Esta investigación se desarrolla bajo el enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006), dado que son analizados e interpretados contenidos estadísticos de docentes, referidos a evidenciar si logran diferenciar entre un gráfico estadístico de uno cartesiano funcional. Los sujetos informantes, corresponden a 12 docentes de matemática de enseñanza secundaria, con distinto nivel de perfeccionamiento, pertenecientes a diferentes regiones de Chile, participando por libre disposición.

Para la recogida de datos, se diseñó un cuestionario considerando un ejercicio presente en el texto escolar de matemática de tercero medio (16-17 años) distribuido por el Ministerio de Educación de Chile (Saiz y Blumenthal, 2016), el cual fue sometido a pilotaje y juicio de expertos, antes de su aplicación (imagen 2).

Análisis de las Respuestas

Para lograr el objetivo, *Indagar si el hecho didáctico que el docente no logra diferenciar la representación gráfico estadístico y gráfico cartesiano de la función probabilidad, es un buen candidato a fenómeno didáctico*, el procedimiento para el análisis de los datos, se realizó a través de una

comparación entre las categorías emergentes, para luego buscar su relación con los antecedentes.

En el texto escolar de tercero medio se presenta el siguiente ejemplo

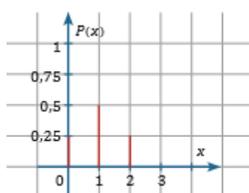
Si se define la variable aleatoria “el número de hijos hombres que una pareja puede tener si tienen dos hijos”, ¿cuál sería la función de probabilidad?

El espacio muestral correspondiente a esta situación es:

$EM = \{HH, HM, MH, MM\}$, donde H corresponde a un niño y M corresponde a una niña.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{con 0 o 2 hijos hombres} \\ \frac{1}{2} & \text{con 1 hijo hombre} \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Además podemos graficarla también de la siguiente manera:



(Saiz y Blumenthal, 2016, p. 339)

Si un estudiante le realiza la pregunta ¿Por qué el gráfico de la función tiene líneas verticales, si sabemos que estas no representan una función? ¿Qué le plantearía usted como respuesta?

Imagen 2. Instrumento de recogida de datos

Análisis de las Respuestas

Para lograr el objetivo, *Indagar si el hecho didáctico que el docente no logra diferenciar la representación gráfico estadístico y gráfico cartesiano de la función probabilidad, es un buen candidato a fenómeno didáctico*, el procedimiento para el análisis de los datos, se realizó a través de una comparación entre las categorías emergentes, para luego buscar su relación con los antecedentes.

Del análisis de las respuestas obtenidas, se evidencia que un 58% de los docentes reconocen que la función probabilidad es posible de representar a través de distintos gráficos estadísticos. Los profesores no hacen referencia directa al gráfico de línea dado, sino que lo asocian al histograma o al gráfico de barras, como se muestra en la imagen 3.

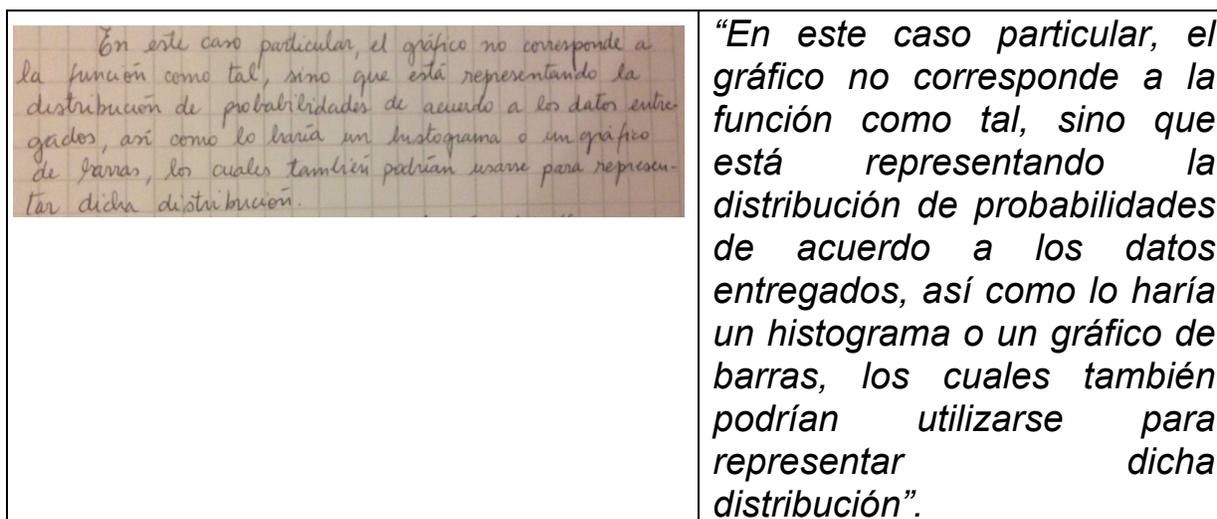


Imagen 3. Respuesta del sujeto n°6.

Por otro lado, parece ser que los docentes comprenden el concepto de función, dado que un 83% descartan que el gráfico de líneas verticales represente una función, en el contexto de plano cartesiano. Así también, se evidencia que reconocen que la variable independiente de la función probabilidad es discreta, por lo tanto, su representación es a través de puntos aislados, como se ilustra en la imagen 4. De esto se infiere, que el docente realiza un tránsito de la expresión algebraica de la función probabilidad a su representación gráfica en el plano cartesiano.

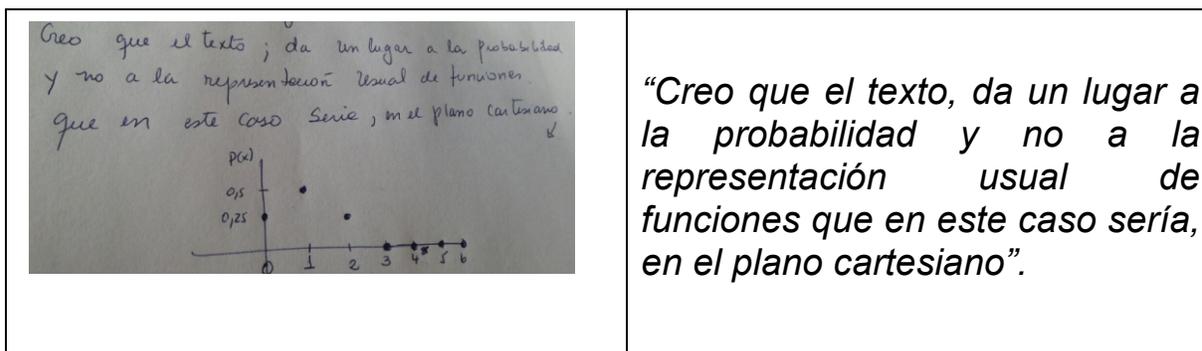


Imagen 4. Respuesta del sujeto n°4.

Un 50% de los docentes identifica que las líneas verticales representan la probabilidad asociada a la variable aleatoria X , como se muestra en la imagen 5. Se infiere que los participantes reconocen que el gráfico presentado, no corresponde a un gráfico cartesiano funcional, solo dos de los sujetos justifican su respuesta, aludiendo a la idea de conjuntos de puntos del plano cartesiano. Es posible que los educadores no logran justificar su respuesta, por falta de apropiación y comprensión de los conceptos matemáticos involucrados en la problemática.

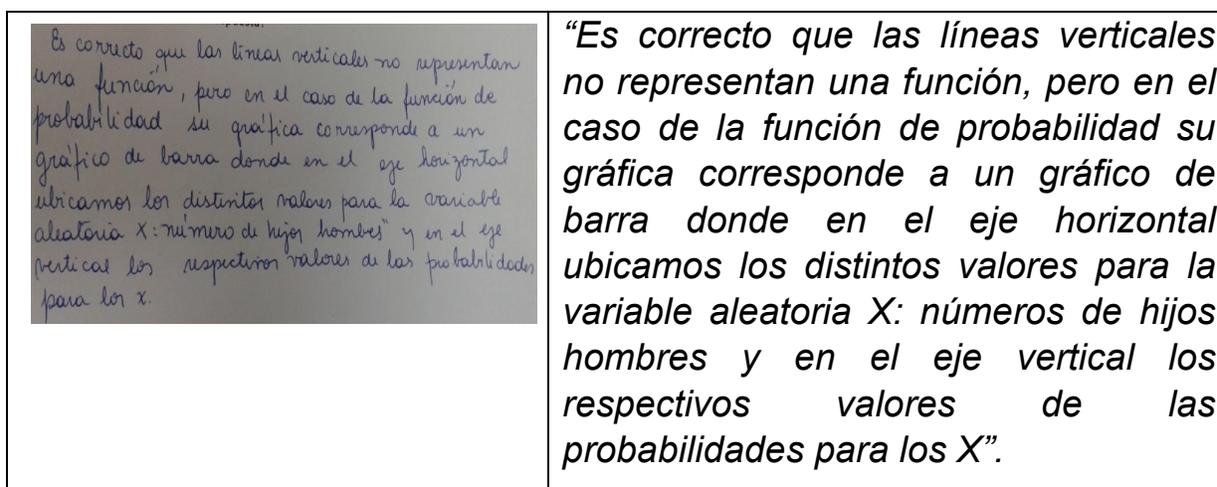


Imagen 5. Resepuesta del sujeto n°8.

Además, el 17% de los profesores relacionan la función probabilidad y su gráfico correspondiente “gráfico estadístico”, pero lo expresan de distinta manera, sí identifican que el eje y del gráfico estadístico representa la probabilidad, uno hace referencia a la probabilidad de los posibles valores de x , a diferencia de otro participante la relaciona con la magnitud de sus valores (imagen 6). Esto sugiere que existe comprensión del objeto matemático función probabilidad y de su representación en lenguaje gráfico.

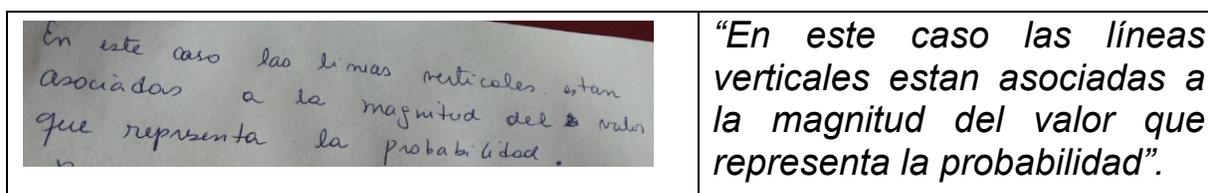


Imagen 6. Respuesta del sujeto n°4.

Del análisis de las respuestas, es posible evidenciar que los docentes comprenden el concepto de función en el contexto de plano cartesiano, sin embargo tienen dificultad en profundizar en el concepto, y diferenciar entre gráfico estadístico y gráfico cartesiano funcional.

Conclusiones

De acuerdo con las respuestas obtenidas de los docentes de matemática, y el análisis desarrollado bajo sustento teórico, es posible afirmar que, éstos utilizaron diferentes formas de relacionar sus conocimientos matemáticos con el fenómeno en estudio, entre sus estrategias, para fundamentar sus respuestas, recurrieron a la representación gráfica de la función probabilidad de una variable discreta, ya sea estadístico o cartesiano

funcional, sin embargo, se evidencia dificultad respecto al dominio de estas representaciones, dado que tendían a confundirlas.

Además, se pudo constatar en las respuestas, que intentaron representar la situación propuesta por medio de la representación cartesiana funcional, así mismo fundamentar el dominio de los conceptos matemáticos asociados a la problemática presentada. Sin embargo, evadían la respuesta a la interrogante, desde el punto de vista pedagógico disciplinario, ya que no entregaron una respuesta precisa a la inquietud del estudiante, pues visualmente para el aprendiz que le presenten un gráfico con líneas verticales, y le digan que este representa una función, genera tensión.

Los sujetos informantes sustentan sus respuestas, por medio de una comparación entre gráfico de línea con un histograma o gráfico de barra. Ellos hacen una correcta analogía entre dichos gráficos, pero parece ser que no logran diferenciar entre gráfico estadístico y gráfico cartesiano funcional.

Respecto a las estrategias que utilizan los docentes para dar respuesta, corresponde a lo que Shulman (1986) define como “conocimiento del contenido” y “conocimiento didáctico del contenido” del profesor; donde caracteriza el “conocimiento del contenido (CDC)” como la manera de representación y formulación de contenidos para que pueda ser comprendida.

La representación para dicho autor, corresponde a una estrategia de enseñanza o didáctica del contenido específico que imparte el docente. Es

importante entonces, que el maestro cuente con un repertorio importante de formas de representación, estas necesariamente involucran la comprensión de los contenidos que enseña.

En el caso particular de esta investigación, que docentes evidencien diferentes maneras de abordar la presentación gráfica y la respuesta a la interrogante del estudiante, se asocia a su experiencia y al dominio de los conocimientos matemáticos involucrados.

Además, el programa de estudio de matemática, ha sufrido una serie de ajustes, agregando conceptos estadísticos y probabilísticos que en años anteriores no estaban incluidos, lo que genera en los docentes la necesidad de una mayor formación didáctica que incluya, no solamente robustecer sus conocimientos en esta área de la matemática, para el dominio de los nuevos conceptos propuestos en el programa de estudio, sino que también componentes básicos como (Batanero, Godino y Roa, 2004): la reflexión epistemológica de conceptos estocásticos, análisis de las transformaciones del conocimiento para enseñarlos en diferentes niveles educativos, estudio de las limitaciones de aprendizaje (dificultades, errores y obstáculos) de los estudiantes y las estrategias de resolución de problemas y el análisis del currículo, situaciones didácticas y recursos didácticos para la temática de interés. La consideración y aplicación de estos aspectos favorecerá la mejora de las prácticas docentes y con ello enriquecer el proceso de enseñanza aprendizaje.

El hecho didáctico expuesto, pareciera indicar la necesidad de reforzar los conceptos básicos de estadística en los docentes; esto al mostrar que

existen indicios de la presencia de concepciones erróneas y dificultades en los conceptos disciplinarios.

Finalmente, concluimos que el hecho que el docente no logra diferenciar la representación gráfico estadístico y gráfico cartesiano de la función probabilidad, es un buen candidato a fenómeno didáctico, es decir, trasciende del contexto, tiempo y espacio.

Esta investigación abre nuevas líneas, para profundizar en el conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido del profesor (Shulman, 1986) en el ámbito de la estadística, para contribuir con elementos teóricos de la didáctica a la enseñanza de la matemática.

Referencias Bibliográficas

- Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Granada. España.
- Arteaga, P., Batanero, C., & Cañadas. (2011). Gráficos estadísticos en la formación de profesores. En J. Ortiz (Ed), *Investigación en Educación Estadística y Formación de Profesores* (pp. 73-87). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática -Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2002, octubre). *Los retos de la cultura estadística*. Conferencia en las Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística (**JIEE**), Buenos Aires, Argentina. [Conferencia Inaugural].

Batanero, C., Godino, J., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12 (1). Recuperado de <http://www.amstat.org/publications/jse/>

Friel, S., Curcio, F., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.

García, J. (2005). *La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presentes en los libros de texto de ciencias experimentales, sus características y el uso que se hace de ellas en el aula* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Granada. España.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. Cd. de México, México: McGraw-Hill.

León, N. (1998). Explorando las nociones básicas de probabilidad a nivel superior. *Paradigma*, 19 (2) ,125-143.

Mena, A. (2011). *Estudio Epistemológico del Teorema del Isomorfismo de Grupo* (Tesis de doctorado no publicada). CICATA- IPN. México.

MINEDUC. (2005). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media*. Santiago, Chile: autor.

MINEDUC. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media*. Santiago, Chile: autor.

MINEDUC. (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Santiago, Chile: autor.

Avances en Matemática Educativa. Aproximaciones teóricas.

Saiz, O., & Blumenthal, V. (2016). *Guía didáctica del docente Matemática 3° Medio*. Santiago, Chile: Ediciones Cal y Canto.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(1), pp. 4–14.

Suárez, L. (2002). *Introducción a la Teoría de Probabilidad*. Manizales, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Wilhelmi, M., Font, V., & Godino, J. D. (2005). *Bases empíricas de modelos teóricos en didáctica de las matemáticas: Reflexiones sobre la Teoría de Situaciones Didácticas y el Enfoque Ontológico y Semiótico*. Granada, España: Universidad de Granada.